Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie.

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *Max Simon* in Strassburg i. Els.)

Die Construction des Parallelstrahls durch einen gegebenen Punkt zu einem gegebenen Strahle ist von *Bolyai* und *Lobatschewsky* trigonometrisch abgeleitet worden. Sei AZ der gegebene Strahl (Figur 1), B der gegebene Punkt, AB senkrecht auf AZ. Man nehme irgend einen Punkt D auf AZ, errichte in D auf AZ das Loth DC und *fälle* von B auf DC das Loth BC. Wird der Parallelwinkel mit z bezeichnet, AD mit p, BC mit r, so gilt der Satz, dass in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse r und dessen eine Kathete p ist, der p gegenüber liegende spitze Winkel gleich z ist. Herr *Frischauf* hat in seinen „Elementen der absoluten Geometrie" (Teubner 1876) bei der Construction in § 67 *irrthümlicher Weise* das Loth in B *errichtet* *). Im Folgenden wird die Construction ganz elementar planimetrisch abgeleitet.

Sei BW senkrecht AB; BR irgend ein Strahl innerhalb ABW; man schlage um B mit BC einen Kreis, welcher BR in X treffen möge, fälle von X auf AB das Loth XU und bezeichne XU mit q.

Es gilt alsdann folgender Hauptsatz:

Ist $q < p$, so muss für alle Punkte des Strahles AZ zwischen A und D, mit Ausnahme derer in unendlicher Nähe von A, ebenfalls $q < p$ sein. Ist dagegen $q > p$ für D, so ist $q > p$ für alle Punkte zwischen D und Z.

Beweis. *a.*) Da nach Voraussetzung $UX < AD$, so fällt, wenn ich UX auf AD von A aus abtrage, X zwischen A und D nach D_1. Man errichte in D_1 die Senkrechte, welche BR in S_1 schneidet; fälle von B auf D_1S_1 das Loth BC_1 ($BC_1 < BC$), trage BC_1 auf BR ab bis X_1 (X_1 zwischen B und X), so ist $X_1U_1 < XU$, also $X_1U_1 < AD_1$. Für AD_1 gleich p_1 gilt also

---

*) Dasselbe Versehen findet sich in der *„Absoluten Geometrie nach J. Bolyai bearbeitet"*.

$q_1 < p_1$, *und für alle Punkte zwischen D_1 und D gilt dasselbe,* da die Schnittpunkte der betreffenden Kreise zwischen X_1 und X fallen. Ebenso leitet man aus D_1 bezw. X_1 und S_1 ein D_2, X_2, S_2 zwischen A und D_1 ab (B und S_1), und so fort. Da die von B gefällten Lothe sich für endliche Entfernungen der Fusspunkte auch endlich unterscheiden, so nähern sich die D auf diese Weise *asymptotisch* dem Punkte A (bezw. die S den B).

b.) $XU > AD$. Man trage XU auf AD von A aus ab, gewinne D_1 hinter D und S_1 hinter S, X_1 hinter X, da $BC_1 > BC$ ist; und $X_1 U_1 > XU > AD_1$ etc.

Anwendung des Hauptsatzes.

A. Schneidende. — Figur 2. —

Sei BS ein AZ in S schneidender Strahl, so ist, wenn D mit S zusammenfällt, in S jedenfalls $q < p$, also für alle Punkte zwischen A und S (B und S) mit Ausnahme der A unendlich nahen $q_\nu < p_\nu$. Sei jetzt D_1 hinter S, so ist entweder $BC_1 > BS$ oder nicht. Im letzteren Falle ist, da dann X_1 nicht über S fällt, unmittelbar klar, dass $q_1 < p_1$. Im ersteren Fall fällt X_1 jenseits S und der Kreis um B mit BC_1 muss AD_1 zwischen A und D schneiden ($BS < BC_1$; $BD_1 > BC_1$) z. B. in F_1; dann ist $X_1 U_1 < F_1 A$ (von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die grössere), also erst recht $q_1 < p_1$. Für die Schneidende ist daher (mit der schon öfter erwähnten Ausnahme) stets $q < p$.

