Ueber die *Schröter*sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung.

(Aus einem von Herrn *A. Hurwitz* in Königsberg i. Pr. an Herrn *H. Schröter* gerichteten Briefe.)

In einer Vorlesung über die Anwendungen der elliptischen Functionen habe ich kürzlich auch die ebenso einfache wie elegante Construction der Curven dritter Ordnung behandelt, welche Sie in Ihrem Aufsatze „Ueber Curven dritter Ordnung" (Mathematische Annalen Bd. 5.) angegeben und neuerdings Ihrem Buche „Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung" (Leipzig 1888) zu Grunde gelegt haben. Dabei bin ich zu einigen Bemerkungen geführt worden, welche vielleicht nicht ohne Interesse sind, und welche ich mir deshalb erlaube, Ihnen im Folgenden mitzutheilen. Gestatten Sie jedoch, dass ich meinen Bemerkungen, der leichteren Darstellung wegen, eine kurze Schilderung Ihrer Construction voraufschicke!

Aus irgend zwei Punktepaaren

$$\alpha = (a, a'), \quad \beta = (b, b')$$

kann man ein neues Punktepaar

$$\varrho = (r, r')$$

dadurch ableiten, dass man die Geraden ab und $a'b'$ im Punkte r und die Geraden ab' und $a'b$ im Punkte r' zum Durchschnitt bringt. Um anzudeuten, dass das Punktepaar ϱ aus den Paaren α, β in der angegebenen Weise abgeleitet ist, werde ich mich in der Folge der Schreibweise

$$\varrho = (\alpha\beta)$$

bedienen. Dieses festgesetzt, nehme man irgend drei Punktepaare

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

an, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass keines mit dem aus den beiden anderen abgeleiteten Paare zusammenfällt. Man bilde nun zuerst die Paare

$$\mu = (\beta\gamma), \quad \nu = (\gamma\alpha), \quad \varrho = (\alpha\beta),$$

welche als abgeleitete Paare „erster Ordnung" bezeichnet seien. Sodann combinire man diese Paare unter sich und mit den Ausgangspaaren α, β, γ, wodurch man neue Paare erhält, welche abgeleitete Paare „zweiter Ordnung" heissen mögen. So fortfahrend gelangt man nach und nach zu abgeleiteten Paaren dritter, vierter, ... $n$ter Ordnung. Die Paare $n$ter Ordnung entstehen hiernach, indem man die Paare $(n-1)$ster Ordnung unter sich und mit allen Paaren niedrigerer Ordnung combinirt.

In diesem Process der Ableitung immer neuer Punktepaare, (welche sämmtlich aus den Paaren α, β, γ mit alleiniger Hülfe des Lineals entspringen), besteht die von Ihnen gegebene Construction. Sie zeigen nämlich a. a. O., dass die Paare α, β, γ und sämmtliche abgeleiteten Punktepaare auf ein und derselben Curve dritter Ordnung liegen.

Meine erste Bemerkung geht nun dahin, dass bei besonderen Lagen der Punktepaare α, β, γ der geschilderte Process nur zu einer endlichen Anzahl verschiedener Punktepaare hinführt, so dass die Construction dann nur eine endliche Anzahl verschiedener Punkte der zu construirenden Curve liefert. In jedem solchen Falle reduciren sich also die im Allgemeinen in unendlicher Anzahl vorhandenen abgeleiteten Punktepaare auf ein endliches System

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \mu, \quad \nu, \quad \varrho, \quad \ldots \quad \lambda,$$

von der Beschaffenheit, dass jedes aus zwei Punktepaaren des Systems abgeleitete Punktepaar wieder dem Systeme angehört.

