Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0107
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0019
LOG Titel: Das Interpolationsproblem für elliptische Functionen.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Das Interpolationsproblem für elliptische Functionen.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Wenn x, y zwei durch eine Gleichung ϱten Ranges verbundene Variable sind, so enthält die allgemeine rationale Function $n$ten Grades von x, y:

$$z = R(x, y)$$

$2n-\varrho+1$ willkürliche Coefficienten. Man kann deshalb dieses z der Bedingung unterwerfen, dass es in $2n-\varrho+1$ gegebenen Punkten des Gebildes beliebig vorgeschriebene Werthe erhalten soll. Ist $\varrho = 0$, so ist hierdurch z eindeutig bestimmt. Aber schon im Falle $\varrho = 1$ wird man auf eine quadratische Gleichung geführt, sodass zwei verschiedene z existiren, die den gegebenen Bedingungen genügen.

Wir beschränken uns auf diesen Fall $\varrho = 1$ und fassen x, y, sowie $z = R(x, y)$ als elliptische Functionen des zugehörigen Integrals erster Gattung, u, auf. Es ist zweckmässig, für z die Form eines Quotienten zweier Thetaproducte zu wählen:

$$z = C\cdot\frac{\Theta(u-a_1)\,\Theta(u-a_2)\dots}{\Theta(u-b_1)\,\Theta(u-b_2)\dots}\text{*)}.$$

Eine solche Function

$$A(u) = C.\Theta(u-a_1)\Theta(u-a_2)\dots$$

wollen wir kurz eine ganze Function nennen; die Anzahl der Factoren nennen wir ihren Grad, und die Summe

$$a = a_1+a_2+a_3+\cdots,$$

deren Werth das periodische Verhalten von $A(u)$ bestimmt, bezeichnen wir als das charakteristische Argument oder kurz die Charakteristik von $A(u)$. Eine elliptische Function ist dann ein Bruch, bei dem Zähler und Nenner von gleichem Grade und gleicher Charakteristik sind.

Aber wir wollen allgemeiner Quotienten betrachten, bei denen Zähler und Nenner von verschiedenem Grade und verschiedener Charakteristik sein

*) Unter $\Theta(u)$ verstehe ich die ungerade elliptische Thetafunction.

dürfen. Unter der Charakteristik des Bruchs verstehen wir dann die Differenz der Charakteristiken von Zähler und Nenner. Wir stellen uns die Aufgabe:

Eine gebrochene Function $y = \varphi(u)$ von vorgeschriebener Charakteristik d zu bestimmen, in der der Zähler vom $m$ten, der Nenner vom $n$ten Grade sein soll, und die für $m+n$ gegebene Werthe des Arguments u_1, u_2, etc. die gleichfalls vorgeschriebenen Werthe y_1, y_2, etc. annimmt.

Nehmen wir an, das charakteristische Argument des Zählers sei bekannt: a, dann ist das des Nenners $b = a-d$. Unter dieser Voraussetzung ist es leicht, die Function $\varphi(u)$ zu bilden, und man braucht nur $m+n-1$ von den $m+n$ Bedingungsgleichungen. Denn es lassen sich dann m linear unabhängige Functionen $m$ten Grades:

$$A_1(u), \quad A_2(u), \quad \ldots \quad A_m(u)$$

bilden, welche die Charakteristik a haben, und ebenso n Functionen $n$ten Grades mit der Charakteristik b:

$$B_1(u), \quad B_2(u), \quad \ldots \quad B_n(u).$$

Dann ist die gesuchte Function $\varphi(u)$ jedenfalls der Quotient zweier Aggregate:

$$\begin{aligned} A(u) &= cA_1(u)+c_2A_2(u)+\cdots, \\ B(u) &= c_1'B_1(u)+c_2'B_2(u)+\cdots, \end{aligned}$$

und jede der Bedingungen $y_\nu = \varphi(u_\nu)$, oder:

$$A(u_\nu) = y_\nu B(u_\nu)$$

giebt eine lineare Gleichung zur Bestimmung der $m+n$ Coefficienten c, c'. Da aber diese Gleichungen homogen sind, so ist eine zuviel vorhanden; diese giebt dann die Bestimmung von a. Wir werden hiernach die Gleichung, der a genügen muss, in der Form

$$\Delta = 0$$

erhalten, wo Δ eine Determinante aus $n+m$ Reihen bedeutet. Dieses Δ fassen wir auf als Function der einzelnen y_ν. Sie ist offenbar linear in Bezug auf jedes; ferner ist sie homogen und vom $n$ten Grade in Bezug auf das ganze System y_1, y_2, etc. Denn ersetzen wir y_ν durch ky_ν, so bekommen n Verticalreihen den Factor k, während die übrigen ungeändert bleiben. Demnach wird sich die Gleichung $\Delta = 0$ in dieser Form darstellen lassen:

$$\text{(1.)} \qquad \sum_r C_r y_r = 0,$$

wo die Coefficienten C_r von den y unabhängig sind, jedes y_r aber ein Product von n verschiedenen Factoren der Reihe $y_1, y_2, \dots y_{m+n}$ bedeutet. Die einzelnen Indices r sind die n-gliedrigen Combinationen, die sich aus den Elementen $1, 2, \dots m+n$ bilden lassen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Verhältniss zweier Coefficienten C_r, C_s zu bestimmen; und zwar seien die Indices r, s so gewählt, dass sie $n-1$ Elemente gemeinsam haben. Die gemeinsamen Elemente bezeichnen wir durch α, diejenigen dagegen, die weder in r noch s vorkommen, mit β, und die beiden übrigen seien $\varkappa$, λ; sodass

$$y_r = y_\varkappa \Pi(y_\alpha), \quad y_s = y_\lambda \Pi(y_\alpha)$$

ist. Jetzt setzen wir alle $y_\beta = 0$. Dann bleiben von der Gleichung $\Delta = 0$ nur die $n+1$ Glieder übrig, deren Indices aus $\varkappa$, λ und den $n-1$ Elementen α gebildet sind. Dividirt man nun durch $\Pi(y_\alpha)$ und setzt dann sämmtliche $y_\alpha = \infty$, so bleibt nur $C_r y_\varkappa$ und $C_s y_\lambda$ übrig; die Gleichung $\Delta = 0$ reducirt sich auf:

$$C_r y_\varkappa + C_s y_\lambda = 0.$$

Hier muss die Function $\varphi(u)$, da alle $y_\alpha = \infty$, alle $y_\beta = 0$ sind, bis auf einen constanten Factor mit folgendem Quotienten

$$\bar{\varphi}(u) = \frac{\prod\limits_\beta \Theta(u-u_\beta)}{\prod\limits_\alpha \Theta(u-u_\alpha)} \cdot \frac{\Theta(u-a+\Sigma u_\beta)}{\Theta(u-b+\Sigma u_\alpha)}$$

identisch sein. Fügt man hinzu, dass ausserdem:

$$\varphi(u_\varkappa) = y_\varkappa, \quad \varphi(u_\lambda) = y_\lambda$$

sein soll, so folgt:

$$\bar{\varphi}(u_\lambda) y_\varkappa - \bar{\varphi}(u_\varkappa) y_\lambda = 0,$$

und daher:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{C_r}{C_s} = -\frac{\bar{\varphi}(u_\lambda)}{\bar{\varphi}(u_\varkappa)}.$$

Hier haben wir die gesuchte Darstellung des Verhältnisses; zwar gewonnen unter der Annahme specieller Werthe für die y; aber davon ist das Resultat unabhängig.

