Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *Ch. Hermite* à Paris par M. *F. Caspary*.)

... L'étude de la lettre que vous avez bien voulu m'adresser *), m'a fait trouver pour quelques-uns de vos résultats et pour d'autres des démonstrations si simples que je prends la liberté de vous les communiquer.

Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_n(x)$ ou plus simplement encore par P_n, sont définies par la série:

$$\text{(I.)} \qquad T = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1+\alpha P_1+\alpha^2 P_2+\cdots+\alpha^n P_n+\cdots.$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à α et à x on obtient:

$$\text{(II.)} \qquad \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)T,$$

$$\text{(III.)} \qquad \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T,$$

ou

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)\frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)T,$$

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

Par conséquent, en égalant dans la première formule les coefficients de α^n et, dans la deuxième formule, les coefficients de α^{n+1}, on a:

$$\text{(1.)} \qquad (n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1} = 0,$$

$$\text{(2.)} \qquad P'_{n+1}-2xP'_n+P'_{n-1} = P_n,$$

P'_r étant égal à $\dfrac{dP_r(x)}{dx}$.

En différentiant la formule (1.) par rapport à x et puis en éliminant successivement P'_{n+1}, P'_n, P'_{n-1}, on obtient:

$$\text{(3.)} \qquad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n,$$

$$\text{(4.)} \qquad P'_{n+1}-P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$\text{(5.)} \qquad P'_{n+1}-xP'_n = (n+1)P_n.$$

*) Voir la Note p. 80.

D'après la formule (II.) on a:

$$(x-\alpha)\frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)^2 T^3,$$

et comme on a aussi identiquement:

$$(x-\alpha)^2 = (x^2-1)+(1-2\alpha x+\alpha^2) = x^2-1+\frac{1}{T^2},$$

on en tire, eu égard à la formule (III.):

$$(x^2-1)\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(x-\alpha)\frac{\partial T}{\partial \alpha}-\alpha T.$$

Donc:

$$(6.)\qquad (x^2-1)P'_n = n(xP_n-P_{n-1}),$$

et, à cause de la formule (1.):

$$(7.)\qquad (x^2-1)P'_n = (n+1)(P_{n+1}-xP_n),$$

$$(8.)\qquad (x^2-1)P'_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1}).$$

De la formule (8.), qui est celle que M. *Beltrami* vous a communiquée, résulte, par différentiation et eu égard à la formule (4.), d'une part l'équation différentielle connue:

$$(9.)\qquad \frac{d(x^2-1)P'_n}{dx} = n(n+1)P_n$$

et d'autre part la relation qui termine votre lettre. En effet, si l'on différentie la formule (8.), on obtient au moyen de la formule (2.) d'abord:

$$(x^2-1)P''_n = (N-1)P'_{n+1}-(N+1)P'_{n-1}+P_n,$$

étant $N = \frac{n(n+1)}{2n+1}$.

Or on tire de la formule (4.) au moyen de la formule (8.):

$$(10.)\qquad (2n+1)(x^2-1)P_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}(P_{n+2}-P_n)-\frac{n(n-1)}{2n-1}(P_n-P_{n-2});$$

par conséquent, en multipliant la dernière formule par (x^2-1), on obtient au moyen des formules (8.) et (10.):

$$(x^2-1)^2P''_n = \left(N-1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}(P_{n+2}-P_n)$$
$$-\left(N+1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{n(n-1)}{2n-1}(P_n-P_{n-2}),$$

ou

$$(11.)\ \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{n(n-1)(n+1)(n+2)}(x^2-1)^2P''_n = (2n-1)P_{n+2}-2(2n+1)P_n+(2n+3)P_{n-2};$$

c'est précisément la relation élégante que vous avez établie, Monsieur.

Les formules (4.) et (8.) donnent encore naissance à deux séries dont l'une est due à M. *Christoffel* et l'autre à M. *F. Neumann.*

Posons dans la formule (4.) l'indice n successivement égal à $r-1$, $r-3$, $r-5$, ...; alors cette suite de nombres se terminera par 1 ou 0 suivant que r est pair ou impair. Par conséquent, si l'on ajoute toutes les formules qui découlent, avec ces valeurs de l'indice n, de la formule (4.), les termes des premiers membres se détruiront, excepté le premier terme et le dernier. Donc on a la serie finie:

$$(12.)\qquad P'_r = \sum_n (2n+1) P_n \qquad (n = r-1,\ r-3,\ r-5,\ \ldots)$$

dont le dernier terme est $3P_1$ ou 1 suivant que r est pair ou impair.