Zur Begründung dieser Behauptung will ich auf der Curve dritter Ordnung, welche aus den Punktepaaren

$$\alpha = (a, a'), \quad \beta = (b, b'), \quad \gamma = (c, c')$$

entspringt, in der bekannten Weise den elliptischen Parameter u vertheilen, nämlich so, dass einer der drei reellen Wendepunkte den Parameter $u = 0$ erhält*). Jeden Punkt der Curve bezeichne ich dann, wie üblich, mit demselben Buchstaben, wie den entsprechenden Parameter. Dabei hat man dann zu beachten, dass der Parameter nur bis auf Multipla der Perioden

$$2\omega, \quad 2\omega'$$

bestimmt ist, so dass u und u_1 denselben Punkt der Curve bezeichnen, falls

*) *Clebsch-Lindemann*, „Vorlesungen über Geometrie" Bd. 1, S. 602 ff.

$$u \equiv u_1 \quad (\mathrm{mod.}\, 2\omega,\ 2\omega')$$

ist. Nach dem *Abel*schen Theorem gilt nun der fundamentale Satz: „Die Verbindungsgerade zweier Punkte u und v der Curve begegnet dieser zum dritten Male in dem Punkte $-(u+v)$.“

Hieraus folgt, dass die Parameter $\pi,\ \pi'$, welche den Punkten irgend eines abgeleiteten Punktepaares entsprechen, von der Form

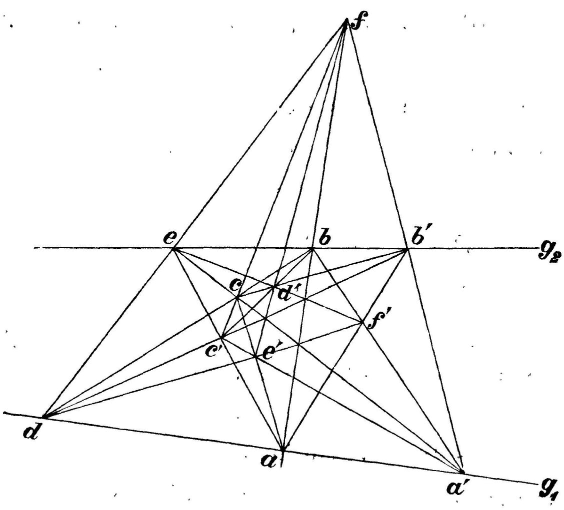
$$\pi \equiv ga+hb+kc, \quad \pi' \equiv ga+hb+kc+\omega_a$$

werden, wo $g,\ h,\ k$, ganze Zahlen bedeuten und ω_a eine der drei Periodenhälften

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega+\omega', \quad \omega \;\; = \omega'$$

bezeichnet. Wenn jetzt $a,\ b,\ c$, rationale Periodentheile sind, so erhält man überhaupt nur eine endliche Anzahl incongruenter Werthe $\pi,\ \pi'$, falls man den Zahlen $g,\ h,\ k$, alle möglichen ganzzahligen Werthe zuertheilt. In diesem Falle wird also in der That die Construction nur zu einer endlichen Anzahl verschiedener Punktepaare führen.

Das folgende Beispiel entspricht dem Falle, wo $a,\ b,\ c$ Perioden-Zwölftel sind. Ich nehme irgend zwei Gerade g_1 und g_2 und bestimme ihre Schnittpunkte $d,\ a,\ a'$ und $e,\ b,\ b'$ mit irgend drei durch einen Punkt f laufenden Geraden. Ferner bezeichne ich mit c den Schnittpunkt der Geraden ea' und db, endlich mit c' den Schnittpunkt der Geraden ea und db'. Geht man nun von den Paaren $(a,\ a')$ $(b,\ b')$, $(c,\ c')$ aus, so liefert die Construction, wie ein Blick auf die nebenstehende Figur zeigt, nur drei neue Paare, nämlich $(d,\ d')$, $(e,\ e')$ und $(f,\ f')$.



