Das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt.

(Von Herrn *Züge* in Lingen.)

In Band 104 dieses Journals habe ich für das Potential homogener Ringkörper allgemeine Formeln aufgestellt und das Potential eines Ringkörpers mit Kreisquerschnitt durch ein zweifaches Integral ausgedrückt, welches in ein einfaches elliptisches Integral übergeht, wenn der angezogene Punkt in der Ringaxe liegt. Nicht viel complicirter gestaltet sich der Ausdruck für das Potential eines Ringkörpers, bei welchem der Querschnitt eine elliptische Fläche ist, deren eine Axe der Ringaxe parallel ist, eines Körpers also, der durch Rotation einer Ellipse um eine dieselbe nicht schneidende, einer Ellipsenaxe parallele Gerade entstehen würde. Die Bestimmung dieses Potentials ist der Gegenstand der nachfolgenden Abhandlung.

I.

Die einleitenden Entwicklungen in dem oben erwähnten Aufsatze über das Potential homogener Ringkörper, auf die im allgemeinen verwiesen wird, müssen hier theilweise wiederholt werden, weil mit Rücksicht auf die späteren Entwicklungen geringfügige Aenderungen in der Bezeichnung der vorkommenden Grössen vorgenommen wurden. Die Ringaxe soll nämlich hier die H-Axe, nicht die Z-Axe, des mit dem Körper fest verbundenen Coordinatensystems sein, auf welches bezogen ein beliebiger Punkt des Körpers die Coordinaten ξ, η, ζ, der vom Körper angezogene Punkt P die Coordinaten α, β, γ habe. Wir setzen von vornherein fest, dass die ΞZ-Ebene die Mittelpunkte aller elliptischen, durch die Meridianebenen erzeugten Querschnitte enthalten soll; Meridianebene aber wird jede die Ringaxe enthaltende Ebene genannt; diejenige Meridianebene, welche den Punkt P enthält, bilde mit der ΞH-Ebene den Winkel ε, mit einer anderen beliebigen Meridianebene den Winkel φ. Ist r der Ringhalbmesser, d. h. die Entfernung des Mittelpunktes eines elliptischen Querschnittes von der Ringaxe, ferner e die Entfernung eines Punktes des Ringkörpers vom angezogenen Punkte, so geht der auf das rechtwinklige Coordinatensystem bezogene Ausdruck für das Potential

$$(1.)\qquad U = \iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{e}$$

durch die Substitution

$$\xi = (r+x)\cos(\varphi-\varepsilon), \quad \eta = y, \quad \zeta = (r+x)\sin(\varphi-\varepsilon)$$

über in

$$(2.)\qquad U = \iiint \frac{(r+x)\,d\varphi\, dx\, dy}{e}.$$

Die Coordinaten x und y des Körperpunkts beziehen sich auf ein rechtwinkliges, ebenes Coordinatensystem, das in der Meridianebene dieses Punktes liegt, dessen Anfang der Mittelpunkt der Schnittellipse, dessen Y-Axe der H-Axe parallel ist und dessen negative X-Axe nach der Ringaxe zu sich erstreckt. Die Integration nach x und y ist über alle Punkte der Schnittellipse auszudehnen, sodann ist nach φ von 0 bis 2π zu integriren.

Das vom Punkte P aus auf die Ebene der Schnittellipse gefällte Loth heisse c, die rechtwinkligen Coordinaten des Fusspunktes dieses Lothes, bezogen auf das XY-System, seien a und b, so ist

$$e = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2}.$$

Fällt man von P aus ein Loth auf die Ringaxe, das mit m bezeichnet werden soll, verbindet den Fusspunkt dieses Lothes mit dem des Lothes c durch eine Gerade, so schliesst diese Linie mit dem Lothe m den Winkel φ ein und hat die Länge $r+a$; es bestehen daher folgende Relationen:

$$(3.)\qquad r+a = m\cos\varphi; \quad c = m\sin\varphi; \quad m^2 = \alpha^2+\gamma^2; \quad b = \beta.$$

Den Ausdruck (2.) für das Potential kann man in folgender Weise umformen:

$$U = \iiint \frac{(r+a)\,d\varphi\, dx\, dy}{e} + \iiint \frac{(x-a)\,d\varphi\, dx\, dy}{e},$$

oder setzt man

$$V = \iint \frac{dx\, dy}{e}, \qquad V_1 = \iint \frac{(x-a)\,dx\, dy}{e},$$

so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen (3.)

$$(4.)\qquad U = m\int_0^{2\pi} V\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} V_1\, d\varphi.$$

V ist das Potential einer elliptischen Fläche. Liegt der angezogene Punkt in der Ringaxe, so ist $m = 0$ und es verschwindet der erste Summand in (4.).

