

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1891

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0107

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0009

LOG Titel: Zur Theorie der Kugelfunction.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Theorie der Kugelfunction.

(Von Herrn *J. Frischauf* in Graz.)

Der Beweis für die Convergenz der Kugelfunction-Reihe beruht auf dem Satze, dass $P_n(\cos\gamma)$ verschwindet, wenn n unendlich gross wird und dabei mit n zugleich $n\gamma$ oder, falls γ nahe gleich π ist, $n(\pi-\gamma)$ unendlich gross wird. Der von Herrn *H. Bruns* mitgetheilte Beweis dieses Satzes *) lässt sich noch bedeutend vereinfachen. Ist

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n,$$

wo $a_0 < a_1 < a_2 \dots$ positive Zahlen bedeuten, so ist S_{2r} positiv, S_{2r+1} negativ und absolut $S_n < a_n$. Setzt man in der *Meklerschen* Formel für $J = \pi P_n(\cos\gamma)$

$$J = \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\psi^2}} = \int_0^\gamma \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi d\psi}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \psi)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \psi)}}$$

$n + \frac{1}{2} = k$, $k\psi = \eta$, so wird

$$J = \frac{1}{k} \int_0^{k\gamma} \frac{\cos\eta d\eta}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{k}}} = \frac{1}{k} \int_0^{k\gamma} \frac{\cos\eta d\eta}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\gamma + \frac{\eta}{k})\sin\frac{1}{2}(\gamma - \frac{\eta}{k})}}.$$

I. Es sei γ endlich und $\leq \frac{\pi}{2}$. Zerlegt man J in

$$\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\frac{\pi}{2}} + \dots$$

und bezeichnet man absolut $\frac{1}{k} \int_r^{(r+1)\frac{\pi}{2}}$ mit J_r , so folgt

$$J = J_0 - J_1 - J_2 + J_3 + J_4 - \dots,$$

und dabei ist, wegen der Gleichheit der Zähler $\cos\eta$ und der abnehmenden Nenner $\sqrt{\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{k}}$,

$$J_r < J_{r+1}.$$

*) Dieses Journal Bd. 90, S. 322—328.

Der grösste Werth von J_r ist kleiner als

$$\frac{1}{k \sqrt{\sin \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{\eta_1}{k} \right)}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{\eta}{k} \right)}},$$

wenn $\eta_2 = k\gamma$, $\eta_2 - \eta_1 = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, welcher Ausdruck für grosse Werthe von k übergeht in

$$\frac{1}{k \sqrt{\sin \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{\eta_1}{k} \right)}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{\eta}{k} \right)}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{k \sin \left(\gamma - \frac{\pi}{4k} \right)}},$$

also Null wird, wenn k unendlich gross wird. Dasselbe gilt daher auch von $\pi P_n(\cos \gamma)$, dessen Werth absolut kleiner ist als das Doppelte des grössten Werthes von J_r .

Dieselben Schlüsse gelten noch, wenn mit n unendlich gross, γ unendlich klein wird, dabei $n\gamma$ (also auch $k\gamma = \vartheta$) unendlich gross wird. In diesem Falle kann

$$\sin \left(\gamma - \frac{\pi}{4k} \right) = \gamma - \frac{\pi}{4k}$$

gesetzt werden, der grösste Werth von J_r ist kleiner als

$$2 \sqrt{\frac{\pi}{\vartheta - \frac{\pi}{4}}},$$

also unendlich klein, wenn ϑ unendlich gross ist.

II. Der Fall $\gamma > \frac{\pi}{2}$ wird mittelst der Formel

$$P_n(\cos \gamma) = (-1)^n P_n(\cos(\pi - \gamma))$$

auf den vorigen zurückgeführt.

