Zur Definition des Systems der 4^ϱ geraden und ungeraden Thetafunctionen.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

---

§ 1.

Es giebt zwei Arten, Functionen zu definiren: entweder man giebt ihren analytischen Ausdruck, oder man stellt Bedingungen, denen sie genügen sollen. Bei der Untersuchung der Thetafunctionen von mehreren Variabeln, $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)_m$, geht man in der Regel aus von der sehr charakteristischen Darstellungsform durch die Exponentialreihen. Nun giebt es aber für eine und dieselbe Function unendlich viele Darstellungen durch ganz verschiedene Thetareihen, und wenn man sich für eine derselben entscheidet, wird zugleich eine Periodengruppe bevorzugt. Man kann deshalb fragen: Giebt es Eigenschaften der Thetareihen, auch ausser den allgemeinen Sätzen über ihr periodisches Verhalten, die sich aussprechen lassen ohne Beziehung auf eine bestimmte Periodengruppe? Solche Eigenschaften existiren wirklich; wir betrachten sie als wesentliche, so zufällig und unwichtig sie auch auf den ersten Anblick erscheinen mögen, und wir werden sie benutzen, um eine von jeder Darstellungsform unabhängige Definition des Systems der Θ_m aufzustellen. Freilich liegt es in der Natur der Sache, dass wir auf diese Weise die einzelnen Theta nicht vollständig charakterisiren können; es bleibt eine gewisse Willkür übrig. Aber es ist schon ein Fortschritt, wenn man die wesentlichen, das heisst invarianten Voraussetzungen von den unwesentlichen trennt.

Die Haupteigenschaft der Thetafunctionen besteht in ihrem periodischen Verhalten und darin, dass sie transcendente ganze Functionen von $u_1, \dots u_\varrho$ sind. Zur Aufstellung der Additionstheoreme muss aber ausserdem eine Formel gegeben sein, welche aussagt, wie die einzelnen Theta in einander übergehen, wenn man die Argumente um irgend welche halben Perioden vermehrt. Die Additionstheoreme lassen sich auffassen als algebraische Gleichungen zwischen *Abel*schen Functionen von dieser Form:

$$\Phi = \frac{\Theta(u_1+a_1\ldots)_{rL}\,\Theta(u_1+b_1\ldots)_{rM}}{\Theta(u_1\ldots)_r\,\Theta(u_1+a_1+b_1\ldots)_{rLM}}.$$

Es handelt sich also mehr darum zu bestimmen, welche Aenderung ein solcher Ausdruck erfährt, als um die Aenderungen der einzelnen Theta im Zähler und Nenner von Φ. Da es hierbei auf die Werthe der Constanten $a_1, \ldots a_\varrho, b_1, \ldots b_\varrho$ nicht ankommt, so können wir sie gleich Null setzen.

Ich hatte die eben erwähnte Aufgabe in einer früheren Arbeit behandelt *), ich komme darauf zurück, um das dort gewonnene Resultat in einer etwas anderen Form auszusprechen.

Es sei Θ_m irgend eine der 4^ϱ Thetafunctionen, $2\bar\omega_1, \ldots 2\bar\omega_\varrho$ eine beliebige Periode, und $2\bar\eta_1, \ldots 2\bar\eta_\varrho$ die zugehörige Periode zweiter Gattung. Dann ist:

$$\Theta(u_1+2\bar\omega_1\ldots)_m = \pm e^{2\bar\eta_1(u_1+\bar\omega_1)+\cdots}\,\Theta(u_1\ldots)_m.$$

Wenn man aber die Argumente nur um die halbe Periode zunehmen lässt, so erhält man:

$$\Theta(u_1+\bar\omega_1\ldots)_m = i^h e^{\bar\eta_1(u_1+\frac{1}{2}\bar\omega_1)+\cdots}\,\Theta(u_1\ldots)_{mK},$$

wobei K den Index der betrachteten halben Periode bedeutet, und h eine ganze Zahl, deren Werth von dem Index m, aber auch von der halben Periode K abhängt **). Hieraus folgt: Wenn man in einem Quotienten zweier Thetafunctionen

$$\frac{\Theta(u_1\ldots)_m}{\Theta(u_1\ldots)_n}$$

die Argumente um eine halbe Periode vermehrt, so geht derselbe wieder in einen Theta-Quotienten über, multiplicirt mit einer vierten Wurzel der Einheit. Man kann dies auch so aussprechen:

I. Der Quotient zweier vierten Potenzen von Thetafunctionen:

$$\Phi(u_1\ldots) = \frac{\Theta_m^4}{\Theta_n^4}$$

geht durch Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode stets wieder

---

*) Zur Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Variabeln, § 2. Dieses Journal Bd. 102.

**) Die genauere Ausführung dieser *Weierstrass*ischen Formeln findet man in den ersten Paragraphen meiner Schrift: Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig, 1880.

in einen Ausdruck derselben Form über:

$$\Phi(u_1+\varpi_1\ldots) = \frac{\Theta^4_{mK}}{\Theta^4_{nK}},$$

ohne dass ein constanter Factor, oder auch nur ein negatives Vorzeichen hinzutritt.

Es sei nun:

$$P_a = \Theta_a \Theta_{aL}, \quad P_b = \Theta_b \Theta_{bL}.$$

Solche Ausdrücke nannten wir Producte erster Stufe, und L oder $(0, L)$ ihre Basis. Der Quotient beider P ist eine *Abel*sche Function. Aendert man in dieser die Argumente um die halbe Periode K, so geht:

$$(1.) \qquad \frac{P_a}{P_b} \quad \text{in} \quad \pm\frac{P_{aK}}{P_{bK}}$$

über *). Hieraus folgt:

II. Die Quotienten der Quadrate von zusammengehörigen Functionen erster Stufe permutiren sich unter einander, wenn man $u_1, \ldots u_\varrho$ um irgend welche halben Perioden vermehrt. Ist

$$\Phi(u_1\ldots) = \frac{P_a^2}{P_b^2} = \frac{\Theta_a^2\Theta_{aL}^2}{\Theta_b^2\Theta_{bL}^2},$$

so ist

$$\Phi(u_1+\varpi_1\ldots) = \frac{\Theta_{aK}^2\Theta_{aKL}^2}{\Theta_{bK}^2\Theta_{bKL}^2}.$$

In diesem Satz ist der vorangehende zugleich enthalten, wenn wir den Fall $L = 0$ nicht ausschliessen.