Wenn man nun den Fall, wo $a,\ b,\ c$ rationale Periodentheile sind, ausschliesst, so erhebt sich die Frage, ob in jedem anderen Falle die Construction zu unendlich vielen Punkten der Curve führt und wie die Punkte, welche man durch die Construction erhält, über die Curve vertheilt sind.

Um diese Frage zu erledigen, beweise ich zunächst, *dass die Con-*

struction alle und nur diejenigen Punktepaare (g, h, k) *ergiebt*), für welche die Congruenz*

$$g+h+k \equiv 1 \pmod{3}$$

erfüllt ist.

Zuerst zeige ich, dass man durch die Construction *nur* solche Punktepaare findet, für welche die genannte Congruenz erfüllt ist. Zu dem Ende nehme ich an, die Gültigkeit der Congruenz sei schon für alle Punktepaare von einer niedrigeren als der $n$ten Ordnung bewiesen. Bezeichnen dann

$$(g', h', k'), \quad (g'', h'', k'')$$

zwei unter diesen Paaren, so ergiebt sich für das aus ihnen abgeleitete Paar

$$(-g'-g'', \ -h'-h'', \ -k'-k''),$$

dass

$$-g'-g''-h'-h''-k'-k'' \equiv -(g'+h'+k')-(g''+h''+k'') \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$$

ist. Es gilt also die Congruenz auch für die Paare $n$ter Ordnung, wenn sie für die Paare niedrigerer Ordnung vorausgesetzt wird. Nun ist aber die Congruenz offenbar für die Ausgangspaare

$$\alpha = (1, 0, 0), \quad \beta = (0, 1, 0), \quad \gamma = (0, 0, 1)$$

erfüllt, und folglich gilt sie allgemein.

Etwas umständlicher ist der Nachweis, dass man durch die Construction alle Punktepaare (g, h, k), welche der Bedingung

$$g+h+k \equiv 1 \pmod{3}$$

genügen, auch wirklich erhält. Um diesen Nachweis zu führen, bilde ich zunächst die folgenden Punktepaare:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha = (1,0,0); & \beta = (0,1,0); & \gamma = (0,0,1); \\ \mu = (\beta\gamma) = (0,-1,-1); & \nu = (\gamma\alpha) = (-1,0,-1); & \varrho = (\alpha\beta) = (-1,-1,0); \\ \mu_1 = (\alpha\mu) = (-1,1,1); & \nu_1 = (\beta\nu) = (1,-1,1); & \varrho_1 = (\gamma\varrho) = (1,1,-1); \\ \alpha' = (\nu_1\varrho_1) = (-2,0,0); & \beta' = (\varrho_1\mu_1) = (0,-2,0); & \gamma' = (\mu_1\nu_1) = (0,0,-2). \end{array}\right.$$

Sodann leite ich die Paare

$$\alpha'' = (4,0,0); \quad \beta'' = (0,4,0); \quad \gamma'' = (0,0,4)$$

auf dieselbe Weise aus den Paaren α', β', γ' ab, wie diese aus den Ausgangspaaren α, β, γ abgeleitet wurden. Endlich bilde ich noch die Paare

$$(\alpha\alpha'') = (-5,0,0), \quad (\beta\beta'') = (0,-5,0), \quad (\gamma\gamma'') = (0,0,-5).$$

Von den auf diese Weise construirten Paaren vertreten die ersten neun schon alle Lösungen der Congruenz

---

*) Zur Abkürzung bezeichne ich das Punktepaar $ga+hb+kc$, $ga+hb+kc+\omega_\alpha$ mit (g, h, k).