II.

Es kommt zunächst darauf an, V und V_1 zu bestimmen. Die Halbaxen der Schnittellipse bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_2, letztere sei der Ringaxe parallel. Unter Benutzung des bestimmten Integrals

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dw}{e^2+w^2} = \frac{1}{e}$$

erhält man:

$$V = \iint\frac{dx\,dy}{e} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dw\int_{-\varrho_1}^{+\varrho_1}\int_{-\varrho_2\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho_1^2}}}^{+\varrho_2\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho_1^2}}}\frac{dx\,dy}{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2+w^2},$$

$$V_1 = \iint\frac{(x-a)dx\,dy}{e} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dw\int_{-\varrho_1}^{+\varrho_1}\int_{-\varrho_2\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho_1^2}}}^{+\varrho_2\sqrt{1-\frac{x^2}{\varrho_1^2}}}\frac{(x-a)\,dx\,dy}{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2+w^2}.$$

Wir führen nun für x und y neue Coordinaten λ und μ ein durch die Substitutionen

$$x = \varrho_1\lambda\cos\mu, \quad y = \varrho_2\lambda\sin\mu;$$

dann ist

$$dx\,dy = \varrho_1\varrho_2\lambda\,d\lambda\,d\mu.$$

Die Grenzen für λ sind 0 und 1, für μ 0 und 2π, und es ist

$$(5.)\quad V = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\pi}\int_0^{\infty}dw\int_0^1\lambda d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{d\mu}{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)^2+(\varrho_2\lambda\sin\mu-b)^2+c^2+w^2},$$

$$(6.)\quad V_1 = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\pi}\int_0^{\infty}dw\int_0^1\lambda d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)\,d\mu}{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)^2+(\varrho_2\lambda\sin\mu-b)^2+c^2+w^2}.$$

III.

Um hier die Integrationen nach der Variablen μ ausführen zu können, benutzen wir eine Substitution, die zuerst Gauss in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta si ejus massa" etc.*) angewandt hat.

*) *Gauss*' Werke, herausgeg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 3, S. 331.

Setzt man zur Abkürzung

$$(7.)\qquad \varrho_1\lambda = A,\quad \varrho_2\lambda = B,\quad c^2+w^2 = c_1^2,$$

und führt für μ die Variable ψ ein durch die Substitutionen

$$\cos\mu = \frac{\alpha'+\alpha''\cos\psi+\alpha'''\sin\psi}{\gamma'+\gamma''\cos\psi+\gamma'''\sin\psi},\qquad \sin\mu = \frac{\beta'+\beta''\cos\psi+\beta'''\sin\psi}{\gamma'+\gamma''\cos\psi+\gamma'''\sin\psi}$$

und setzt ferner zur Abkürzung

$$(8.)\qquad t = \gamma'+\gamma''\cos\psi+\gamma'''\sin\psi,$$

so können, wie *Gauss* zeigt, die neun Grössen α', α'', α''', β' u. s. w. so bestimmt werden, dass

$$(9.)\qquad (A\cos\mu-a)^2+(B\sin\mu-b)^2+c_1^2 = \frac{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}{t^2}$$

wird, wobei G, $-G'$, $-G''$ die Wurzeln der Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{a^2}{A^2+u}+\frac{b^2}{B^2+u}+\frac{c_1^2}{u} = 1$$

sind. Von dieser Gleichung ist nachgewiesen, dass sie immer eine positive und zwei negative Wurzeln besitzt, die nur in gewissen Grenzfällen in 0 übergehen. Die Grössen G' und G'' sind daher positiv. Ausserdem wird

$$(11.)\qquad A\cos\mu-a = \frac{-\alpha'G+\alpha''G'\cos\psi+\alpha'''G''\sin\psi}{At}.$$

Die Coefficienten α', α'', α''' u. s. w. können aber selbst durch A und B und die Wurzeln der Gleichung in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \gamma' = \sqrt{\dfrac{(A^2+G)(B^2+G)}{(G+G')(G+G'')}}, \\[2ex] \gamma'' = \sqrt{\dfrac{(A^2-G')(B^2-G')}{(G+G')(G''-G')}}, \\[2ex] \gamma''' = \sqrt{\dfrac{(A^2-G'')(B^2-G'')}{(G+G'')(G'-G'')}}, \end{cases}$$

$$(13.)\qquad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{\gamma' aA}{A^2+G} = aA\sqrt{\dfrac{B^2+G}{(A^2+G)(G+G')(G+G'')}}, \\[2ex] \alpha'' = \dfrac{\gamma'' aA}{A^2-G'} = aA\sqrt{\dfrac{B^2-G'}{(A^2-G')(G+G')(G''-G')}}, \\[2ex] \alpha''' = \dfrac{\gamma''' aA}{A^2-G''} = aA\sqrt{\dfrac{B^2-G''}{(A^2-G'')(G+G'')(G'-G'')}}, \end{cases}$$

schliesslich

$$\beta' = \frac{\gamma' bB}{B^2+G},\qquad \beta'' = \frac{\gamma'' bB}{B^2-G'},\qquad \beta''' = \frac{\gamma''' bB}{B^2-G''}.$$