Das Vorzeichen in der Gleichung (1.) hatten wir durch das Symbol $(K|ab)$ oder, insofern es noch von L abhängig ist, durch (K, ab, abL) dargestellt. Hieraus folgt, dass es ungeändert bleibt, wenn man gleichzeitig a durch aM, b durch bM ersetzt. Also geht gleichzeitig

$$(2.) \qquad \frac{P_{aM}}{P_{bM}} \quad \text{in} \quad \pm\frac{P_{aKM}}{P_{bKM}}$$

über; M ist ein beliebiger Perioden-Index, das Vorzeichen ist dasselbe wie in Gleichung (1.). Folglich geht:

$$\frac{P_a}{P_b}\cdot\frac{P_{aM}}{P_{bM}} \quad \text{in} \quad \frac{P_{aK}}{P_{bK}}\cdot\frac{P_{aKM}}{P_{bKM}}$$

über. Nun sind aber

$$P_a P_{aM} = \Theta_a \Theta_{aL} \Theta_{aM} \Theta_{aLM} = Q_a,$$
$$P_b P_{bM} = Q_b$$

*) S. Bd. 102, S. 313.

Producte zweiter Stufe mit der Basis L, M oder: $(0, L, M, LM)$. Wir haben also den Satz, der wiederum die beiden früheren als specielle Fälle umfasst:

III. ***Der Quotient zweier Producte zweiter Stufe von derselben Basis wird durch Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode in einen eben solchen Quotienten übergeführt, ohne dass ein Factor hinzutritt.***

Wir sehen jetzt ganz ab von der Darstellung der Thetafunctionen. Wir setzen voraus, es sei eine Gruppe von unendlich vielen Grössenreihen

$$(A.) \qquad \begin{cases} 2\omega_1, & \ldots & 2\omega_\varrho, & 2\eta_1, & \ldots & 2\eta_\varrho, \\ 2\omega'_1, & \ldots & 2\omega'_\varrho, & 2\eta'_1, & \ldots & 2\eta'_\varrho, \\ & & \text{etc. in inf.} & & & \end{cases}$$

gegeben, die sich durch Addition und Subtraction reproduciren. Diese Gruppe sei ferner so beschaffen, dass es transcendente ganze Functionen giebt, die den Gleichungen

$$(B.) \qquad \Theta(u_1+2\omega_1\ldots) = \pm e^{2\eta_1(u_1+\omega_1)+\cdots}\Theta(u_1\ldots)$$
$$\text{etc.}$$

genügen, und die durch diese Perioden-Eigenschaften bis auf constante Factoren bestimmt sind. Wie die Gruppe $(A.)$ zu bilden ist, damit alle diese Bedingungen erfüllt sind, dies ist eine von Herrn *Frobenius* behandelte Frage *).

Es giebt dann 4^ϱ verschiedene Arten, die Vorzeichen in der Gleichungsgruppe $(B.)$ so zu bestimmen, dass sich die einzelnen Formeln nicht widersprechen; so sind die 4^ϱ Functionen Θ_m definirt, jede bis auf einen constanten Factor.

Die constanten Factoren denken wir uns nun so gewählt, dass der Satz III., *und somit auch* I. *und* II., *besteht.*

Es sind dann folgende Fragen zu erörtern:

Erstens: Welche Folgerungen lassen sich aus dieser Voraussetzung ziehen?

Zweitens: In wie weit werden durch sie die constanten Factoren der Theta bestimmt oder beschränkt?

Drittens: Welche Vortheile kann man aus der grösseren Freiheit in der Definition der Theta für die Aufstellung der Theta-Relationen ziehen?

Unsere Voraussetzung können wir auch so fassen. Es seien $K, L,$

---

*) *Frobenius*, Grundlage einer Theorie der *Jacobi*schen Functionen. Dieses Journal Bd. 97.

M, N irgend welche Perioden-Indices, ferner:

$$\frac{\Theta_{aL}\Theta_{aM}\Theta_{aN}\Theta_{aLMN}}{\Theta_a\Theta_{aLM}\Theta_{aLN}\Theta_{aMN}} = \varphi,$$

$$\frac{\Theta_{aKL}\Theta_{aKM}\Theta_{aKN}\Theta_{aKLMN}}{\Theta_{aK}\Theta_{aKLM}\Theta_{aKLN}\Theta_{aKMN}} = \psi,$$

und $\overset{K}{\omega}_1$, $\overset{K}{\omega}_2$ etc. eine zum Index *K* gehörige halbe Periode. Dann muss stets

$$\varphi(u_1+\overset{K}{\omega}_1\dots) = \psi(u_1\dots)$$

sein. Denn offenbar ist φ der Quotient von zwei Theta-Producten zweiter Stufe, die zu derselben Basis (0, *LM, LN, MN*) gehören.

§ 2.

Wir setzen für den Augenblick

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Theta_{aL}\Theta_{aM}}{\Theta_a\Theta_{aLM}} = f, \\[2ex] \dfrac{\Theta_{aKL}\Theta_{aKM}}{\Theta_{aK}\Theta_{aKLM}} = g. \end{cases}$$

Es sei ferner $\overset{K}{\omega}_1$, $\overset{K}{\omega}_2$, ... eine zum Index *K* gehörige halbe Periode. Dann folgt aus unserer im vorigen Paragraphen gestellten Voraussetzung, dass durch diese halbe Periode f^2 in g^2 übergeführt wird. Es ist also:

$$(2.)\qquad f(u_1+\overset{K}{\omega}_1\dots) = \delta g(u_1\dots),$$

wo $\delta = \pm 1$ ist. Wir betrachten jetzt dieses Vorzeichen δ genauer. Da f eine *Abel*sche Function ist, so bleibt die Gleichung (2.) richtig, wenn man die halbe Periode: $\overset{K}{\omega}_1\dots$ durch irgend eine congruente ersetzt. Der Werth des Vorzeichens δ kann also nur abhängen von den Indices *a, K, L, M.* Der Index *a* kommt aber nicht in Betracht. Denn ersetzen wir ihn durch irgend einen anderen Index *b* und bezeichnen die Functionen, in welche dadurch *f, g* übergehen, mit *F, G*:

$$F = \frac{\Theta_{bL}\Theta_{bM}}{\Theta_b\Theta_{bLM}}, \quad \text{etc.},$$

so ist fF der Quotient zweier Producte zweiter Stufe. Dieser wird, unserer Annahme zufolge, durch die halbe Periode *K* direct in $+gG$ übergeführt. Geht also f in δg, so geht gleichzeitig F in δG über. Mithin hat das Vorzeichen δ keine Aenderung erfahren, indem wir *a* durch *b* ersetzten. Wir können deshalb setzen:

$$(3.)\qquad \delta = (K,\ L,\ M).$$

In Bezug auf L und M ist das Vorzeichen (K, L, M) sicher symmetrisch. Aber es lässt sich auch leicht beweisen, dass

$$(K,\ L,\ M) = (L,\ K,\ M)$$

ist. Denn halten wir den Index M fest, betrachten also nur a, K und L als variabel, und setzen:

$$(4.)\qquad \frac{\Theta_{aM}}{\Theta_a} = \chi_a,$$

so wird:

$$(5.)\qquad f = \frac{\chi_a}{\chi_{aL}},\qquad g = \frac{\chi_{aK}}{\chi_{aKL}}.$$

Nun wählen wir zwei halbe Perioden aus, die zu den Indices K und L gehören; dann ist:

$$(6.)\qquad \chi_a(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots) = c\chi_{aK}(u_1\ldots),$$

$$(7.)\qquad \chi_a(u_1+\overset{L}{\omega_1}\ldots) = c'\chi_{aL}(u_1\ldots),$$

$$(8.)\qquad \chi_a(u_1+\overset{K}{\omega_1}+\overset{L}{\omega_1}\ldots) = c''\chi_{aKL}(u_1\ldots),$$

wo c, c', c'' vierte Wurzeln der Einheit bedeuten. Aus (7.) und (8.) folgt:

$$\chi_{aL}(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots) = \frac{c''}{c'}\chi_{aKL}(u_1\ldots),$$

und, wenn man diese Gleichung in (6.) dividirt:

$$(9.)\qquad \frac{\chi_a(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots)}{\chi_{aL}(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots)} = \frac{cc'}{c''}\frac{\chi_{aK}}{\chi_{aKL}}.$$

Ganz ebenso aber findet man:

$$(10.)\qquad \frac{\chi_a(u_1+\overset{L}{\omega_1}\ldots)}{\chi_{aK}(u_1+\overset{L}{\omega_1}\ldots)} = \frac{c'c}{c''}\frac{\chi_{aL}}{\chi_{aKL}}.$$

Es tritt also genau derselbe constante Factor

$$\frac{cc'}{c''} = \delta$$

heraus, gleichviel ob man in der *Abel*schen Function

$$f = \frac{\chi_a}{\chi_{aL}}$$

die Argumente um die halbe Periode K, oder in

$$\frac{\chi_a}{\chi_{aK}}$$

um die halbe Periode L vermehrt. Das heisst, es ist:

$$(\text{I.}) \qquad (K,\ L,\ M) = (L,\ K,\ M).$$

Damit ist die erste Grundeigenschaft des Zeichens (K, L, M) bewiesen: es bleibt ungeändert, wenn man die drei Indices, von denen es abhängt, beliebig unter einander vertauscht.

Durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode K wird gleichzeitig:

$$(11.) \qquad \frac{\Theta_{aL}\Theta_{aM}}{\Theta_a\Theta_{aLM}} \quad \text{in} \quad (K,\ L,\ M)\frac{\Theta_{aKL}\Theta_{aKM}}{\Theta_{aK}\Theta_{aKLM}}$$

und

$$(12.) \qquad \frac{\Theta_{bL}\Theta_{bN}}{\Theta_b\Theta_{bLN}} \quad \text{in} \quad (K,\ L,\ N)\frac{\Theta_{bKL}\Theta_{bKN}}{\Theta_{bK}\Theta_{bKLN}}$$

übergeführt. In dieser letzten Formel setzen wir $b = aM$ und multipliciren sie dann mit der vorhergehenden. Dann folgt, dass durch dieselbe halbe Periode K:

$$(13.) \qquad \frac{\Theta_{aL}\Theta_{aMN}}{\Theta_a\Theta_{aLMN}} \quad \text{in} \quad (K,\ L,\ M)(K,\ L,\ N)\frac{\Theta_{aKL}\Theta_{aKMN}}{\Theta_{aK}\Theta_{aKLMN}}$$

übergeht. Hieraus ziehen wir den Schluss:

$$(\text{II.}) \qquad (K,\ L,\ M)(K,\ L,\ N) = (K,\ L,\ MN).$$

Dies ist die zweite Grundeigenschaft des Zeichens. Endlich ergiebt sich noch Folgendes. Es sei wieder

$$\frac{\Theta_{aM}}{\Theta_a} = \chi_a,$$

wobei wir M als fest betrachten. Ersetzen wir in dieser Formel a durch aLM, so folgt:

$$\frac{\Theta_{aL}}{\Theta_{aLM}} = \chi_{aLM},$$

mithin:

$$f = \frac{\Theta_{aL}\Theta_{aM}}{\Theta_a\Theta_{aLM}} = \chi_a\chi_{aLM}.$$

Nun wählen wir eine halbe Periode, die zum Index LM gehört. Dann ist:

$$(14.) \qquad \chi_a(u_1+\overset{LM}{\omega_1}\ldots) = c\chi_{aLM}(u_1\ldots),$$

wo c constant ist. Hieraus folgt:

$$(15.) \qquad \chi_a(-u_1\ldots) = c\chi_{aLM}(-u_1-\overset{LM}{\omega_1}\ldots).$$

Nun sei:

$$(16.) \qquad \begin{cases} \chi_a(-u_1\ldots) = \alpha\chi_a(u_1\ldots), \\ \chi_{aLM}(-u_1\ldots) = \beta\chi_{aLM}(u_1\ldots). \end{cases}$$

Das Product der beiden Vorzeichen α, β ist $+1$ oder -1, je nachdem die Function f gerade oder ungerade ist, oder, was dasselbe ist, je nachdem L, M ein syzygetisches oder azygetisches Periodenpaar ist. Aus (12.) und (13.) ergiebt sich jetzt:

$$\chi_{aLM}(u_1+\overset{LM}{\omega_1}\ldots) = \frac{\alpha\beta}{c}\chi_a(u_1\ldots),$$

und, wenn man diese Gleichung mit (11.) multiplicirt:

$$(17.)\qquad f(u_1+\overset{LM}{\omega_1}\ldots) = \alpha\beta f(u_1\ldots).$$

Demnach muss $\alpha\beta$ mit (LM, L, M) identisch sein. Es ist also:

$$(\text{III.})\qquad (LM, L, M) = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem L, M syzygetische oder azygetische Indices sind.

