Ueber projective involutorische Gebilde.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

In diesem Journale hat Herr *Reye* durch zwei Abhandlungen mit der Veröffentlichung seiner Untersuchungen über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel und Räume begonnen *). In einer Uebersicht über seine Resultate hat er ein merkwürdiges allgemeines Ergebniss seiner Untersuchungen mitgetheilt, dass nämlich ein gewisser Dualismus zwischen den linearen Mannigfaltigkeiten von ∞^n und ∞^{6-n} Büscheln, zwischen denjenigen von ∞^n und ∞^{10-n} Ebenenbündeln und schliesslich zwischen denen von ∞^n und ∞^{14-n} Ebenenräumen besteht **). Dieser Dualismus, welchen Herr *Reye* neuerdings näher begründet hat, kann auch zurückgeführt werden auf eine gewisse Lage reciproker rationaler Gebilde erster Stufe von den Ordnungen eins bis drei, welche *involutorisch* genannt werden kann und mit der Apolarität in innigem Zusammenhang steht. Es soll im Folgenden auf diese invariante Beziehung und ihre Bedeutung für den *Reye*schen Dualismus hingewiesen werden. Zum Schlusse gebe ich eine Erweiterung des Dualismus auf lineare Mannigfaltigkeiten projectiver oder collinearer Gebilde von höheren Elementen.

§ 1.

Gebilde erster Ordnung.

1. Sind a und b zwei Punkte des Raumes, α und β irgend zwei Ebenen, so möge eine projective Beziehung zwischen der Punktreihe $\overline{ab}$ und dem Ebenenbüschel $\overline{\alpha\beta}$ bestimmt sein dadurch, dass bei veränderlichem λ

*) Vgl. *Reye:* Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. Dieses Journal, Bd. 104, S. 211 und Bd. 106, S. 30.

**) Vergl. Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akademie Oktober 1889.

$$(1.)\qquad \begin{cases} \text{der Punkt} & x_i = a_i+\lambda b_i \\ \text{der Ebene} & u_i = \alpha_i+\lambda\beta_i \end{cases} \qquad (i=1,2,3,4)$$

zugewiesen ist.

Wir suchen die Bedingung auf, unter welcher beide involutorisch liegen. Liegt der Punkt

$$x_i = a_i+\nu b_i$$

in der Ebene

$$u_i = \alpha_i+\lambda\beta_i,$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$(2.)\qquad (a\alpha)+\lambda(a\beta)+\nu(b\alpha)+\lambda\nu(b\beta) = 0,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\sum_1^4{}_i a_i\alpha_i = (a\alpha) \quad \text{etc.}$$

Ist die durch (2.) bestimmte projective Beziehung eine involutorische, so müssen die Coefficienten von λ und ν einander gleich sein, und wir finden als Bedingung für die involutorische Lage der Punktreihe zum Ebenenbüschel:

$$(3.)\qquad (a\beta)-(b\alpha) = 0.$$

Unter den ∞^7 zu der Punktreihe $x_i = a_i+\lambda b_i$ projectiven Ebenenbüscheln giebt es daher ∞^6, welche zu ihr involutorisch sind.

2. Hat man $n+1$ unter einander projective Punktreihen:

$$\begin{aligned} x_i &= a_i+\lambda b_i, \\ x_i' &= a_i'+\lambda b_i', \\ &\dots\dots\dots \\ x_i^{(n)} &= a_i^{(n)}+\lambda b_i^{(n)}, \end{aligned}$$

so bestimmen diese nach ***Reye*** eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n projectiven Punktreihen. Sind $p, p', \dots p^{(n)}$ beliebige Constanten, so ist die allgemeine Darstellung einer dieser Punktreihen:

$$x_i = \Sigma p^{(\tau)} a_i^{(\tau)}+\lambda\Sigma p^{(\tau)} b_i^{(\tau)}.$$

Für die zu allen diesen Punktreihen involutorischen Ebenenbüschel gelten die $n+1$ Gleichungen:

$$(a^{(\tau)}\beta)-(b^{(\tau)}\alpha) = 0.$$

Aus $7-n$ der Ebenenbüschel können alle übrigen linear zusammengesetzt werden, und sie bilden somit eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{6-n} projectiven Ebenenbüscheln. Aus ihnen folgen wieder rückwärts die ∞^n projectiven Punktreihen der ersten Mannigfaltigkeit.