$$g+h+k \equiv 1 \quad (\text{mod. } 3),$$

in welchen die Zahlen g, h, k dem Restsystem

$$0, \; 1, \; -1 \quad (\text{mod. } 3)$$

entnommen sind. Diese Lösungen will ich die „fundamentalen" nennen. Angenommen nun, es sei (g, h, k) irgend ein construirbares Paar. Combiniren wir dasselbe mit α, so erhalten wir das neue Paar $(-g-1, -h, -k)$, und wenn wir sodann das letztere mit α' combiniren, so erhalten wir das Paar $(g+3, h, k)$. Wenn wir (g, h, k) zuerst mit α' und sodann das erhaltene Paar mit α combiniren, so entsteht das Paar $(g-3, h, k)$. Weil man indessen ein Paar nicht mit sich selber combiniren kann, so wird diese Ueberlegung illusorisch, wenn (g, h, k) mit α oder α' zusammenfällt, wenn also $(g, h, k) = (1, 0, 0)$ oder $= (-2, 0, 0)$ ist. In diesen Fällen finden sich aber die Paare $(g \pm 3, h, k)$ schon unter denjenigen, welche ich oben construirt habe. Indem man nun dieselbe Betrachtung wiederholt und dabei nur das eine Mal die Punkte a und b, das andere Mal die Punkte a und c ihre Rolle tauschen lässt, erkennt man die ausnahmslose Gültigkeit des Satzes: „Wenn das Paar (g, h, k) construirbar ist, so sind auch die sechs Paare

$$(g \pm 3, \; h, \; k), \quad (g, \; h \pm 3, \; k), \quad (g, \; h, \; k \pm 3)$$

construirbar." Nun kann aber jede Lösung der Congruenz $g+h+k \equiv 1$ (mod. 3) aus einer der fundamentalen Lösungen (g', h', k') dadurch abgeleitet werden, dass man zu g', h', k' geeignete Multipla von 3 addirt oder subtrahirt. Folglich ist jedes Paar (g, h, k), welches der Bedingung $g+h+k \equiv 1$ (mod. 3) genügt, construirbar, was zu beweisen war.

Dies vorausgeschickt, betrachte ich zuerst den Fall, wo die durch die Punktepaare α, β, γ bestimmte Curve aus *einem* Zuge besteht. Den reellen Punkten der Curve entsprechen dann reelle Parameter, welche bis auf Multipla der reellen Periode 2ω bestimmt sind. Es besitzen also a, b, c reelle Werthe und ω_a ist gleich der reellen Periodenhälfte $\omega_1 = \omega$. Ich nehme nun an, dass mindestens eine der Grössen a, b, c, zum Beispiel die Grösse a, kein rationaler Periodentheil ist, und ich bilde unter dieser Voraussetzung alle Parameter der Form

$$(3x+1)a+y.2\omega \;=\; x.3a+y.2\omega+a,$$

wo x und y ganze Zahlen bedeuten. Die Punkte, welche diesen Parametern entsprechen, gehören sämmtlich zu denjenigen, welche man durch die Construction erhält. Da aber $3a : 2\omega$ eine irrationale Zahl ist, so lassen sich die ganzen Zahlen x und y, wie ich sogleich zeigen werde, so bestimmen, dass die Grösse

$$x.3a+y.2\omega+a$$

sich beliebig wenig von einer beliebig angenommenen reellen Zahl unterscheidet. Es sind folglich die Punkte, welche die Construction liefert, auf der Curve dritter Ordnung derart vertheilt, dass auf jedem noch so klein gewählten Bogenstück der Curve unendlich viele jener Punkte liegen.

In dem zweiten Falle, wo die Curve zweizügig ist, finden ganz ähnliche Betrachtungen statt. Ich fasse das Resultat, welches sich hierbei ergiebt, mit dem wesentlichen Inhalte der vorstehenden Erörterungen in einen Satz zusammen, wobei ich mich einer von Herrn *G. Cantor**) eingeführten Bezeichnungsweise anschliesse:

Die Construction, welche von drei Punktepaaren ausgehend in der oben geschilderten Weise neue Punktepaare ableitet, erreicht entweder dadurch ein Ende, dass schliesslich die weitere Fortsetzung der Construction keine neuen Punktepaare mehr liefert, oder die Construction lässt sich ins Unbegrenzte fortsetzen und liefert also dann unbegrenzt viele Punktepaare.