Dabei bleiben die Coefficienten immer reell. Von den zahlreichen Beziehungen derselben unter sich und mit den Wurzeln der Gleichungen wollen wir noch folgende hervorheben, die wir später benutzen werden.

Setzt man in der Gleichung dritten Grades (10.) für u die Wurzel G ein und multiplicirt mit $A^2B^2-G^2$, so erhält man

$$(13^a.)\qquad \frac{a^2(A^2B^2-G^2)}{A^2+G}+\frac{b^2(A^2B^2-G^2)}{B^2+G}+\frac{c_1^2(A^2B^2-G^2)}{G} = A^2B^2-G^2.$$

Nun ist

$$\frac{a^2(A^2B^2-G^2)}{A^2+G} = \frac{a^2A^2B^2-a^2G^2+a^2A^2G-a^2A^2G}{A^2+G} = \frac{a^2A^2(B^2+G)}{A^2+G}-\frac{a^2G(A^2+G)}{A^2+G}.$$

Dementsprechend sind die übrigen Glieder in $(13^a.)$ umzuformen. Man erhält daher

$$(13^b.)\qquad \frac{a^2A^2(B^2+G)}{A^2+G}-a^2G+\frac{b^2B^2(A^2+G)}{B^2+G}-b^2G+\frac{A^2B^2c_1^2}{G}-c_1^2G = A^2B^2-G^2.$$

Entwickelt man die Gleichung (10.) nach Potenzen von u, so ergiebt sich

$$u^3-(a^2+b^2+c_1^2-A^2-B^2)u^2+(A^2B^2-A^2b^2-A^2c_1^2-B^2a^2-B^2c_1^2)u-A^2B^2c_1^2 = 0.$$

Wurzeln und Coefficienten der Gleichung hängen nun durch folgende Relationen zusammen:

$$G-G'-G'' = a^2+b^2+c_1^2-A^2-B^2,$$
$$GG'G'' = A^2B^2c_1^2.$$

Daher kann man die Gleichung $(13^b.)$ in folgender Weise umformen

$$\frac{a^2A^2(B^2+G)}{A^2+G}+\frac{b^2B^2(A^2+G)}{B^2+G}-G(G-G'-G''+A^2+B^2)+G'G'' = A^2B^2-G^2$$

oder

$$(14.)\qquad \frac{a^2A^2(B^2+G)}{A^2+G}+\frac{b^2B^2(A^2+G)}{B^2+G}-(A^2+G)(B^2+G)+(G+G')(G+G'') = 0.$$

Es ergiebt sich fernerhin, dass $d\mu = \frac{1}{t}d\psi$ ist und die Grenzen 0 und 2π auch für das transformirte Integral bestehen bleiben. Wir fahren nun nach diesen Angaben in unseren eigenen Entwicklungen fort.

IV.

Die in V und V_1 enthaltenen Integrale mit der Variablen μ (Formeln (5.) und (6.)) gehen nun in folgende Form über unter Berücksichtigung der Relationen (7.) bis (13.):

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\mu}{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)^2+(\varrho_2\lambda\sin\mu-b)^2+c^2+w^2}=\int_0^{2\pi}\frac{t\,d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'+\gamma''\cos\psi+\gamma'''\sin\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}d\psi=\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'\,d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}$$

$$+\int_0^{2\pi}\frac{\gamma''\cos\psi\,d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}+\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'''\sin\psi\,d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die beiden letzten Integrale zwischen den Grenzen 0 und 2π verschwinden. Ferner

$$\int_0^{2\pi}\frac{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)\,d\mu}{(\varrho_1\lambda\cos\mu-a)^2+(\varrho_2\lambda\sin\mu-b)^2+c^2+w^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\alpha'G+\alpha''G'\cos\psi+\alpha'''G''\sin\psi}{A(G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi)}d\psi.$$

Löst man auch hier das Integral in eine Summe von drei Gliedern auf, so verschwinden ebenfalls die beiden letzten Summanden, so dass nur die beiden Integrale

$$J=\gamma'\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi},\quad J_1=-\frac{\alpha'G}{A}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}$$

weiter zu behandeln sind.