Wir haben so den ***Reye***schen Satz: Die Theorie der linearen Mannigfaltigkeit von ∞^n projectiven Punktreihen ist identisch mit der Theorie der linearen Mannigfaltigkeit von ∞^{6-n} projectiven Ebenenbüscheln.

3. Giebt es unter den Ebenenbüscheln specielle, welche sich auf eine einzige Ebene α reduciren, so ist:

$$\beta_i = \pi\alpha_i$$

und folglich nach (3.):

$$(\pi a^{(\tau)} - b^{(\tau)}, \alpha) = 0,$$

d. h. die Ebene α enthält entsprechende Punkte aller projectiven Punktreihen oder stützt dieselben. Man findet z. B.: Die speciellen Ebenenbüschel einer linearen Mannigfaltigkeit von ∞^4 projectiven Ebenenbüscheln bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung; enthält die Mannigfaltigkeit ∞^3 projective Ebenenbüschel, so giebt es nur vier specielle. Weiter einzugehen auf diese Beziehungen ist hier nicht nothwendig, da ich auf die *Reye*schen Arbeiten verweisen kann.

4. Die zu den Punktreihen involutorischen Ebenenbüschel bilden dieselbe Mannigfaltigkeit, wenn wir in jedem dieselbe lineare Transformation des Parameters λ vornehmen. Entsprechende Ebenen dieser Büschel werden dann dargestellt durch:

$$u_i = (m_1\alpha_i + m_2\beta_i) + \lambda(n_1\alpha_i + n_2\beta_i);$$

die Gleichung (3.) geht daher über in:

$$(4.)\qquad n_1(a\alpha) + n_2(a\beta) - m_1(b\alpha) - m_2(b\beta) = 0,$$

wobei m_1, m_2, n_1, n_2 beliebige Constanten sind, deren Determinante nicht verschwindet. Diese Gleichungen (4.) bestimmen dieselbe lineare Mannigfaltigkeit projectiver Ebenenbüschel, nur ist von der speciellen involutorischen Lage derselben zu den Punktreihen abgesehen worden.

§ 2.

Gebilde zweiter Ordnung.

1. Durch den Parameter λ sind die Punktreihe und der Ebenenbüschel zweiter Ordnung

$$(1.)\qquad \begin{cases} x_i = a_i + 2\lambda b_i + \lambda^2 c_i, \\ u_i = \alpha_i + 2\lambda\beta_i + \lambda^2\gamma_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

projectiv auf einander bezogen. Es giebt nun eine ausgezeichnete Lage, in welcher sich diese projectiven Gebilde befinden können. Wir bilden die erste Osculante der Punktreihe für den Parameterwerth ϱ und die erste

Osculante des Ebenenbüschels für den Parameterwerth ν

$$x'_i = (a_i+\varrho b_i)+\lambda(b_i+\varrho c_i),$$
$$u'_i = (\alpha_i+\nu\beta_i)+\lambda(\beta_i+\nu\gamma_i)$$

und fragen nach der Beziehung zwischen ϱ und ν für den Fall, dass diese Gebilde erster Ordnung involutorisch liegen. Es folgt (§ 1 (3.)):

$$(a+\varrho b,\ \beta+\nu\gamma)-(b+\varrho c,\ \alpha+\nu\beta) = 0.$$

Diese bilineare Gleichung zwischen ϱ und ν liefert zwischen den Gebilden zweiter Ordnung eine neue projective Beziehung der Art, dass die Osculanten für entsprechende Elemente involutorisch liegen. Sollen ϱ und ν vertauschbar, oder auf jedem der Gebilde zweiter Ordnung eine Involution bestimmt sein, so folgt:

$$(b\beta)-(c\alpha) = (a\gamma)-(b\beta)$$

oder

$$(a\gamma)-2(b\beta)+(c\alpha) = 0. \tag{2.}$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so sagen wir: Die projectiven Gebilde zweiter Ordnung sind in involutorischer Lage oder involutorisch auf einander bezogen.

