

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1891

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0107

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0107](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107)

**LOG Id:** LOG\_0008

**LOG Titel:** Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie.

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *Max Simon* in Strassburg i. Els.)

Die Construction des Parallelstrahls durch einen gegebenen Punkt zu einem gegebenen Strahle ist von *Bolyai* und *Lobatschewsky* trigonometrisch abgeleitet worden. Sei  $AZ$  der gegebene Strahl (Figur 1),  $B$  der gegebene Punkt,  $AB$  senkrecht auf  $AZ$ . Man nehme irgend einen Punkt  $D$  auf  $AZ$ , errichte in  $D$  auf  $AZ$  das Loth  $DC$  und fälle von  $B$  auf  $DC$  das Loth  $BC$ . Wird der Parallelwinkel mit  $z$  bezeichnet,  $AD$  mit  $p$ ,  $BC$  mit  $r$ , so gilt der Satz, dass in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse  $r$  und dessen eine Kathete  $p$  ist, der  $p$  gegenüber liegende spitze Winkel gleich  $z$  ist. Herr *Frischauf* hat in seinen „Elementen der absoluten Geometrie“ (Teubner 1876) bei der Construction in § 67 *irrthümlicher Weise* das Loth in  $B$  *errichtet* \*). Im Folgenden wird die Construction ganz elementar planimetrisch abgeleitet.

Sei  $BW$  senkrecht  $AB$ ;  $BR$  irgend ein Strahl innerhalb  $ABW$ ; man schlage um  $B$  mit  $BC$  einen Kreis, welcher  $BR$  in  $X$  treffen möge, fälle von  $X$  auf  $AB$  das Loth  $XU$  und bezeichne  $XU$  mit  $q$ .

Es gilt alsdann folgender Hauptsatz:

Ist  $q < p$ , so muss für alle Punkte des Strahles  $AZ$  zwischen  $A$  und  $D$ , mit Ausnahme derer in unendlicher Nähe von  $A$ , ebenfalls  $q < p$  sein. Ist dagegen  $q > p$  für  $D$ , so ist  $q > p$  für alle Punkte zwischen  $D$  und  $Z$ .

Beweis. a.) Da nach Voraussetzung  $UX < AD$ , so fällt, wenn ich  $UX$  auf  $AD$  von  $A$  aus abtrage,  $X$  zwischen  $A$  und  $D$  nach  $D_1$ . Man errichte in  $D_1$  die Senkrechte, welche  $BR$  in  $S_1$  schneidet; fälle von  $B$  auf  $D_1S_1$  das Loth  $BC_1$  ( $BC_1 < BC$ ), trage  $BC_1$  auf  $BR$  ab bis  $X_1$  ( $X_1$  zwischen  $B$  und  $X$ ), so ist  $X_1U_1 < XU$ , also  $X_1U_1 < AD_1$ . Für  $AD_1$  gleich  $p_1$  gilt also

\*) Dasselbe Versehen findet sich in der „*Absoluten Geometrie nach J. Bolyai bearbeitet*“.

$q_1 < p_1$ , und für alle Punkte zwischen  $D_1$  und  $D$  gilt dasselbe, da die Schnittpunkte der betreffenden Kreise zwischen  $X_1$  und  $X$  fallen. Ebenso leitet man aus  $D_1$  bzw.  $X_1$  und  $S_1$  ein  $D_2, X_2, S_2$  zwischen  $A$  und  $D_1$  ab ( $B$  und  $S_1$ ), und so fort. Da die von  $B$  gefälltten Lothe sich für endliche Entfernungen der Fusspunkte auch endlich unterscheiden, so nähern sich die  $D$  auf diese Weise *asymptotisch* dem Punkte  $A$  (bzw. die  $S$  den  $B$ ).

b.)  $XU > AD$ . Man trage  $XU$  auf  $AD$  von  $A$  aus ab, gewinne  $D_1$  hinter  $D$  und  $S_1$  hinter  $S$ ,  $X_1$  hinter  $X$ , da  $BC_1 > BC$  ist; und  $X_1U_1 > XU > AD_1$  etc.

Anwendung des Hauptsatzes.

A. Schneidende. — Figur 2. —

Sei  $BS$  ein  $AZ$  in  $S$  schneidender Strahl, so ist, wenn  $D$  mit  $S$  zusammenfällt, in  $S$  jedenfalls  $q < p$ , also für alle Punkte zwischen  $A$  und  $S$  ( $B$  und  $S$ ) mit Ausnahme der  $A$  unendlich nahen  $q_v < p_v$ . Sei jetzt  $D_1$  hinter  $S$ , so ist entweder  $BC_1 > BS$  oder nicht. Im letzteren Falle ist, da dann  $X_1$  nicht über  $S$  fällt, unmittelbar klar, dass  $q_1 < p_1$ . Im ersteren Fall fällt  $X_1$  jenseits  $S$  und der Kreis um  $B$  mit  $BC_1$  muss  $AD_1$  zwischen  $A$  und  $D$  schneiden ( $BS < BC_1; BD_1 > BC_1$ ) z. B. in  $F_1$ ; dann ist  $X_1U_1 < F_1A$  (von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die grössere), also erst recht  $q_1 < p_1$ . Für die Schneidende ist daher (mit der schon öfter erwähnten Ausnahme) stets  $q < p$ .