Es ist nun

$$G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi=\frac{2G+G'+G''}{2}+\frac{(G'-G'')\cos 2\psi}{2},$$

daher, wenn man noch $2\psi=\chi$ setzt,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}=\int_0^{4\pi}\frac{d\chi}{(2G+G'+G'')+(G'-G'')\cos\chi}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{(2G+G'+G'')^2-(G'-G'')^2}}\arccos\frac{(2G+G'+G'')\cos\chi+(G'-G'')}{(2G+G'+G'')+(G'-G'')\cos\chi}\right]_0^{4\pi}.$$

Durchläuft χ die Werthe von 0 bis π, so durchläuft der Cosinus des Quotienten die Werthe von $+1$ bis -1, der dazugehörige Bogen auch die Werthe von 0 bis π und so fort. Es ist daher

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{G+G'\cos^2\psi+G''\sin^2\psi}=\frac{4\pi}{\sqrt{(2G+G'+G'')^2-(G'-G'')^2}}$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{4G^2+4G(G'+G'')+4G'G''}}=\frac{2\pi}{\sqrt{(G+G')(G+G'')}}.$$

Mit Berücksichtigung der in (12.) und (13.) angegebenen Werthe für γ' und α' erhält man daher

$$J = \frac{2\pi\gamma'}{\sqrt{(G+G')(G+G'')}} = \frac{2\pi\sqrt{(A^2+G)(B^2+G)}}{(G+G')(G+G'')},$$

$$J_1 = -\frac{2\pi G\alpha'}{A\sqrt{(G+G')(G+G'')}} = -\frac{2\pi a G}{(G+G')(G+G'')}\sqrt{\frac{B^2+G}{A^2+G}},$$

und die in (5.) und (6.) verzeichneten Ausdrücke nehmen die Form an

$$(15.)\qquad V = 2\varrho_1\varrho_2\int_0^\infty dw\int_0^1 \frac{\sqrt{(A^2+G)(B^2+G)}}{(G+G')(G+G'')}\,d\lambda^2,$$

$$(16.)\qquad V_1 = -2a\varrho_1\varrho_2\int_0^\infty dw\int_0^1 \frac{G}{(G+G')(G+G'')}\sqrt{\frac{B^2+G}{A^2+G}}\,d\lambda^2.$$

V.

Wir erinnern uns, dass $A=\varrho_1\lambda$, $B=\varrho_2\lambda$, G, $-G'$, $-G''$ aber die Wurzeln der Gleichung (10.) sind, somit auch Functionen der Grösse λ. Es gelingt nun, die zu integrirenden Ausdrücke als Functionen des Quotienten $\frac{B^2+G}{A^2+G}$ darzustellen, welchen wir alsdann als neue Variable einführen.

Zunächst formen wir den Ausdruck $(G+G')(G+G'')$ um; nach (14.) ist

$$(17.)\qquad (G+G')(G+G'') = (A^2+G)(B^2+G) - \frac{a^2A^2(B^2+G)}{A^2+G} - \frac{b^2B^2(A^2+G)}{B^2+G}.$$

Da aber

$$(17^a.)\qquad \frac{a^2}{A^2+G}+\frac{b^2}{B^2+G}+\frac{c_1^2}{G} = 1$$

ist, so folgt

$$(A^2+G)(B^2+G) = a^2(B^2+G)+b^2(A^2+G)+\frac{c_1^2(A^2+G)(B^2+G)}{G}.$$

Setzt man diesen Werth in (17.) ein, so ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$(18.)\qquad (G+G')(G+G'') = \left[\frac{a^2(B^2+G)}{A^2+G}+\frac{b^2(A^2+G)}{B^2+G}\right]G+\frac{c_1^2(A^2+G)(B^2+G)}{G}.$$

Setzt man nun

$$(19.)\qquad \begin{cases} A^2+G = \varrho_1^2\lambda^2+G = p,\\ B^2+G = \varrho_2^2\lambda^2+G = q,\end{cases}$$

so ergiebt sich

$$B^2G-A^2G = pB^2-qA^2,$$

also

$$(20.)\qquad G = \frac{pB^2-qA^2}{B^2-A^2} = \frac{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}.$$

und somit

$$(G+G')(G+G'') = \left[a^2\frac{q}{p}+b^2\frac{p}{q}\right]\frac{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\frac{c_1^2pq(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}.$$

Bezeichnen wir die zu integrirenden Ausdrücke in (15.) und (16.) mit F und F_1, so ist

$$F = \frac{\sqrt{(A^2+G)(B^2+G)}}{(G+G')(G+G'')} = \frac{\sqrt{pq}}{\left(a^2\frac{q}{p}+b^2\frac{p}{q}\right)\frac{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\frac{c_1^2pq(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}}.$$