In dem letzteren Falle bildet die Gesammtheit dieser Punktepaare ein Punktsystem, welches entweder eine einzügige Curve dritter Ordnung, oder nur den unpaaren Zug einer zweizügigen Curve dritter Ordnung, oder endlich sowohl den unpaaren, wie auch den paaren Zug einer zweizügigen Curve dritter Ordnung überall dicht bedeckt.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die Construction der Raum-Curve vierter Ordnung erster Species aus Punktetripeln, welche Sie in Ihrer Schrift „Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raum-Curve vierter Ordnung erster Species" (Leipzig, 1890) angegeben und begründet haben. —

Es bleibt mir noch übrig, den folgenden Satz zu beweisen, welcher einen wesentlichen Stützpunkt meiner Betrachtungen bildete:

„Bezeichnen A, B, C reelle Grössen, und ist der Quotient $A:B$ eine irrationale Zahl, so lassen sich die ganzen Zahlen x und y stets so bestimmen, dass der absolute Betrag des Ausdrucks

$$Ax+By-C$$

kleiner wird als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Grösse δ."
Wenn $C=0$ ist, so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus der Theorie der Kettenbrüche. Ist C nicht gleich Null, so bilde ich zunächst

*) „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten". Math. Annalen, Bd. 15, S. 1.

die Zahlenreihe

$$\frac{C}{n}, \quad \frac{C}{n+1}, \quad \frac{C}{n+2}, \quad \ldots,$$

wobei n irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, welche nur der einen Bedingung genügen soll, dass der absolute Betrag von $\frac{C}{n}$ kleiner ist als die vorgeschriebene Grösse δ. Sodann bestimme ich die ganzen Zahlen ξ und η so, dass $A\xi+B\eta$ absolut genommen kleiner als $\frac{C}{n}$ wird. Dabei darf angenommen werden, dass $A\xi+B\eta$ dasselbe Vorzeichen wie C besitzt, weil man widrigenfalls ξ und η durch $-\xi$ und $-\eta$ ersetzen kann. Die Bestimmung der Zahlen ξ, η ist nach der Theorie der Kettenbrüche stets möglich.

Da nun A und B in irrationalem Verhältnisse stehen, so kann $A\xi+B\eta$ nicht gleich Null sein, und es wird daher diese Grösse zwischen zwei auf einander folgende Glieder der oben gebildeten Reihe, etwa zwischen $\frac{C}{n+m}$ und $\frac{C}{n+m+1}$ fallen. Es liegt dann die Grösse

$$(n+m+1)(A\xi+B\eta)$$

zwischen C und $C+\frac{C}{n+m}$, und folglich

$$(n+m+1)(A\xi+B\eta)-C$$

zwischen 0 und $\frac{C}{n+m}$. Nun ist aber der absolute Betrag von $\frac{C}{n+m}$ kleiner als δ, und es genügen also die ganzen Zahlen

$$x=(n+m+1).\xi, \quad y=(n+m+1).\eta$$

der gestellten Forderung.

Der hier bewiesene Satz folgt übrigens auch unmittelbar aus einem sehr bemerkenswerthen Theorem des Herrn *Tchebycheff*, welches ich aus einem interessanten Aufsatze des Herrn *Hermite* *) kennen gelernt habe.

Nachträglich wurde ich auf eine Abhandlung des Herrn *Kronecker:* „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen" (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften vom 15. December 1885) aufmerksam. Der obige den linearen Ausdruck $Ax+By-C$ betreffende Satz, welcher übrigens bei Herrn *Kronecker* nur als ein ganz specieller Fall allgemeiner Theoreme erscheint, findet auf den ersten Seiten der Abhandlung eine ähnliche Begründung, wie ich sie oben gegeben habe.

*) „Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. *Tchebycheff.*" (Dieses Journal, Bd. 88, S. 10.)