D'une façon analogue on déduit de la formule (8.):

$$(13.)\qquad P_r - p = (x^2-1) \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} P'_n \qquad (n = r-1,\ r-3,\ r-5,\ \ldots),$$

p étant égal à 1 ou à x suivant que l'indice r est pair ou impair, et le dernier terme du second membre étant respectivement $\frac{3}{1.2} P'_1$ ou $\frac{5}{2.3} P'_2$.

Les fonctions sphériques de second espèce sont définies, d'après M. *F. Neumann,* par l'intégrale:

$$(\mathrm{IV.})\qquad Q_s(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x)\,dx}{y-x} \qquad (s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Par conséquent, l'expression:

$$(n+1) Q_{n+1}(y) - (2n+1) y\, Q_n(y) + n\, Q_{n-1}(y)$$

devient, au moyen de la formule (1.), égale à

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx$$

ou, d'après la formule (9.), égale à zéro. Donc on a:

$$(1^*.)\qquad (n+1) Q_{n+1} - (2n+1) y\, Q_n + n\, Q_{n-1} = 0,$$

où, pour plus de simplicité, Q_r est écrit au lieu de $Q_r(y)$. Par différentiation on tire de la définition (IV.):

$$(\mathrm{V.})\qquad Q'_s(y) = -\int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x)\,dx}{(y-x)^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{P'_s(x)\,dx}{y-x} - \frac{2q}{y^2-1},$$

q étant égal à 1 ou à y suivant que l'indice s est pair ou impair.

Par conséquent, comme les deux nombres $n+1$ und $n-1$ sont, l'un et l'autre, ou pairs ou impairs, on obtient, au moyen de la formule (4.):

$$Q'_{n+1}-Q'_{n-1} = \int_{-1}^{+1}\frac{(P'_{n+1}-P'_{n-1})dx}{y-x} = (2n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{P_n dx}{y-x} = (2n+1)Q_n;$$

donc:

$$(4^*.)\qquad Q'_{n+1}-Q'_{n-1} = (2n+1)Q_n.$$

Enfin on a, au moyen de la formule (7.):

$$(n+1)(Q_{n+1}-yQ_n) = (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{(P_{n+1}(x)-yP_n(x)+xP_n(x)-xP_n(x))dx}{y-x}$$

$$=(n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{(P_{n+1}(x)-xP_n(x))dx}{y-x} = \int_{-1}^{+1}\frac{(y^2-1)-(y^2-x^2)}{y-x}P'_n(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{(y^2-1)P'_n(x)dx}{y-x} - \int_{-1}^{+1}(y+x)P'_n(x)dx.$$

Comme la deuxième intégrale est égale à $2y$ ou à 2 suivant que l'indice n est pair ou impair, on obtient d'après l'expression (V.):

$$(7^*.)\qquad (y^2-1)Q'_n = (n+1)(Q_{n+1}-yQ_n).$$

Les formules (1.), (4.), (7.) entraînent les autres; par conséquent, comme on a les formules analogues (1*.), (4*.), (7*.), *les formules* (1.) ... (11.) *ne changent pas si l'on y remplace $P_r(x)$ par $Q_r(y)$; la formule* (13.) *ne change pas si l'on remplace de plus p par Q_0 ou Q_1 suivant que l'indice r est pair ou impair;* enfin au lieu de la formule (12.) on obtient la série:

$$(12^*.)\qquad Q'_s+\frac{2q}{y^2-1} = \sum_n (2n+1)Q_n \qquad (n=s-1,\ s-3,\ s-5,\ \ldots)$$

dont le second membre se termine par $3Q_1$ ou Q_0 suivant que l'indice s est pair ou impair.

Quelques-unes des formules que je viens de tirer des définitions (I.) et (IV.) se trouvent dans un très bel ouvrage de M. *F. Neumann*, intitulé: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig. Teubner 1878* (voir p. 60 sqq.); l'illustre physicien de Koenigsberg les y déduit au moyen des expressions de $P_n(x)$, dues à *Laplace* et à *Jacobi* et demontrées si simplement par vous, Monsieur, au commencement de votre lettre.