Dividirt man hier Dividendus und Divisor durch p, ausserdem im letzten Gliede des Divisors Dividendus und Divisor nochmals durch p und schreibt dann v für $q:p$, so erhält man

$$(21.)\quad \begin{cases} F = \dfrac{\sqrt{v}}{\left(a^2v+\dfrac{b^2}{v}\right)\dfrac{\varrho_2^2-v\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\dfrac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)v}{\varrho_2^2-v\varrho_1^2}} \\[2ex] \quad = \dfrac{\sqrt{v}}{v(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)}\,\dfrac{1}{\left(a^2+\dfrac{b^2}{v^2}\right)\dfrac{1}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\dfrac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-v\varrho_1^2)^2}}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$F_1 = \frac{G}{(G+G')(G+G'')}\sqrt{\frac{B^2+G}{A^2+G}} = \frac{\frac{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}.\sqrt{\frac{q}{p}}}{\left(a^2\frac{q}{p}+b^2\frac{p}{q}\right)\frac{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\frac{c_1^2pq(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{p\varrho_2^2-q\varrho_1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{q}{p}}}{\left(a^2\frac{q}{p}+b^2\frac{p}{q}\right)+\frac{c_1^2pq(\varrho_2^2-\varrho_1^2)^2}{(p\varrho_2^2-q\varrho_1^2)^2}}.$$

Dividirt man im letzten Gliede des Divisors Dividendus und Divisor durch p^2 und schreibt dann v für $q:p$, so ergiebt sich

$$F_1 = \frac{\sqrt{v}}{a^2v+\frac{b^2}{v}+\frac{c_1^2v(\varrho_2^2-\varrho_1^2)^2}{(\varrho_2^2-v\varrho_2^2)^2}}$$

und durch weitere Umformung

$$(22.)\qquad F_1 = \frac{\sqrt{v}}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2)v}\,\frac{1}{\left(a^2+\frac{b^2}{v^2}\right)\cdot\frac{1}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\frac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-v\varrho_1^2)^2}}.$$

Die letzten Umformungen in den Ausdrücken für F und F_1 wurden mit Rücksicht auf die folgenden Entwicklungen vorgenommen. Indem wir jetzt v als eine neue Variable ansehen, müssen wir nun das Differential $d\lambda^2$ durch dv ausdrücken und die Grenzen für die neue Variable bestimmen.

Nach (19.) ist

$$A^2-B^2 = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)\lambda^2 = p-q.$$

Aus Gleichung (17^a.) folgt unter Berücksichtigung des Werthes für G in (20.)

$$a^2+b^2\frac{p}{q}+\frac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{\varrho_2^2-\frac{q}{p}\varrho_1^2} = p$$

und

$$a^2\frac{q}{p}+b^2+\frac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{\varrho_2^2\frac{p}{q}-\varrho_1^2} = q,$$

folglich durch Subtraction

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\lambda^2 = a^2\left(1-\frac{q}{p}\right)+b^2\left(\frac{p}{q}-1\right)+c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\left[\frac{1}{\varrho_2^2-\frac{q}{p}\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_2^2\frac{p}{q}-\varrho_1^2}\right],$$

und setzt man $\frac{q}{p} = v$, so erhält man

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\lambda^2 = a^2(1-v)+b^2\left(\frac{1}{v}-1\right)+c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\left[\frac{1}{\varrho_2^2-v\varrho_1^2}-\frac{1}{\frac{\varrho_2^2}{v}-\varrho_1^2}\right].$$

Differentiirt man, so ergiebt sich

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{d\lambda^2}{dv} = -\left(a^2+\frac{b^2}{v^2}\right)+c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\left[\frac{\varrho_1^2}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)^2}-\frac{\varrho_2^2}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)^2}\right]$$

und schliesslich

$$(23.)\qquad d\lambda^2 = \left[\left(a^2+\frac{b^2}{v^2}\right)\frac{1}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}+\frac{c_1^2(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)^2}\right]dv.$$

Der Factor von dv ist nun derselbe, der als Divisor in den Ausdrücken für F und F_1 in (21.) und (22.) auftritt. Bezeichnen wir vorläufig die Grenzen für v mit v_0 und v_1 und setzen wir die in (21.), (22.) und (23.) erhaltenen Ausdrücke in (15.) und (16.) ein, so ergiebt sich

$$(24.)\qquad V = 2\varrho_1\varrho_2\int_0^\infty dw\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)\sqrt{v}},$$

$$(25.)\qquad V_1 = -2a\varrho_1\varrho_2\int_0^\infty dw\int_{v_0}^{v_1}\frac{1}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}\frac{dv}{\sqrt{v}}.$$