Durch diese drei Sätze ist der Werth des Zeichens (K, L, M) zwar nicht vollständig bestimmt; aber soweit er nicht bestimmt ist, können wir willkürlich darüber verfügen.

§ 3.

Um deutlich zu erkennen, dass wir dazu berechtigt sind, wenden wir uns jetzt zu der zweiten Frage. Wir sondern von jedem Theta einen constanten Factor ab:

$$(1.)\qquad \Theta_m = l_m\overline{\Theta}_m;$$

wie muss das System der 4^ϱ Constanten l_m beschaffen sein, damit durch diese Aenderung in der Definition der Theta die Voraussetzung, die wir in § 1 gestellt haben, nicht zerstört wird?

Betrachten wir die beiden Quotienten, die wir am Schluss von § 1 mit φ und ψ bezeichnet haben. Die Ausdrücke, welche hieraus hervorgehen, wenn man jedes Theta durch das überstrichene ersetzt, seien $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$. Es unterscheidet sich dann φ von $\overline{\varphi}$ um den constanten Factor

$$(2.)\qquad \frac{l_{aL}l_{aM}l_{aN}l_{aLMN}}{l_a l_{aLM}l_{aLN}l_{aMN}}$$

und ψ von $\overline{\psi}$ um

$$(3.)\qquad \frac{l_{aKL}l_{aKM}l_{aKN}l_{aKLMN}}{l_{aK}l_{aKLM}l_{aKLN}l_{aKMN}}.$$

Der Voraussetzung nach aber soll:

$$\varphi(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots) = \psi(u_1\ldots),$$
$$\overline{\varphi}(u_1+\overset{K}{\omega_1}\ldots) = \overline{\psi}(u_1\ldots)$$

sein. Folglich sind die Ausdrücke (2.) und (3.) einander gleich; daher:

$$(4.)\qquad \frac{l_{aK}l_{aL}l_{aM}l_{aN}l_{aKLM}l_{aKLN}l_{aKMN}l_{aLMN}}{l_a l_{aKL}l_{aKM}l_{aKN}l_{aLM}l_{aLN}l_{aMN}l_{aKLMN}} = 1.$$

Dies muss gelten für beliebige Indices a, K, L, M, N, also auch, wenn wir mehrere dieser halben Perioden zusammenfallen lassen. Setzen wir $N = M$, so geht die Formel über in:

$$(5.)\qquad \left(\frac{l_{aK}l_{aL}l_{aM}l_{aKLM}}{l_a l_{aKL}l_{aKM}l_{aLM}}\right)^2 = 1.$$

Nehmen wir hier noch $M = L$ an, so folgt:

$$(6.)\qquad \left(\frac{l_{aK}l_{aL}}{l_a l_{aKL}}\right)^4 = 1;$$

endlich, für $L = K$:

$$(7.)\qquad \left(\frac{l_{aK}}{l_a}\right)^8 = 1.$$

Die letzte Formel zeigt, dass der Quotient je zweier Grössen l eine achte Wurzel der Einheit ist, während offenbar ein l ganz unbestimmt bleibt.

Hieran knüpft sich eine bemerkenswerthe Folgerung. Denken wir uns wieder, wie anfänglich, die Thetafunctionen durch Thetareihen definirt, also jedes Theta durch einen Ausdruck

$$\Theta\left(u_1, \ldots u_\varrho; \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

wo die ϱ Zahlen $\delta_1, \ldots \delta_\varrho$ sämmtlich 0 oder -1, die $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\varrho$ 0 oder $+1$ sind. Zu dieser Darstellung gehört ein bestimmt gewähltes kanonisches System von Fundamentalperioden. Wenn wir jetzt zu einem anderen kanonischen System übergehen und die Thetareihen aufstellen, welche diesem entsprechen:

$$\overline{\Theta}\left(u_1, \ldots u_\varrho; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right),$$

so ist jede der ursprünglichen Functionen bis auf einen constanten Factor einer Function dieser zweiten Gruppe gleich. Den Index denken wir uns nicht an der Charakteristik haftend, sondern an der Function; wir schreiben demnach die Transformationsgleichungen so:

$$\Theta_m = l_m \overline{\Theta}_m.$$

Dann folgt, da ja für die Grössen $\overline{\Theta}_m$ der Satz (III.) in § 1 ebenfalls gilt:

Die constanten Factoren, welche bei der linearen Transformation der Thetareihen hervortreten, genügen der Gleichung (4.).

§ 4.

Es ist eine an sich interessante und für unsere Betrachtung nützliche Aufgabe, die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems aufzusuchen, das durch die Formel (4.) im letzten Paragraphen repräsentirt wird. Wir greifen eine der 4^ϱ Grössen heraus — sie möge etwa den Index 0 haben —, schreiben aber kürzer l für l_0, l_K für l_{0K}. Die Gleichung (4.) kann dann so dargestellt werden:

$$(1.)\qquad \frac{l_K l_L l_M l_{KLM}}{l l_{KL} l_{KM} l_{LM}} = \frac{l_{KN} l_{LN} l_{MN} l_{KLMN}}{l_N l_{KLN} l_{KMN} l_{LMN}},$$

und es ist leicht ersichtlich, dass sie nicht specieller geworden ist, indem wir über den Index a verfügt haben. Bis jetzt haben wir nicht von einer bestimmten Anordnung oder Darstellung der Indices gesprochen. Zur Lösung dieser Aufgabe aber nehmen wir 2ϱ primitive Indices an, durch deren Combinationen sich die übrigen ausdrücken lassen. Es seien $\varkappa$, λ, μ drei verschiedene von den 2ϱ primitiven Indices. Wir setzen dann:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{l_\varkappa l_\lambda l_\mu l_{\varkappa\lambda\mu}}{l l_{\varkappa\lambda} l_{\varkappa\mu} l_{\lambda\mu}} = a_{\varkappa\lambda\mu}, \\[2mm] \dfrac{l l_{\varkappa\lambda}}{l_\varkappa l_\lambda} = a_{\varkappa\lambda}, \\[2mm] \dfrac{l_\varkappa}{l} = a_\varkappa, \\[2mm] l = a. \end{cases}$$