B. Nichtschneidende. — Figur 3. —

Sei  $BS$  Nichtschneidende,  $SD$  der Hauptabstand; dann ist für das zu  $S$ , welches mit  $C$  zusammenfällt, gehörige  $D$  eo ipso klar, dass  $q > p$ . Folglich gilt für alle rechts von  $S$  gelegenen Punkte das Gleiche. (Was man auch durch den schon angeführten Sehnensatz direct beweisen kann.) Ich trage jetzt  $AD$  auf  $SU$  von  $U$  aus ab bis  $F$ , ziehe  $BF$  und schlage um  $B$  mit  $BF$  den Kreis, welcher  $BS$  zwischen  $B$  und  $S$  in  $S_1$  trifft. Alsdann liegt zwischen  $F$  (sogar zwischen  $S_1$ ) und  $H$  — wenn  $BH$  senkrecht  $AB$  — auf dem Kreise ein Punkt  $C_1$ , so dass die Tangente in  $C_1$  auf  $AD$  senkrecht steht. (Beweis dieses Hilfssatzes folgt.) Diese Tangente schneidet  $AD$  in  $D_1$  zwischen  $A$  und  $D$ , weil  $BF < BS$  ist, und es ist für  $BC_1$  als  $r_1$  und  $AD_1$  als  $p_1$  jedenfalls  $q_1$ , weil  $> FU$ , auch  $> AD_1$  oder  $p_1$ ; folglich gilt für alle Punkte zwischen  $D_1$  und  $D$  dasselbe. So fortfahrend nähert man sich  $A$  asymptotisch. Damit ist bewiesen, dass für die Nichtschneidende (mit Ausnahme etc.) stets  $q > p$  ist.

## C. Die Parallele.

Nimmt man irgend ein  $AD$  als  $p$ ; construirt das zugehörige  $r$ , und schlägt damit um  $B$  den Kreis, so giebt es nach dem schon wiederholt angeführten Sehnensatz *einen* Radius  $BP$ , für welchen  $q = p$  ist. Da nun  $BP$  weder schneidender noch nichtschneidender Strahl ist, so ist es der Parallelstrahl, und dieser hat die Eigenschaft  $q = p$  überall.

Für die Construction ist zu bemerken, dass die Abstandslinie durch  $D$  für Axe  $AB$  den Kreis ausser in  $P$  noch in  $P_1$  schneiden muss, und  $P_1B$  die zweite durch  $B$  gehende Parallele zur Geraden  $AD$  ist. Gleichzeitig ist damit auch die Aufgabe gelöst, an einen Kreis die Tangente zu ziehen, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. Ich füge noch eine für alle Geometrien gültige Lösung der Aufgabe zu: Von einem gegebenen Punkt  $A$  an den Kreis  $M$  ( $M$  Mittelpunkt des Kreises) die Tangente zu ziehen. Die Lösung beruht auf der Betrachtung der Tangente  $AB$  als Symmetrieaxe für  $M$  und seinen Gegenpunkt  $M_1$ . Man schlägt um  $A$  mit  $AM$  und um  $M$  mit dem Durchmesser die Kreise, welche sich in  $M_1$  und  $M_2$  schneiden; zieht  $MM_1$  bez.  $MM_2$ , welcher den gegebenen Kreis in  $B$  bezw.  $B_1$  schneidet, so sind  $AB$  und  $AB_1$  die Tangenten. Auch hier ergibt sich als Bedingung  $AM > r$ .

Beweis des Hilfssatzes sub  $B$ . Figur 3.

Fällt man von  $F$  auf  $AD$  das Loth  $FG$ , so ist  $UFG > USD$ ,  $BFU > BSU$ , folglich  $BFG > BSD$ , also ein stumpfer Winkel. ( $BS_1I$  auch noch stumpf.) Die Winkel zwischen Radius und Loth nehmen (von zwei Rechten bis 0) fortgesetzt ab; denn  $BFU > BS_1U_1$ .

(Satz von der Sehne. Es ist leicht zu zeigen, dass, wenn die Sehnen vom Centrum abrücken, die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke aus Sehne und Radien fortwährend zunehmen.)  $UFG > U_1S_1I$ , weil das Viereck  $UFGA < U_1S_1IA$  ist; also  $BFG > BS_1I$ . Ist  $BH$  senkrecht  $AB$  und  $HK$  das von  $H$  gefällte Loth, so ist  $BHK$  ein spitzer Winkel. Es muss also zwischen  $F$  ( $S_1$ ) und  $H$  ein Punkt  $C_1$  liegen, sodass  $BC$  und das von  $C_1$  auf  $AD$  gefällte Loth  $C_1D_1$  einen rechten Winkel einschliessen.

Man hätte den Satz auch aus Continuitätsgründen direct annehmen können; denn indem  $D$  von  $A$  abrückt, werden die Lothe von  $B$  auf  $DC$  fortgesetzt und stetig grösser und wachsen von 0 bis  $\infty$ , also muss auch einmal  $BF$  darunter sein.