Die Integrationen nach v sind leicht auszuführen. Es ist

$$\int\frac{dv}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2v)\sqrt{v}} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\log\frac{\varrho_2+\varrho_1\sqrt{v}}{\varrho_2-\varrho_1\sqrt{v}},\qquad \int\frac{dv}{(\varrho_2^2-\varrho_1^2)\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{v}}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}.$$

Es war

$$v = \frac{q}{p} = \frac{\varrho_2^2 \lambda^2 + G}{\varrho_1^2 \lambda^2 + G}$$

und G die positive Wurzel der Gleichung (10.). Für $\lambda = 0$ ist $v_0 = 1$; dies ist die untere Grenze. Für $\lambda = 1$ bezeichnen wir die positive Wurzel der Gleichung (10.) mit s; die Gleichung lautet dann

$$(26.) \qquad \frac{a^2}{\varrho_1^2+s} + \frac{b^2}{\varrho_2^2+s} + \frac{c^2+w^2}{s} = 1;$$

es ist dann die obere Grenze für v

$$v_1 = \frac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}.$$

Somit ergiebt sich

$$(27.) \qquad V = 2\int_0^\infty \log\left[\frac{\varrho_2+\varrho_1\sqrt{\dfrac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}}}{\varrho_2-\varrho_1\sqrt{\dfrac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}}}\cdot\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_2+\varrho_1}\right]dw,$$

$$(28.) \qquad V_1 = -\frac{4\varrho_1\varrho_2 a}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}\int_0^\infty\left[\sqrt{\frac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}}-1\right]dw,$$

wobei w und s noch durch die Gleichung (26.) zusammenhängen.

VI.

Wir führen nun statt w die Variable s ein, bestimmen zu diesem Zwecke w aus Gleichung (26.) und benutzen den Buchstaben gleichzeitig als Functionszeichen. Es ist

$$(29.) \qquad w(s) = \sqrt{s\left(1-\frac{a^2}{\varrho_1^2+s}-\frac{b^2}{\varrho_2^2+s}\right)-c^2}.$$

Soll $w(s) = \infty$ werden, so muss $s = \infty$ sein; soll dagegen $w(s) = 0$ werden, so muss s einen bestimmten Werth s_0 annehmen, die positive Wurzel der Gleichung $w(s) = 0$ oder der Gleichung (26.), wenn in derselben $w = 0$ gesetzt wird:

$$1 = \frac{a^2}{\varrho_1^2+s} + \frac{b^2}{\varrho_2^2+s} + \frac{c^2}{s}.$$

Diese Gleichung hat, wie aus den *Gauss*ischen Entwicklungen hervorgeht, immer eine positive und zwei negative Wurzeln, so lange $c^2 > 0$ ist. Für den Fall, dass der Punkt P in die Ellipsenebene rückt, also $c = 0$ wird, können eine oder zwei dieser Wurzeln in Null übergehen. Dass eine der Wurzeln verschwindet, lehrt unmittelbar Gleichung (29.). Die beiden anderen liefert dann die Gleichung zweiten Grades

$$(29^a.)\qquad 1-\frac{a^2}{\varrho_1^2+s}-\frac{b^2}{\varrho_2^2+s} = 0.$$

1. Liegt der Punkt in der Ellipsenebene, aber ausserhalb der Ellipse, so hat Gleichung (29^a.), da $\frac{a^2}{\varrho_1^2}+\frac{b^2}{\varrho_2^2} > 1$ ist, immer noch eine positive Wurzel. Es muss daher jene Wurzel der Gleichung dritten Grades, die in Null überging, eine der beiden negativen Wurzeln gewesen sein.

2. Rückt der Punkt in der Ellipsenebene an die Ellipse heran und fällt schliesslich mit einem Punkte der Grenzlinie zusammen, so wird die positive Wurzel der Gleichung (29^a.) immer kleiner, bis im Grenzfall die Gleichung in die Gleichung der Ellipse übergeht, d. h. die positive Wurzel derselben und auch der Gleichung dritten Grades wird gleich Null.

3. Liegt der Punkt ausserhalb der Ellipsenebene, jedoch so, dass der Fusspunkt des Lothes c in die Ellipse fällt, so hat Gleichung (29^a.), da $\frac{a^2}{\varrho_1^2}+\frac{b^2}{\varrho_2^2} < 1$ ist, überhaupt keine positive Wurzel mehr. Rückt dann der Punkt in die Ellipse, wird also $c = 0$, so muss von den drei Wurzeln der Gleichung (29.) es hier ebenfalls die positive Wurzel sein, die verschwindet.

