

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1891

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0107

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0014

LOG Titel: Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques. (Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite à Paris par M. F. Caspary).

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite à Paris par M. F. Caspary.)

... L'étude de la lettre que vous avez bien voulu m'adresser *), m'a fait trouver pour quelques-uns de vos résultats et pour d'autres des démonstrations si simples que je prends la liberté de vous les communiquer.

Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_n(x)$ ou plus simplement encore par P_n , sont définies par la série:

$$(I.) \quad T = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}} = 1 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots + \alpha^n P_n + \dots.$$

Si l'on différencie cette expression par rapport à α et à x on obtient:

$$(II.) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(III.) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T,$$

ou

$$(1-2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(1-2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

Par conséquent, en égalant dans la première formule les coefficients de α^n et, dans la deuxième formule, les coefficients de α^{n+1} , on a:

$$(1.) \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$(2.) \quad P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} = P_n,$$

P'_r étant égal à $\frac{dP_r(x)}{dx}$.

En différentiant la formule (1.) par rapport à x et puis en éliminant successivement P'_{n+1} , P'_n , P'_{n-1} , on obtient:

$$(3.) \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n,$$

$$(4.) \quad P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$(5.) \quad P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n.$$

*) Voir la Note p. 80.

D'après la formule (II.) on a:

$$(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)^2 T^3,$$

et comme on a aussi identiquement:

$$(x-\alpha)^2 = (x^2-1) + (1-2\alpha x + \alpha^2) = x^2-1 + \frac{1}{T^2},$$

on en tire, eu égard à la formule (III.):

$$(x^2-1) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha T.$$

Donc:

$$(6.) \quad (x^2-1)P'_n = n(xP_n - P_{n-1}),$$

et, à cause de la formule (1.):

$$(7.) \quad (x^2-1)P'_n = (n+1)(P_{n+1} - xP_n),$$

$$(8.) \quad (x^2-1)P'_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}).$$

De la formule (8.), qui est celle que M. *Beltrami* vous a communiquée, résulte, par différentiation et eu égard à la formule (4.), d'une part l'équation différentielle connue:

$$(9.) \quad \frac{d(x^2-1)P'_n}{dx} = n(n+1)P_n$$

et d'autre part la relation qui termine votre lettre. En effet, si l'on différencie la formule (8.), on obtient au moyen de la formule (2.) d'abord:

$$(x^2-1)P''_n = (N-1)P'_{n+1} - (N+1)P'_{n-1} + P_n,$$

étant $N = \frac{n(n+1)}{2n+1}$.

Or on tire de la formule (4.) au moyen de la formule (8.):

$$(10.) \quad (2n+1)(x^2-1)P_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}(P_{n+2} - P_n) - \frac{n(n-1)}{2n-1}(P_n - P_{n-2});$$

par conséquent, en multipliant la dernière formule par (x^2-1) , on obtient au moyen des formules (8.) et (10.):

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2 P''_n &= \left(N-1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} (P_{n+2} - P_n) \\ &\quad - \left(N+1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{n(n-1)}{2n-1} (P_n - P_{n-2}), \end{aligned}$$

ou

$$(11.) \quad \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{n(n-1)(n+1)(n+2)} (x^2-1)^2 P''_n = (2n-1)P_{n+2} - 2(2n+1)P_n + (2n+3)P_{n-2};$$

c'est précisément la relation élégante que vous avez établie, Monsieur.

Les formules (4.) et (8.) donnent encore naissance à deux séries dont l'une est due à M. *Christoffel* et l'autre à M. *F. Neumann*.

Posons dans la formule (4.) l'indice n successivement égal à $r-1$, $r-3$, $r-5$, ...; alors cette suite de nombres se terminera par 1 ou 0 suivant que r est pair ou impair. Par conséquent, si l'on ajoute toutes les formules qui découlent, avec ces valeurs de l'indice n , de la formule (4.), les termes des premiers membres se détruiront, excepté le premier terme et le dernier. Donc on a la serie finie:

$$(12.) \quad P'_r = \sum_n (2n+1)P_n \quad (n=r-1, r-3, r-5, \dots)$$

dont le dernier terme est $3P_1$ ou 1 suivant que r est pair ou impair.