Dann ist nach § 3:

$$(3.)\qquad \begin{cases} a^2_{\varkappa\lambda\mu} = 1, \\ a^4_{\varkappa\lambda} = 1, \\ a^8_\varkappa = 1, \end{cases}$$

während a einen ganz unbestimmten Werth hat. Durch Umkehrung folgt:

$$(4.)\qquad \begin{cases} l = a, \\ l_\varkappa = a a_\varkappa, \\ l_{\varkappa\lambda} = a a_\varkappa a_\lambda a_{\varkappa\lambda}, \\ l_{\varkappa\lambda\mu} = a a_\varkappa a_\lambda a_\mu a_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\mu} a_{\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu}. \end{cases}$$

Nimmt man endlich noch die Gleichung (1.) hinzu und setzt dort für K, L, M, N vier primitive Indices, so ergiebt sich:

$$(4'.)\qquad l_{\varkappa\lambda\mu\nu} = a a_\varkappa a_\lambda a_\mu a_\nu a_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\mu} a_{\varkappa\nu} a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} a_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\nu} a_{\varkappa\mu\nu} a_{\lambda\mu\nu}.$$

Es ist klar, dass sich durch wiederholte Anwendung der Formel (1.) jetzt überhaupt alle Grössen l_m durch die Factoren a, $a_\varkappa$, $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ausdrücken lassen. Auch das allgemeine Gesetz der Bildung von l_m ist schon hinlänglich deutlich; die Formeln (4.), (4'.) werden zusammengefasst, indem man setzt:

$$(4''.)\qquad l_m = \prod_{(\mathfrak{m})}(a_{\mathfrak{m}}),$$

wo das Product sich erstreckt über alle Combinationen $\mathfrak{m}$ bis zur dritten Ordnung, die sich aus den Elementen des Index m bilden lassen. Nimmt man diese Induction als richtig an, so haben wir hier jedenfalls die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems (1.). Wir müssen aber doch noch direct beweisen, dass ein solcher Ausdruck, allgemein für l_m gesetzt, wirklich die Gleichung befriedigt, vorausgesetzt, dass die Factoren a den Bedingungen (3.) genügen.

Wir wollen zunächst unter a, a_1, a_2, ... a_{12}, ... a_{123}, ... ganz willkürliche Grössen verstehen. Wir definiren dann l_m, für eine beliebig hohe Combination m, durch den gegebenen Product-Ausdruck (4''.), und bilden, indem wir unter K, L, M, N beliebige Combinationen verstehen, den Quotienten:

$$(5.)\qquad \chi = \frac{l_K l_L l_M l_N l_{KLM} l_{KLN} l_{KMN} l_{LMN}}{l\, l_{KL} l_{KM} l_{KN} l_{LM} l_{LN} l_{MN} l_{KLMN}}.$$

Dieser Quotient lässt sich dann auffassen als ein Product von Potenzen der Factoren a, $a_\varkappa$, $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\lambda\mu}$. Jeder solche Factor a_n wird in einer bestimmten Potenz auftreten, deren Exponent 0, positiv oder negativ sein kann. Der Factor a fällt offenbar ganz heraus, hier ist also der Exponent 0. Wir behaupten aber ausserdem: der Exponent von a_n ist durch 2 theilbar für $n = \varkappa\lambda\mu$, durch 4 für $n = \varkappa\lambda$, durch 8 für $n = \varkappa$.

Greifen wir nämlich irgend eine der Grössen a_n heraus, so wird diese in dem Product l_K dann und nur dann vorkommen, wenn die Combination n ganz in K enthalten ist; auf die übrigen Elemente von K kommt es dabei gar nicht an. Deshalb können wir, wenn wir untersuchen, welche Potenz von a_n in χ vorkommt, die Combinationen K, L etc. reduciren, indem wir alle in n nicht enthaltenen Elemente einfach fortlassen. Wir nehmen somit an, dass in K, L etc. nur solche Elemente enthalten sind, die auch in n vorkommen. Gilt die ausgesprochene Behauptung unter dieser Voraussetzung, so gilt sie auch allgemein.

Es sei z. B. $n = \varkappa\lambda$. Dann muss jeder von den Indices K, L, M, N und jede aus ihnen gebildete Combination einem dieser vier Indices

$$0,\ \varkappa,\ \lambda,\ \varkappa\lambda$$

gleich sein. Ist von den Indices, die im Zähler von χ vorkommen

$$(6.)\qquad K,\ L,\ M,\ N,\ KLM,\ KLN,\ KMN,\ LMN$$

einer 0, so ist offenbar jeder Factor des Zählers gleich einem des Nenners, also $\chi = 1$. Der Exponent von $a_{\varkappa\lambda}$ ist daher 0. Von diesem Falle können wir mithin absehen.

Es muss dann jeder in der Reihe (6.) enthaltene Index gleich $\varkappa$, λ oder $\varkappa\lambda$ sein. Folglich sind unter den ersten vier mindestens zwei gleiche. Es sei etwa $N = M$. Wären nun K, L, M verschieden, so müssten sie in irgend einer Reihenfolge mit $\varkappa$, λ, $\varkappa\lambda$ übereinstimmen. Dann wäre aber $KLM = 0$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen auch von den Indices K, L, M zwei einander gleich sein, etwa L und M. Wenn aber $N = M = L$ ist, so reducirt sich unser Ausdruck χ auf:

$$\left(\frac{l_K l_L}{l l_{KL}}\right)^4;$$

folglich kommt $a_{\varkappa\lambda}$ in einer Potenz vor, deren Exponent durch 4 theilbar ist.