Wenn also der angezogene Punkt auf der Grenzlinie oder innerhalb der Fläche liegt, ist $s_0 = 0$ zu setzen.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$f(s) = \log\left[\frac{\varrho_2+\varrho_1\sqrt{\dfrac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}}}{\varrho_2-\varrho_1\sqrt{\dfrac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}}}\cdot\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_2+\varrho_1}\right],$$

so ist nach (27.)

$$V = 2\int_{s_0}^{\infty} f(s)\frac{dw}{ds}\,ds.$$

Integriren wir hier durch Theile, so erhält man

$$(30.)\qquad V = 2[w(s)f(s)]_{s_0}^{\infty}-2\int_{s_0}^{\infty} w(s)\frac{df(s)}{ds}\,ds.$$

Es lässt sich nachweisen, dass das vom Integralzeichen freie Glied verschwindet. Für $s = s_0$ ist $w = 0$, $f(s)$ hat einen endlichen Werth, also verschwindet der ganze Klammerausdruck. Für $s = \infty$ nimmt er allerdings die Form $\infty . 0$ an. Um den wahren Werth zu finden, bestimme man

$$\lim_{s=\infty} \frac{\frac{df(s)}{ds}}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{w(s)}\right)}.$$

Reducirt man den Ausdruck auf einen einfachen Quotienten, so ergiebt sich, dass der Divisor nach s von höherem Grade ist als der Dividendus, der Grenzwerth des Quotienten somit gleich Null ist.

Es ist

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{d\log(\varrho_2\sqrt{\varrho_1^2+s}+\varrho_1\sqrt{\varrho_2^2+s})}{ds} - \frac{d\log(\varrho_2\sqrt{\varrho_1^2+s}-\varrho_1\sqrt{\varrho_2^2+s})}{ds}$$

$$= -\frac{\varrho_1\varrho_2}{s\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}}.$$

Setzt man diesen Werth in (30.) ein, so ergiebt sich

$$(31.) \qquad V = 2\varrho_1\varrho_2\int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{s\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}} ds \text{ *)}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$f_1(s) = \sqrt{\frac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}} - 1,$$

so ergiebt sich nach (28.)

$$V_1 = -\frac{4\varrho_1\varrho_2 a}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}\int_{s_0}^{\infty} f_1(s)\frac{dw}{ds} ds,$$

oder nach einer Integration durch Theile

$$V_1 = -\frac{4\varrho_1\varrho_2 a}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}[w(s)f_1(s)]_{s_0}^{\infty} + \frac{4\varrho_1\varrho_2 a}{\varrho_2^2-\varrho_1^2}\int_{s_0}^{\infty} w(s)\frac{df_1(s)}{ds} ds.$$

Auch hier kann man nachweisen, dass das vom Integralzeichen freie Glied verschwindet. Es ist ferner

$$\frac{df_1(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\sqrt{\frac{\varrho_2^2+s}{\varrho_1^2+s}} - 1\right] = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_2^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2+s)\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}},$$

daher

$$(32.) \qquad V_1 = -2\varrho_1\varrho_2 a\int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{(\varrho_1^2+s)\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}} ds.$$

---

*) Dies ist der Ausdruck für das Potential einer elliptischen Fläche. Vergl. *F. Grube* „Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids", dieses Journal, Bd. 69, S. 6.

VII.

Nun war nach (4.) der Ausdruck für das Potential des Ringkörpers

$$U = \int_0^{2\pi} Vm\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} V_1\, d\varphi.$$

Setzt man hier die in (31.) und (32.) gefundenen Ausdrücke für V und V_1 ein, indem man zugleich beachtet, dass nach (3.) $a = m\cos\varphi - r$ ist, so findet man

$$U = 2\varrho_1\varrho_2 \int_{s_0}^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{w(s)}{\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}} \left[\frac{m\cos\varphi}{s} - \frac{m\cos\varphi - r}{\varrho_1^2+s}\right] ds,$$

oder nach weiterer Umformung

$$(33.)\qquad U = 2\varrho_1\varrho_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{(\varrho_1^2 m\cos\varphi + rs)w(s)}{s(\varrho_1^2+s)\sqrt{(\varrho_1^2+s)(\varrho_2^2+s)}} ds.$$

Wir führen nun in $w(s)$ die Grösse φ sowohl wie die auf das ursprüngliche rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Punktes P ein durch die Relationen (3.): $a = m\cos\varphi - r$, $c = m\sin\varphi$, $m^2 = \alpha^2+\gamma^2$, $b = \beta$. Dann ist nach (29.)