2. Da es ∞^{11} zu der Punktreihe zweiter Ordnung projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung giebt, so finden wir ∞^{10} zu einer Punktreihe zweiter Ordnung involutorische Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. $n+1$ linear unabhängige projective Punktreihen bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n solcher projectiven Punktreihen, zu welchen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{10-n} projectiven Ebenenbüscheln zweiter Ordnung involutorisch liegt. Die projectiven Punktreihen bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n collinearen ebenen Punktfeldern und die projectiven Ebenenbüschel eine solche von ∞^{10-n} collinearen Ebenenbündeln. Die Theorieen beider sind identisch. Hiermit ist der *Reye*sche Satz über den Dualismus dieser Mannigfaltigkeiten bewiesen.

3. Es möge einer der Ebenenbüschel zweiter Ordnung und damit auch der ihn enthaltende Ebenenbündel sich zweifach specialisiren, d. h. auf eine Ebene α reduciren. Dann ist:

$$\beta_i = \pi\alpha_i; \quad \gamma_i = \tau\alpha_i.$$

Nach Gleichung (2.) folgt:

$$(\pi a-2\tau b+c,\ \alpha) = 0,$$

d. h. die Ebene α enthält entsprechende Punkte aller der durch die Punktreihen zweiter Ordnung bestimmten ebenen collinearen Punktfelder. Wir finden z. B.: Die zweifach specialisirten Ebenenbündel einer linearen Mannigfaltigkeit von ∞^8 collinearen Ebenenbündeln umhüllen eine Fläche dritter Klasse.

4. Die Correlation, welche durch eine Punktreihe zweiter Ordnung und einen ihr involutorischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung zwischen dem Punktfelde des ersten und dem Bündel des zweiten bestimmt wird, ist nun keine specielle, sondern ist nur specialisirt hinsichtlich der Punktreihe und deren Parameterbestimmung. Nimmt man in dem Bündel eine collineare Transformation vor, so dass dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung:

$$u_i = \alpha_i + 2\lambda\beta_i + \lambda^2 c_i$$

nun der Büschel:

$$\begin{aligned} v_i = {} & m_1\alpha_i + m_2\beta_i + m_3\gamma_i \\ & + 2\lambda(n_1\alpha_i + n_2\beta_i + n_3\gamma_i) \\ & + \lambda^2(p_1\alpha_i + p_2\beta_i + p_3\gamma_i) \end{aligned}$$

entspricht, so erhalten wir die allgemeine Beziehung zwischen den Grössen a_i, b_i, c_i und α_i, β_i, γ_i in

$$\begin{aligned} & p_1(a\alpha) + p_2(a\beta) + p_3(a\gamma) \\ & -2n_1(b\alpha) - 2n_2(b\beta) - 2n_3(b\gamma) \\ & + m_1(c\alpha) + m_2(c\beta) + m_3(c\gamma) = 0, \end{aligned}$$

welche ebenfalls die ∞^{10} collinearen Ebenenbündel bestimmt. Dabei sind die Zahlen $p_1, \ldots m_3$ ganz beliebige Constanten, deren Determinante nicht verschwindet.

5. In einer Ebene seien zwei projective Punktreihen zweiter Ordnung gegeben. Es soll die Bedingung aufgesucht werden, unter welcher die erste Punktreihe zu dem die zweite Punktreihe einhüllenden und ihr perspectiven Büschel zweiter Ordnung involutorisch liegt.