Genau so wird bewiesen, dass $a_\varkappa$ in der achten Potenz, $a_{\varkappa\lambda\mu}$ im Quadrat vorkommt; es genügt also vorauszusetzen, dass $a_\varkappa$, $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\lambda\mu}$ achte, vierte, zweite Einheitswurzeln sind, damit der Ausdruck χ stets gleich 1 wird. Somit ist in den Formeln (3.) und (4.) die allgemeine Lösung des gegebenen Gleichungssystems enthalten.

§ 5.

Wir hatten ein Symbol (K, L, M) eingeführt, als das Vorzeichen, welches auftritt, wenn man durch die halbe Periode K

$$\frac{\Theta_{aL}\Theta_{aM}}{\Theta_a\Theta_{aLM}} \quad \text{in} \quad \pm\frac{\Theta_{aKL}\Theta_{aKM}}{\Theta_{aK}\Theta_{aKLM}}$$

überführt. Wenn man nun von den Thetafunctionen ein System von constanten Factoren l_m absondert, die der aufgestellten Bedingung (Formel (4.), § 3) genügen, so modificiren sich die Werthe des Zeichens, während seine wesentlichen Eigenschaften natürlich bestehen bleiben; an die Stelle von (K, L, M) tritt:

$$((K, L, M)) = (K, L, M)\frac{l_{aKL}l_{aKM}}{l_{aK}l_{aKLM}}\cdot\frac{l_a l_{aLM}}{l_{aL}l_{aM}}.$$

Nun geht aus der Formel (4.) § 3 hervor, dass dieser Ausdruck von dem Index a unabhängig ist; wir dürfen also $a = K$ setzen, und erhalten auf diese Weise einfacher:

$$(1.) \qquad ((K, L, M)) = (K, L, M)\frac{l_K l_L l_M l_{KLM}}{l l_{KL} l_{KM} l_{LM}}.$$

Auch jetzt denken wir uns wieder K, L, M als Combinationen aus 2ϱ Elementen, wofür wir die Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho$ wählen können. Wir ersetzen dann die Grössen l_K durch die aufgestellten Product-Ausdrücke.

Es seien $\varkappa, \lambda, \mu$ drei verschiedene primitive Indices. Alsdann erhalten wir aus (1.), indem wir die Formeln (2.), § 4 anwenden:

$$(2.)\quad \begin{cases} ((\varkappa, \lambda, \mu)) = (\varkappa, \lambda, \mu) a_{\varkappa\lambda\mu}, \\ ((\varkappa, \varkappa, \lambda)) = (\varkappa, \varkappa, \lambda) a^2_{\varkappa\lambda}, \\ ((\varkappa, \varkappa, \varkappa)) = (\varkappa, \varkappa, \varkappa) a^4_{\varkappa}. \end{cases}$$

Nun sind die Grössen $a_{\varkappa\lambda\mu}$, $a^2_{\varkappa\lambda}$, $a^4_{\varkappa}$ zwar beschränkt durch die Bedingung, dass ihr Quadrat gleich $+1$ sein soll, sie selbst aber sind willkürliche Vorzeichen. Wir können demnach die Vorzeichen $((\varkappa, \lambda, \mu))$, $((\varkappa, \varkappa, \varkappa))$ und ebenso je einen Factor jedes Paares $((\varkappa, \varkappa, \lambda))$, $((\lambda, \lambda, \varkappa))$ willkürlich wählen. Der Werth des Products

$$((\varkappa, \varkappa, \lambda))((\lambda, \lambda, \varkappa)) = ((\varkappa, \lambda, \varkappa\lambda))$$

ist bestimmt durch das gegenseitige Verhalten der Perioden $\varkappa, \lambda$. Sind diese primitiven Vorzeichen bestimmt, so ist damit auch allgemein der Werth von $((K, L, M))$ bekannt, für den Fall, dass K, L, M irgendwelche Combinationen sind. Daraus geht mit Evidenz hervor:

Die Werthe des Zeichens $((K, L, M))$ dürfen willkürlich angenommen werden, soweit sie nicht durch die drei Grundeigenschaften bestimmt sind.

Wir nehmen deshalb schon das ursprüngliche Symbol (K, L, M) als willkürlich fixirt an, nur so, dass es den aufgestellten drei Sätzen genügt. Auch dann sind die einzelnen Theta noch nicht vollständig bestimmt. Wir setzen

$$(3.)\qquad \Theta_a = f_a \overline{\Theta}_a$$

und suchen die constanten Factoren f_a so zu bestimmen, dass für die neuen Functionen $\overline{\Theta}$ nicht nur die in § 1 gestellte Grundbedingung besteht, sondern auch die Werthe des Zeichens (K, L, M) ungeändert bleiben. Dann müssen die Factoren f_a folgender Gleichung genügen:

$$(4.)\qquad \frac{f_{aK} f_{aL} f_{aM} f_{aKLM}}{f_a f_{aKL} f_{aKM} f_{aLM}} = 1.$$

Führt man wieder ein System primitiver Indices ein, so kann man einen Factor f ganz beliebig wählen; ferner sind

$$\frac{f_1}{f}, \quad \frac{f_2}{f}, \quad \text{etc.}$$

beliebige vierte Einheitswurzeln, und

$$\frac{ff_{12}}{f_1 f_2},\quad \frac{ff_{13}}{f_1 f_3},\quad \text{etc.}$$

beliebige Vorzeichen. Nachdem also das Symbol (K, L, M) fixirt ist, hat man noch als willkürlich zu betrachten den constanten Factor einer Function $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)$, ferner 2ϱ vierte Einheitswurzeln, mit denen Θ_1, Θ_2, ... $\Theta_{2\varrho}$ behaftet sind, endlich die Vorzeichen von Θ_{12}, Θ_{13}, Θ_{23}, etc.

Fasst man irgend eine Relation zwischen elliptischen oder *Abel*schen Thetafunctionen ins Auge, so sieht man in der That leicht, dass sie ganz unverändert bestehen bleibt, wenn man zu den einzelnen Θ_a constante Factoren f_a hinzufügt, die der Bedingung (4.) genügen. Also können die Thetarelationen kein Mittel geben, um diese Factoren zu bestimmen.

§ 6.