D'une façon analogue on déduit de la formule (8.):

$$(13.) \quad P_{r-p} = (x^2-1) \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} P'_n \quad (n=r-1, r-3, r-5, \dots),$$

p étant égal à 1 ou à x suivant que l'indice r est pair ou impair, et le dernier terme du second membre étant respectivement $\frac{3}{1.2}P'_1$ ou $\frac{5}{2.3}P'_2$.

Les fonctions sphériques de second espèce sont définies, d'après M. *F. Neumann*, par l'intégrale:

$$(IV.) \quad Q_s(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x) dx}{y-x} \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

Par conséquent, l'expression:

$$(n+1)Q_{n+1}(y) - (2n+1)yQ_n(y) + nQ_{n-1}(y)$$

devient, au moyen de la formule (1.), égale à

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) dx$$

ou, d'après la formule (9.), égale à zéro. Donc on a:

$$(1*.) \quad (n+1)Q_{n+1} - (2n+1)yQ_n + nQ_{n-1} = 0;$$

où, pour plus de simplicité, Q_r est écrit au lieu de $Q_r(y)$. Par différentiation on tire de la définition (IV.):

$$(V.) \quad Q'_s(y) = - \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x) dx}{(y-x)^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{P'_s(x) dx}{y-x} - \frac{2q}{y^2-1},$$

q étant égal à 1 ou à y suivant que l'indice s est pair ou impair.

Par conséquent, comme les deux nombres $n+1$ und $n-1$ sont, l'un et l'autre, ou pairs ou impairs, on obtient, au moyen de la formule (4.):

$$Q'_{n+1} - Q'_{n-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{(P'_{n+1} - P'_{n-1})dx}{y-x} = (2n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{P_n dx}{y-x} = (2n+1)Q_n;$$

donc:

$$(4^*) \quad Q'_{n+1} - Q'_{n-1} = (2n+1)Q_n.$$

Enfin on a, au moyen de la formule (7.):

$$\begin{aligned} (n+1)(Q_{n+1} - yQ_n) &= (n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{(P_{n+1}(x) - yP_n(x) + xP_n(x) - xP_n(x))dx}{y-x} \\ &= (n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{(P_{n+1}(x) - xP_n(x))dx}{y-x} = \int_{-1}^{+1} \frac{(y^2-1) - (y^2-x^2)}{y-x} P'_n(x) dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{(y^2-1)P'_n(x)dx}{y-x} - \int_{-1}^{+1} (y+x)P'_n(x)dx. \end{aligned}$$

Comme la deuxième intégrale est égale à $2y$ ou à 2 suivant que l'indice n est pair ou impair, on obtient d'après l'expression (V.):

$$(7^*) \quad (y^2-1)Q'_n = (n+1)(Q_{n+1} - yQ_n).$$

Les formules (1.), (4.), (7.) entraînent les autres; par conséquent, comme on a les formules analogues (1*), (4*), (7*), les formules (1.) ... (11.) ne changent pas si l'on y remplace $P_r(x)$ par $Q_r(y)$; la formule (13.) ne change pas si l'on remplace de plus p par Q_0 ou Q_1 suivant que l'indice r est pair ou impair; enfin au lieu de la formule (12.) on obtient la série:

$$(12^*) \quad Q'_s + \frac{2q}{y^2-1} = \sum_n (2n+1)Q_n \quad (n=s-1, s-3, s-5, \dots)$$

dont le second membre se termine par $3Q_1$ ou Q_0 suivant que l'indice s est pair ou impair.

Quelques-unes des formules que je viens de tirer des définitions (I.) et (IV.) se trouvent dans un très bel ouvrage de M. F. Neumann, intitulé: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig. Teubner 1878* (voir p. 60 sqq.); l'illustre physicien de Königsberg les y déduit au moyen des expressions de $P_n(x)$, dues à Laplace et à Jacobi et démontrées si simplement par vous, Monsieur, au commencement de votre lettre.