Die Punktreihen seien gegeben durch:

$$x_i = a_i + 2b_i\lambda + c_i\lambda^2$$

und

$$y_i = a_i' + 2b_i'\lambda + c_i'\lambda^2 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dann ist ein Strahl des Büschels gegeben durch:

$$[xa'b'] + \lambda[xa'c'] + \lambda^2[xb'c'] = 0,$$

wobei:

$$[x a' b'] = \begin{vmatrix} x_1 & a_1' & b_1' \\ x_2 & a_2' & b_2' \\ x_3 & a_3' & b_3' \end{vmatrix}$$

ist. Für die involutorische Lage dieses Büschels zu der ersten Punktreihe folgt dann:

$$[c a' b'] - [b a' c'] + [a b' c'] = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Invariante der beiden projectiven Punktreihen zweiter Ordnung, und eine zweite Bedeutung derselben ergiebt sich, wenn wir in der durch die beiden Punktreihen bestimmten linearen Mannigfaltigkeit von ∞^1 Punktreihen diejenigen aufsuchen, welche sich auf eine Gerade reduciren. Ist τ eine Veränderliche, so ist der allgemeine Ausdruck für eine Punktreihe dieser Mannigfaltigkeit:

$$X_i = x_i + \tau y_i = (a_i + \tau a_i') + 2\lambda (b_i + \tau b_i') + \lambda^2 (c_i + \tau c_i').$$

Soll diese Punktreihe eine Gerade sein, so folgt:

$$[a + \tau a',\ b + \tau b',\ c + \tau c'] = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichung in:

$$A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 = 0,$$

so ist die Bedeutung der Coefficienten folgende:

$A = 0$ resp. $D = 0$ sagen aus, dass die erste resp. die zweite Punktreihe specialisirt ist. $B = 0$ ist die Bedingung dafür, dass der Büschel zweiter Ordnung, welcher der ersten Punktreihe umschrieben und zu ihr perspectiv ist, involutorisch zur zweiten Punktreihe liegt; Analoges sagt $C = 0$.

§ 3.

Gebilde dritter Ordnung.

1. Durch den Parameter λ sind die Punktreihe dritter Ordnung:

$$x_i = a_i + 3b_i\lambda + 3c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und der Ebenenbüschel dritter Ordnung:

$$u_i = \alpha_i + 3\beta_i\lambda + 3\gamma_i\lambda^2 + \delta_i\lambda^3$$

projectiv auf einander bezogen. Wir suchen solche erste Osculanten beider Gebilde auf, welche involutorisch liegen und bilden zunächst:

$$x_i' = (a_i + \varrho b_i) + 2\lambda (b_i + \varrho c_i) + \lambda^2 (c_i + \varrho d_i)$$

und

$$u_i' = (\alpha_i + \nu\beta_i) + 2\lambda (\beta_i + \nu\gamma_i) + \lambda^2 (\gamma_i + \nu\delta_i).$$

Für die involutorische Lage dieser beiden Gebilde zweiter Ordnung folgt nun (§ 2 Gleichung (2.)):

$$(a+\varrho b,\ \gamma+\nu\delta)-2(b+\varrho c,\ \beta+\nu\gamma)+(c+\varrho d,\ \alpha+\nu\beta) = 0.$$

Hierdurch sind zusammengehörende Werthe von ϱ und ν bestimmt. Sollen sie involutorisch einander entsprechen, so müssen die Coefficienten von ϱ und ν einander gleich sein. Also:

$$(a\delta)-2(b\gamma)+(c\beta) = (b\gamma)-2(c\beta)+(d\alpha)$$

oder:

$$(1.)\qquad (a\delta)-3(b\gamma)+3(c\beta)-(d\alpha) = 0.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so sollen die beiden projectiven Gebilde dritter Ordnung *involutorisch* zu einander heissen.

