Zur Theorie der Kugelfunction.

(Von Herrn *J. Frischauf* in Graz.)

Der Beweis für die Convergenz der Kugelfunction-Reihe beruht auf dem Satze, dass $P_n(\cos\gamma)$ verschwindet, wenn n unendlich gross wird und dabei mit n zugleich $n\gamma$ oder, falls γ nahe gleich π ist, $n(\pi-\gamma)$ unendlich gross wird. Der von Herrn *H. Bruns* mitgetheilte Beweis dieses Satzes *) lässt sich noch bedeutend vereinfachen. Ist

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots \pm a_n,$$

wo $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ positive Zahlen bedeuten, so ist S_{2r} positiv, S_{2r+1} negativ und absolut $S_n < a_n$. Setzt man in der *Mehler*schen Formel für $J = \pi P_n(\cos\gamma)$

$$J = \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi\, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\psi^2}} = \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi\, d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\psi)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\psi)}}$$

$n+\frac{1}{2} = k$, $k\psi = \eta$, so wird

$$J = \frac{1}{k}\int_0^{k\gamma} \frac{\cos\eta\, d\eta}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{k}}} = \frac{1}{k}\int_0^{k\gamma} \frac{\cos\eta\, d\eta}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{\eta}{k}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{\eta}{k}\right)}}.$$

I. Es sei γ endlich und $\leqq \frac{\pi}{2}$. Zerlegt man J in

$$\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\frac{\pi}{2}} + \cdots$$

und bezeichnet man absolut $\frac{1}{k}\int_{r\frac{\pi}{2}}^{(r+1)\frac{\pi}{2}}$ mit J_r, so folgt

$$J = J_0 - J_1 - J_2 + J_3 + J_4 - \cdots,$$

und dabei ist, wegen der Gleichheit der Zähler $\cos\eta$ und der abnehmenden Nenner $\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{k}}$,

$$J_r < J_{r+1}.$$

*) Dieses Journal Bd. 90, S. 322—328.

Der grösste Werth von J_r ist kleiner als

$$\frac{1}{k\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{\eta_1}{k}\right)}}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{\eta}{k}\right)}},$$

wenn $\eta_2 = k\gamma$, $\eta_2-\eta_1 = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, welcher Ausdruck für grosse Werthe von k übergeht in

$$\frac{1}{k\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(\gamma+\frac{\eta_1}{k}\right)}}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{\eta}{k}\right)}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{4k}\right)}},$$

also Null wird, wenn k unendlich gross wird. Dasselbe gilt daher auch von $\pi P_n(\cos\gamma)$, dessen Werth absolut kleiner ist als das Doppelte des grössten Werthes von J_r.

Dieselben Schlüsse gelten noch, wenn mit n unendlich gross, γ unendlich klein wird, dabei $n\gamma$ (also auch $k\gamma = \vartheta$) unendlich gross wird. In diesem Falle kann

$$\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{4k}\right) = \gamma-\frac{\pi}{4k}$$

gesetzt werden, der grösste Werth von J_r ist kleiner als

$$2\sqrt{\frac{\pi}{\vartheta-\frac{\pi}{4}}},$$

also unendlich klein, wenn ϑ unendlich gross ist.

II. Der Fall $\gamma > \frac{\pi}{2}$ wird vermittelst der Formel

$$P_n(\cos\gamma) = (-1)^n P_n(\cos(\pi-\gamma))$$

auf den vorigen zurückgeführt.

M. Simon, elementare Parallelenconstruction
in der absoluten Geometrie.

Fig. 1.

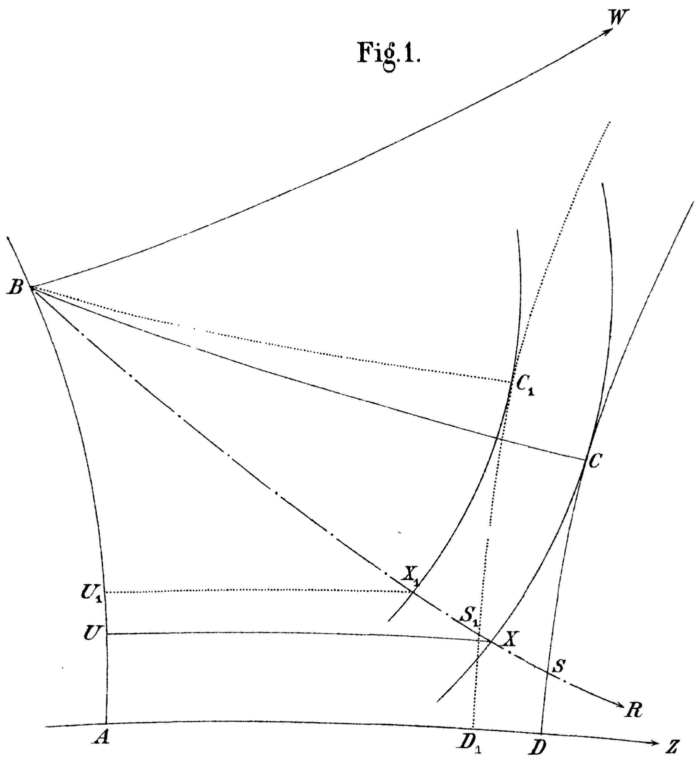


Fig. 2.