B. Nichtschneidende. — Figur 3. —

Sei BS Nichtschneidende, SD der Hauptabstand; dann ist für das zu S, welches mit C zusammenfällt, gehörige D eo ipso klar, dass $q > p$. Folglich gilt für alle rechts von S gelegenen Punkte das Gleiche. (Was man auch durch den schon angeführten Sehnensatz direct beweisen kann.) Ich trage jetzt AD auf SU von U aus ab bis F, ziehe BF und schlage um B mit BF den Kreis, welcher BS zwischen B und S in S_1 trifft. Alsdann liegt zwischen F (sogar zwischen S_1) und H — wenn BH senkrecht AB — auf dem Kreise ein Punkt C_1, so dass die Tangente in C_1 auf AD senkrecht steht. (Beweis dieses Hülfssatzes folgt.) Diese Tangente schneidet AD in D_1 zwischen A und D, weil $BF < BS$ ist, und es ist für BC_1 als r_1 und AD_1 als p_1 jedenfalls q_1, weil $> FU$, auch $> AD_1$ oder p_1; folglich gilt für alle Punkte zwischen D_1 und D dasselbe. So fortfahrend nähert man sich A asymptotisch. Damit ist bewiesen, dass für die Nichtschneidende (mit Ausnahme etc.) stets $q > p$ ist.

C. Die Parallele.

Nimmt man irgend ein AD als p; construirt das zugehörige r, und schlägt damit um B den Kreis, so giebt es nach dem schon wiederholt angeführten Sehnensatz *einen* Radius BP, für welchen $q = p$ ist. Da nun BP weder schneidender noch nichtschneidender Strahl ist, so ist es der Parallelstrahl, und dieser hat die Eigenschaft $q = p$ überall.

Für die Construction ist zu bemerken, dass die Abstandslinie durch D für Axe AB den Kreis ausser in P noch in P_1 schneiden muss, und P_1B die zweite durch B gehende Parallele zur Geraden AD ist. Gleichzeitig ist damit auch die Aufgabe gelöst, an einen Kreis die Tangente zu ziehen, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. Ich füge noch eine für alle Geometrieen gültige Lösung der Aufgabe zu: Von einem gegebenen Punkt A an den Kreis M (M Mittelpunkt des Kreises) die Tangente zu ziehen. Die Lösung beruht auf der Betrachtung der Tangente AB als Symmetrieaxe für M und seinen Gegenpunkt M_1. Man schlägt um A mit AM und um M mit dem Durchmesser die Kreise, welche sich in M_1 und M_2 schneiden; zieht MM_1 bez. MM_2, welcher den gegebenen Kreis in B bezw. B_1 schneidet, so sind AB und AB_1 die Tangenten. Auch hier ergiebt sich als Bedingung $AM > r$.

Beweis des Hülfssatzes sub *B.* Figur 3.

Fällt man von F auf AD das Loth FG, so ist $UFG > USD$, $BFU > BSU$, folglich $BFG > BSD$, also ein stumpfer Winkel. (BS_1I auch noch stumpf.) Die Winkel zwischen Radius und Loth nehmen (von zwei Rechten bis 0) fortgesetzt ab; denn $BFU > BS_1U_1$.

(Satz von der Sehne. Es ist leicht zu zeigen, dass, wenn die Sehnen vom Centrum abrücken, die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke aus Sehne und Radien fortwährend zunehmen.) $UFG > U_1S_1I$, weil das Viereck $UFGA < U_1S_1IA$ ist; also $BFG > BS_1I$. Ist BH senkrecht AB und HK das von H gefällte Loth, so ist BHK ein spitzer Winkel. Es muss also zwischen F (S_1) und H *ein* Punkt C_1 liegen, sodass BC und das von C_1 auf AD gefällte Loth C_1D_1 einen rechten Winkel einschliessen.

Man hätte den Satz auch aus Continuitätsgründen direct annehmen können; denn indem D von A abrückt, werden die Lothe von B auf DC fortgesetzt und stetig grösser und wachsen von 0 bis ∞, also muss auch einmal BF darunter sein.