Ist eine bestimmte Reihe primitiver halber Perioden gewählt, und nehmen wir die ersten 2ϱ Zahlen als deren Indices an, so werden K, L, M Combinationen der Zahlen 1 bis 2ϱ. Das Symbol (K, L, M) lässt sich dann in ein dreifaches Product auflösen:

$$(1.)\qquad (K, L, M) = \prod_{\varkappa}\prod_{\lambda}\prod_{\mu}(\varkappa, \lambda, \mu)$$

erstreckt über alle Elemente $\varkappa$ von K, λ von L, μ von M. Diese Factoren $(\varkappa, \lambda, \mu)$, in denen $\varkappa$, λ, μ Zahlen der Reihe 1, 2, ... 2ϱ bedeuten, wollen wir *primitive* Vorzeichen nennen. Von diesen sind drei Arten zu unterscheiden:

$$(\varkappa, \lambda, \mu),\quad (\varkappa, \varkappa, \lambda),\quad (\varkappa, \varkappa, \varkappa),$$

je nachdem alle drei Zahlen verschieden sind, oder zwei, oder auch alle drei denselben Werth haben.

Abgesehen von der Forderung der Symmetrie:

$$(\varkappa, \mu, \lambda) = (\varkappa, \lambda, \mu),\quad \text{etc.},$$

sind nur die Vorzeichen der zweiten Art einer Bedingung unterworfen. Es muss nämlich

$$(2.)\qquad (\varkappa, \varkappa, \lambda)(\lambda, \lambda, \varkappa) = (\varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$$

sein, und dieser Werth ist durch das gegenseitige Verhalten der Perioden $\varkappa$, λ bestimmt. Es sind also zwar die Factoren der ersten und dritten Art ganz willkürlich, von den Vorzeichen der zweiten Art aber nur die Hälfte.

Wir wollen sehen, welche Vereinfachung eintritt, wenn man alle Vorzeichen der ersten Art positiv annimmt:

$$(3.)\qquad (\varkappa,\ \lambda,\ \mu) = 1,$$
$$(\varkappa,\ \lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots\ 2\varrho;\quad \varkappa \lessgtr \lambda,\ \lessgtr \mu,\ \lambda \lessgtr \mu).$$

Vorher aber mögen zwei neue Bezeichnungen eingeführt werden. Es werde erstens

$$(4.)\qquad (K,\ L,\ L) = (K|L)$$

gesetzt. Dies ist ein neues Symbol, das aber nicht symmetrisch ist; es ist

$$(5.)\qquad (K|L)(L|K) = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem K, L syzygetische oder azygetische Perioden sind. Dagegen gelten die Gesetze der Multiplication:

$$(6.)\qquad \begin{cases} (K|LM) = (K|L)(K|M), \\ (KL|M) = (K|M)(L|M). \end{cases}$$

Zweitens brauchen wir folgenden Begriff. Sind K, L zwei Combinationen gegebener Elemente, so existirt eine bestimmte dritte Combination, welche alle Elemente enthält, die in K und L gemeinsam vorkommen. Diese nennen wir den grössten gemeinsamen Theiler von K und L und bezeichnen sie so:

$$\overline{K,\ L}.$$

Es gilt dann der Satz: *Ist A der grösste gemeinsame Theiler von K und L, B der von K und M, so ist AB der grösste gemeinsame Theiler von K und LM.*

Es sei nämlich:

$$\overline{K,\ L} = A,$$
$$\overline{K,\ M} = B,$$
$$\overline{K,\ LM} = C.$$

Ist $\varkappa$ ein Element von A, so kommt es in K und L vor. Ist $\varkappa$ ausserdem in B enthalten, so kommt es auch in M vor. Dann wird aber dieses Element aufgehoben bei der Zusammensetzung LM; wenn also $\varkappa$ in A und B vorkommt, so kann es in C nicht enthalten sein. Ist dagegen $\varkappa$ in A, aber nicht in B enthalten, so kommt es in K und L vor, aber nicht in M. In LM kommt es dann vor, also auch in C. Man sieht auf diese Weise, dass jedes Element entweder in zwei der Combinationen A, B, C auftritt, oder in gar keiner. Bei der Zusammensetzung ABC müssen sich demnach alle Elemente gegenseitig aufheben. Das heisst: es ist $ABC = 0$, $C = AB$.

Wir wollen jetzt beweisen, dass unter der Voraussetzung, welche in der Formel (3.) enthalten ist, das Symbol (K, L, M) dargestellt werden kann durch das Product der drei Factoren:

$$(7.)\qquad (K, L, M) = (K|\overline{L, M})(L|\overline{M, K})(M|\overline{K, L}).$$

Bezeichnen wir den Ausdruck auf der rechten Seite für den Augenblick mit $[K, L, M]$. Das Gesetz der Symmetrie leuchtet direct aus der Bildungsweise hervor. Ersetzen wir ferner M durch MN, so kann, dem bewiesenen Satz zufolge, die Combination $\overline{L, MN}$ zerlegt werden in $\overline{L, M}$ und $\overline{L, N}$; daher zerfällt der erste Factor

$$(K|\overline{L, MN}) \quad \text{in} \quad (K|\overline{L, M})(K|\overline{L, N}).$$

Entsprechendes gilt von den beiden anderen Factoren. Also ist

$$[K, L, MN] = [K, L, M][K, L, N].$$

Nachdem wir dies erkannt haben, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die Identität:

$$[\varkappa, \lambda, \mu] = (\varkappa, \lambda, \mu)$$

für primitive Indices besteht.

Es seien zunächst $\varkappa, \lambda, \mu$ drei verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, ... 2ϱ. Der Voraussetzung nach ist dann $(\varkappa, \lambda, \mu) = 1$. Da aber in diesem Falle K, L, M keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist auch $[\varkappa, \lambda, \mu] = 1$.

Es seien zweitens zwei der Zahlen einander gleich, etwa $\mu = \lambda$. Alsdann ist

$$(\varkappa, \lambda, \mu) = (\varkappa, \lambda, \lambda) = (\varkappa|\lambda).$$

Ferner, da, für $\lambda = \mu$, λ selbst der grösste gemeinsame Theiler von λ und μ ist:

$$(\varkappa|\overline{\lambda, \mu}) = (\varkappa|\lambda).$$

Endlich ist offenbar für $\lambda = \mu$:

$$(\lambda|\overline{\mu, \varkappa})(\mu|\overline{\varkappa, \lambda}) = 1,$$

folglich:

$$[\varkappa, \lambda, \lambda] = (\varkappa|\lambda) = (\varkappa, \lambda, \lambda).$$

Damit ist die Gleichung (7.) vollständig bewiesen.