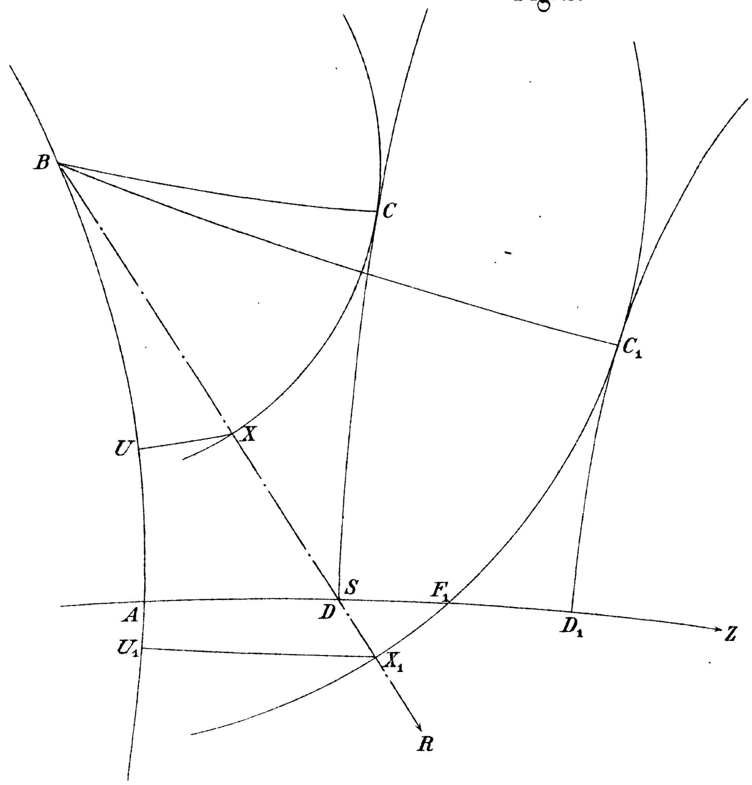
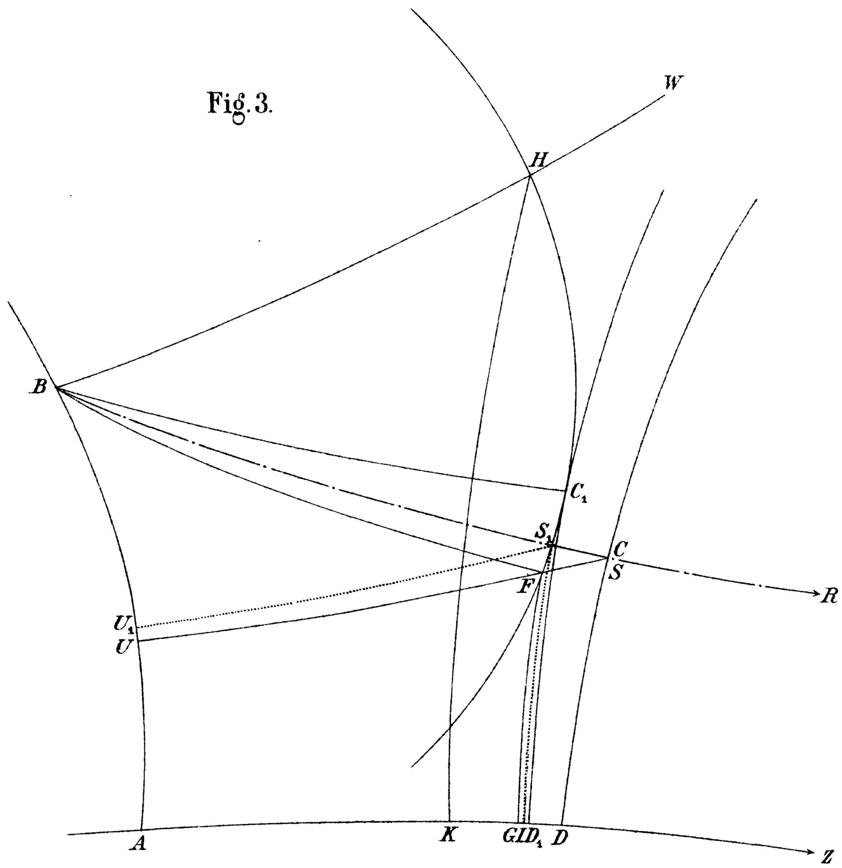


Fig. 3.



Lith. Anst. v. L. Kraatz, Berlin.