$$\frac{w^2(s)}{s} = 1 - \frac{a^2}{\varrho_1^2+s} - \frac{b^2}{\varrho_2^2+s} - \frac{c^2}{s} = 1 - \frac{m^2\cos^2\varphi - 2mr\cos\varphi + r^2}{\varrho_1^2+s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2+s} - \frac{m^2\sin^2\varphi}{s},$$

und nach weiterer Umformung

$$\frac{w^2(s)}{s} = \frac{(\varrho_1^2 m\cos\varphi + rs)^2}{\varrho_1^2 s(\varrho_1^2+s)} + 1 - \frac{r^2}{\varrho_1^2} - \frac{m^2}{s} - \frac{\beta^2}{\varrho_2^2+s},$$

daher

$$w(s) = \sqrt{\frac{(\varrho_1^2 m\cos\varphi + rs)^2}{\varrho_1^2(\varrho_1^2+s)} - \frac{(r^2-\varrho_1^2)s}{\varrho_1^2} - m^2 - \frac{\beta^2 s}{\varrho_2^2+s}}.$$

Setzt man nun $\varrho_2^2 : \varrho_1^2 = k$, also $\varrho_2^2 = \varrho_1^2 k$, führt statt s die Variable s' ein durch die Substitution $s = \varrho_1^2 s'$ und schreibt dann wieder s statt s', so wird zunächst

$$(34.)\qquad w(s) = \sqrt{\frac{(m\cos\varphi + rs)^2(s+k) - \Phi(s)}{(s+1)(s+k)}},$$

wobei

$$\Phi(s) = (\alpha^2+\gamma^2)(s+1)(s+k) + \beta^2 s(s+1) + (r^2-\varrho_1^2)s(s+1)(s+k)$$

ist, und der Ausdruck für U geht über in folgenden:

$$(35.)\qquad U = 2k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{s_0}^{\infty} \frac{(m\cos\varphi + rs)\sqrt{(m\cos\varphi + rs)^2(s+k) - \Phi(s)}}{s(s+1)^2(s+k)} ds,$$

worin $\Phi(s)$ den in (34.) angegebenen Werth besitzt und s_0 nun die positive

Wurzel der Gleichung

$$(m\cos\varphi+rs)^2(s+k)-\Phi(s) = 0$$

ist.

Dies ist der Ausdruck für das Potential eines homogenen Ringkörpers mit elliptischem Querschnitt, der für $k=1$ in den von mir früher entwickelten Ausdruck für einen Ringkörper mit Kreisquerschnitt übergeht. Die partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten α, β, γ ergeben die Componenten der Anziehung in der Richtung der Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems.

Am einfachsten gestaltet sich der Ausdruck für die H-Componente, da nur $\Phi(s)$ die Grösse β enthält. Man erhält, wenn die Componente mit B bezeichnet wird,

$$(36.)\quad B = -2k\beta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{s_0}^{\infty}\frac{(m\cos\varphi+rs)ds}{(s+1)(s+k)\sqrt{(m\cos\varphi+rs)^2(s+k)-\Phi(s)}}.$$

Es vereinfacht sich der Ausdruck für den speciellen Fall, dass der angezogene Punkt in der Ringaxe liegt. Dann wird $m=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}=0$, s_0, die positive Wurzel der Gleichung (34.), wird von φ unabhängig und man kann daher ohne weiteres die Reihenfolge der Integrationen umkehren und die Integration nach φ ausführen. Man erhält dann ein einfaches elliptisches Integral, nämlich

$$B = -4\pi rk\beta\int_{s_0}^{\infty}\frac{sds}{(s+1)(s+k)\sqrt{r^2s^2(s+k)-\Phi(s)}},$$

wobei $\Phi(s) = \beta^2 s(s+1)+(r^2-\varrho_1^2)s(s+1)(s+k)$ ist.

Dieser Ausdruck stellt zugleich die Grösse der ganzen Anziehung dar. Durch weitere Umformungen ergiebt sich

$$B = -4\pi rk\beta\int_{s_0}^{\infty}\frac{s}{(s+1)(s+k)}\,\frac{ds}{\sqrt{s[\varrho_1^2(s+1)(s+k)-r^2(s+k)-\beta^2(s+1)]}}.$$

Hierbei ist, da der Punkt ein äusserer ist (s. Abschnitt VI, S. 158, Fall 1.), s_0 die positive Wurzel der Gleichung zweiten Grades

$$\varrho_1^2(s+1)(s+k)-r^2(s+k)-\beta^2(s+1) = 0.$$

Nennen wir die andere Wurzel s_1, so kann man schreiben

$$B = -4\pi rk\beta\int_{s_0}^{\infty}\frac{s}{(s+1)(s+k)}\,\frac{ds}{\sqrt{s(s-s_0)(s-s_1)}}.$$