§ 7.

Für manche Untersuchungen ist es vortheilhafter, das Zeichen (K, L, M) auf eine andere Art zu bestimmen. Gegeben seien $2\varrho+1$ halbe Perioden, die eine azygetische Reihe bilden; wir bezeichnen sie durch die Indices $1, 2, \dots 2\varrho+1$. Es ist bekannt, dass die Summe aller dieser halben Perioden nothwendig eine ganze Periode ist; jeder Perioden-Index lässt sich also hier durch zwei complementäre Combinationen der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ darstellen, von denen die eine aus einer geraden, die andere aus einer ungeraden Anzahl von Elementen besteht. Bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers denken wir uns jetzt stets diejenige Darstellung zu Grunde gelegt, welche eine gerade Anzahl von Elementen enthält. Sind dann $\varkappa$, λ zwei verschiedene primitive Indices, so ist der gemeinsame Theiler von $\varkappa$ und λ nicht 0, sondern $\varkappa\lambda$. Denn wir müssen uns erst $\varkappa$ und λ durch die complementären Combinationen ersetzt denken. Diese haben alle Elemente gemeinsam, ausser $\varkappa$ und λ; der gemeinsame Theiler von $\varkappa$ und λ ist also eigentlich eine Combination $(2\varrho-1)$ter Ordnung, die aber wieder durch die complementäre $\varkappa\lambda$ ersetzt werden darf.

Ganz ebenso wird erkannt, dass der gemeinsame Theiler von $\varkappa$ und $\varkappa\lambda$ nicht $\varkappa$, sondern λ ist. Die Formel

$$(1.)\qquad \overline{K, L}.\overline{K, M} = \overline{K, LM}$$

bleibt offenbar bestehen, trotz der veränderten Bedeutung von $\overline{K, L}$.

Wir definiren nun, indem wir unter $\varkappa$, λ beliebige Zahlen der Reihe $1, 2, \dots 2\varrho+1$ verstehen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} (\varkappa, \lambda) = +1 & \text{für } \varkappa < \lambda, \\ = -1 & \text{für } \varkappa > \lambda, \\ = (-1)^{\lambda-1} & \text{für } \varkappa = \lambda. \end{cases}$$

Das erweiterte Zeichen $(K|L)$, für beliebige Indices K, L, denken wir uns definirt durch den Product-Ausdruck:

$$(3.)\qquad (K|L) = \prod_{\varkappa}\prod_{\lambda}(\varkappa|\lambda)$$

erstreckt über alle Elemente $\varkappa$ von K, λ von L; endlich das Symbol (K, L, M) durch die Gleichung:

$$(4.)\qquad (K, L, M) = (K|\overline{L, M})(L|\overline{M, K})(M|\overline{K, L}).$$

Dann ist zu zeigen, dass dieses Symbol den drei Grundgesetzen gehorcht.

Vorher aber ist ein anderer Punkt zu beachten. Der Ausdruck (3.) ist zwar ein vollständig bestimmter, wenn K und L gegebene Combinationen sind. Jeder Index ist aber durch zwei Combinationen darstellbar. Deshalb muss bewiesen werden, dass der Ausdruck für $(K|L)$ seinen Werth nicht ändert, wenn man die Combination K durch ihre complementäre K', oder L durch die ergänzende L' ersetzt.

Ersetzt man zunächst K durch K', so bekommt man ein Doppelproduct, das sich auf dieselben Werthe von λ, dagegen in Bezug auf $\varkappa$ auf die Elemente erstreckt, die in K nicht vorkommen. Es ist also:

$$(K|L)(K'|L) = \prod_{\varkappa=1}^{2\varrho+1}\prod_{\lambda}(\varkappa|\lambda).$$

Nun ist

$$\prod_{\varkappa=1}^{2\varrho+1}(\varkappa|\lambda) = \prod_{\varkappa=1}^{\lambda-1}(\varkappa|\lambda).(\lambda|\lambda).\prod_{\varkappa=\lambda+1}^{2\varrho+1}(\varkappa|\lambda).$$

In dem ersten Product sind alle Factoren $+1$, in dem letzten alle $2\varrho+1-\lambda$ Factoren -1; es ist also:

$$\prod_{\varkappa=1}^{2\varrho+1}(\varkappa|\lambda) = (-1)^{\lambda-1}.(-1)^{2\varrho+1-\lambda} = +1.$$

Folglich erhalten wir:

$$(K|L)(K'|L) = +1,$$

und ebenso wird bewiesen:

$$(K|L)(K|L') = +1.$$

Es wird also der Werth von $(K|L)$ nicht geändert, wenn man K oder L durch die complementäre Combination ersetzt.

Nun ist für den aufgestellten Ausdruck (K, L, M) das Gesetz der Symmetrie an sich klar; das zweite Gesetz folgt, wie wir schon gesehen haben, aus der Formel (1.). Für den Beweis des dritten können wir uns deshalb wieder auf primitive Indices beschränken. Es seien $\varkappa$, λ irgend zwei verschiedene primitive Indices, und $K = \varkappa$, $L = \lambda$, $M = \varkappa\lambda$. Dann ist

$$\overline{L,\ M} = \overline{\lambda,\ \varkappa\lambda} = \varkappa,$$
$$\overline{M,\ K} = \overline{\varkappa\lambda,\ \varkappa} = \lambda,$$
$$\overline{K,\ L} = \overline{\varkappa,\ \lambda} = \varkappa\lambda.$$

Folglich:

$$(\varkappa,\ \lambda,\ \varkappa\lambda) = (\varkappa|\varkappa)(\lambda|\lambda)(\varkappa\lambda|\varkappa\lambda)$$
$$= (\varkappa|\lambda)(\lambda|\varkappa) = -1.$$

Dies stimmt mit dem dritten Gesetz überein, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, die einzelnen primitiven Perioden zu einander azygetisch sind.