2. Da es ∞^{15} zu der Punktreihe dritter Ordnung projective Ebenenbüschel dritter Ordnung giebt, so giebt es ∞^{14} zu einer Punktreihe dritter Ordnung involutorische Ebenenbüschel dritter Ordnung, welche eine lineare Büschelmannigfaltigkeit dritter Ordnung bilden. $n+1$ linear unabhängige projective Punktreihen dritter Ordnung bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n projectiven Punktreihen, zu welchen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{14-n} projectiven Ebenenbüscheln dritter Ordnung involutorisch liegt.

Die projectiven Punktreihen bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n collinearen Punkträumen und die Ebenenbüschel eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{14-n} collinearen Ebenenräumen. Die Theorieen beider sind identisch. Hiermit ist auch der *Reye*sche Satz über den Dualismus dieser Mannigfaltigkeiten erwiesen.

3. Ist ein Ebenenbüschel dritter Ordnung und somit auch der ihn enthaltende Ebenenraum dreifach specialisirt, oder reducirt er sich auf *eine* Ebene α, so ist:

$$\beta_i = \pi\alpha_i;\quad \gamma_i = \tau\alpha_i;\quad \delta_i = \sigma\alpha_i,$$

und Gleichung (1.) giebt:

$$(\sigma a-3\tau b+3\pi c-d,\ \alpha) = 0,$$

d. h. die Ebene α enthält entsprechende Punkte aller der durch die Punktreihen dritter Ordnung bestimmten collinearen Punkträume.

4. Die Correlation, welche durch eine Punktreihe dritter Ordnung und einen zu ihr involutorischen Ebenenbüschel dritter Ordnung zwischen dem Punktraume des ersten und dem Ebenenraume des zweiten bestimmt ist, ist nun keine specielle, sondern nur specialisirt hinsichtlich der Punkt-

reihe und deren Parameterbestimmung. Wird im Innern des Ebenenraumes eine collineare Transformation vorgenommen, so geht die Gleichung (1.) in die allgemeinere:

$$\Sigma m(h\eta) = 0$$

über, wobei die m beliebige Constanten sind, h alle Werthe von a, b, c, d und η alle Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durchläuft.

§ 4.

Gebilde höherer Ordnung.

Eine Punktreihe $n$ter Ordnung und ein ihr projectiver Ebenenbüschel $n$ter Ordnung:

$$x_i = a_{n,i} + n a_{n-1,i}\lambda + \binom{n}{2} a_{n-2,i}\lambda^2 + \cdots + a_{0,i}\lambda^n$$

und

$$u_i = \alpha_{n,i} + n\alpha_{n-1,i}\lambda + \cdots + \alpha_{0,i}\lambda^n$$

sind in involutorischer Lage, wenn die Gleichung:

$$\Sigma(-1)^p \binom{n}{p} (a_p \alpha_{n-p}) = 0$$

erfüllt ist, wobei

$$(a_p \alpha_{n-p}) = \sum_1^4{}_i\, a_{p,i}\alpha_{n-p,i}$$

bedeutet.

Die Parameter der ersten Osculanten dieser Gebilde, welche involutorisch liegen, sind dann involutorisch gepaart.

Die Theorie dieser involutorischen rationalen Gebilde erster Stufe umfasst die Theorie der linearen Mannigfaltigkeiten von Punktreihen, Punktfeldern und Punkträumen, sowie deren reciproke Gebilde, wenn $n = 1, 2, 3$ genommen wird. Das Gebiet der involutorischen Gebilde erstreckt sich aber für $n > 3$ auf ein Feld, welches einen wichtigen Theil der Theorie der höheren rationalen Curven bildet.

§ 5.

Erweiterung des *Reye*schen Dualismus.

1. Der soeben erörterte Dualismus erstreckt sich auch auf lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Gebilde, deren Elemente, anstatt Ebenen und Punkte, Flächen $n$ter Ordnung und Klasse, Kugeln und lineare Complexe

sind, überhaupt auf Mannigfaltigkeiten von Gebilden solcher Elemente, welche mit gleichartigen oder reciproken in einer invarianten Beziehung stehen können, deren Ausdruck durch eine bilineare Gleichung zwischen den Coordinaten der Elemente gegeben ist. Für Punkt und Ebene haben wir als invariante Beziehung die vereinigte Lage derselben, deren Gleichung durch

$$\sum_1^4 u_i x_i = 0$$

bestimmt wird.

Eine Fläche *n*ter Ordnung und eine solche *n*ter Klasse können apolar zu einander sein*); zwei Kugeln orthogonal, zwei lineare Complexe können nach der Ausdrucksweise des Herrn *Reye***) einander stützen oder nach derjenigen des Herrn *F. Klein****) zu einander involutorisch liegen.

2. Betrachten wir z. B. zwei lineare Complexe, deren Coordinaten, wie sie von Herrn *Reye* eingeführt worden sind, durch $x_1, x_2, \dots x_6$ resp. $u_1, u_2, \dots u_6$ bezeichnet werden mögen. Dann kann die Bedingung für die involutorische Lage beider Complexe geschrieben werden:

$$(1.)\qquad \sum_1^6{}_i x_i u_i = (xu) = 0.$$

Es seien nun die Complexe x und u entsprechende Elemente zweier projectiven Complexbüschel, so dass:

$$(2.)\qquad \begin{cases} x_i = a_i + \lambda b_i \\ u_i = \alpha_i + \lambda \beta_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots 6)$$

ist.

Der Complex $v_i = \alpha_i + \nu\beta_i$ des zweiten Complexbüschels möge auf dem Complex $x_i = a_i + \lambda b_i$ ruhen, dann ist:

$$(a + \lambda b,\ \alpha + \nu\beta) = 0.$$

Sind λ und ν in dieser Gleichung vertauschbar, so folgt:

$$(3.)\qquad (a\beta) - (b\alpha) = 0.$$

Ist die letztere Gleichung erfüllt, so heissen die beiden Complexbüschel (2.) zu einander *involutorisch*.

---

*) S. *Rosanes:* Ueber ein Princip der Zuordnung algebr. Formen. Dieses Journal Bd. 76, S. 312 und *Reye:* Erweiterung der Polarentheorie. Dieses Journal Bd. 78, S. 97.

**) *Reye:* Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe. Dieses Journal Bd. 95, S. 330.

***) *F. Klein:* Zur Theorie der Liniencomplexe. Math. Ann. Bd. 2, S. 198.

Hat man $n+1$ projective Complexbüschel, so liefern diese eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^n projectiven Complexbüscheln, zu welchen eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{10-n} projectiven Complexbüscheln involutorisch ist. Die Theorieen beider Mannigfaltigkeiten sind identisch.

Reducirt sich ein Büschel der zweiten Mannigfaltigkeit auf einen einzigen Complex α, so ist:

$$\beta_i = \pi\alpha_i,$$

und die Gleichung (3.) giebt:

$$(a\pi - b,\ \alpha) = 0,$$

d. h. der Complex α ruht auf ∞^n einander entsprechenden Complexen der ersten Mannigfaltigkeit.

3. Collineare Complexbündel leiten wir wieder ab aus projectiven Complexbüscheln zweiter Ordnung. Sind zwei derselben gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_i + 2\lambda b_i + \lambda^2 c_i, \\ u_i &= \alpha_i + 2\lambda\beta_i + \lambda^2\gamma_i, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

so heissen sie *involutorisch,* wenn die Gleichung:

$$(a\gamma) - 2(b\beta) + (c\alpha) = 0$$

erfüllt ist.

Wir finden so ähnlich wie früher: Die Theorie einer linearen Mannigfaltigkeit von ∞^n collinearen Complexbündeln ist identisch mit derjenigen einer linearen Mannigfaltigkeit von ∞^{16-n} collinearen Complexbündeln.

Diese Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, wie der von Herrn *Reye* gefundene Dualismus zwischen linearen Mannigfaltigkeiten projectiver resp. collinearer Punkt- und Ebenengebilde übertragen werden kann auf lineare Mannigfaltigkeiten von projectiven resp. collinearen Gebilden höherer Elemente.

Aachen, December 1889.