Wir setzen nun:

$$\text{(3.)} \qquad u_r = u_\varkappa + \Sigma u_\alpha, \quad \bar{u}_r = u_\lambda + \Sigma u_\beta.$$

u_r ist hier die Summe derjenigen Grössen in der Reihe u_1, u_2, etc., deren Indices in der Combination r vorkommen, $\bar{u}_r$ die Summe der übrigen. Entsprechend ist:

$$u_s = u_\lambda + \Sigma u_\alpha, \quad \bar{u}_s = u_\varkappa + \Sigma u_\beta.$$

Mithin:

$$(4.) \qquad \bar{\varphi}(u_\varkappa) = \frac{\prod\limits_\beta \Theta(u_\varkappa - u_\beta)}{\prod\limits_\alpha \Theta(u_\varkappa - u_\alpha)} \frac{\Theta(a-\bar{u}_s)}{\Theta(b-u_r)}.$$

Vertauscht man $u_\varkappa$ mit u_λ, so hat man auch r durch s zu ersetzen:

$$(5.) \qquad \bar{\varphi}(u_\lambda) = \frac{\prod\limits_\beta \Theta(u_\lambda - u_\beta)}{\prod\limits_\alpha \Theta(u_\lambda - u_\alpha)} \frac{\Theta(a-\bar{u}_r)}{\Theta(b-u_s)}.$$

Unter Π_r verstehen wir folgenden Ausdruck:

$$(6.) \qquad \Pi_r = \prod_\mu \prod_\nu \Theta(u_\mu - u_\nu),$$

wobei μ alle Elemente durchlaufen soll, die in r vorkommen, ν alle übrigen. Das System (μ) besteht also aus $\varkappa$ und den Zahlen α, (ν) aus λ und den Zahlen β. Demnach ist:

$$\Pi_r = \Theta(u_\varkappa - u_\lambda) \prod_\beta \Theta(u_\varkappa - u_\beta) \prod_\alpha \Theta(u_\alpha - u_\lambda) \prod_\alpha \prod_\beta \Theta(u_\alpha - u_\beta).$$

Π_s entsteht hieraus durch Vertauschung von $u_\varkappa$ mit u_λ. Daher:

$$\frac{\Pi_r}{\Pi_s} = -\prod_\alpha \frac{\Theta(u_\alpha - u_\lambda)}{\Theta(u_\alpha - u_\varkappa)} \prod_\beta \frac{\Theta(u_\varkappa - u_\beta)}{\Theta(u_\lambda - u_\beta)}.$$

Berücksichtigt man dies, sowie (4.) und (5.), dann lässt sich die Gleichung (2.) so schreiben:

$$\frac{C_r}{C_s} = \frac{\Pi_s}{\Pi_r} \cdot \frac{\Theta(a-\bar{u}_r)\Theta(b-u_r)}{\Theta(a-\bar{u}_s)\Theta(b-u_s)};$$

und hieraus folgt, dass wir für den Coefficienten C_r allgemein den Werth:

$$C_r = \frac{\Theta(a-\bar{u}_r)\Theta(b-u_r)}{\Pi_r}$$

setzen dürfen. Die Gleichung, der a genügen muss, ist demnach:

$$(7.) \qquad \sum_r \frac{\Theta(a-\bar{u}_r)\Theta(a-d-u_r)}{\Pi_r} y_r = 0.$$

Wir können dieselbe Formel, durch die a bestimmt wird, auch dazu benutzen, um die gesuchte Function $y = \varphi(u)$ darzustellen. Wir haben dann nur eine der Bedingungen $y_\nu = \varphi(u_\nu)$, etwa die letzte, fortzulassen und durch $y = \varphi(u)$ zu ersetzen; d. h. wir haben in der Gleichung (7.) u_{m+n} durch u, und y_{m+n} durch y zu ersetzen. Fassen wir nicht a, sondern

$$a - \tfrac{1}{2}(d + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m+n}) = x$$

als die zu bestimmende Grösse auf, und setzen:

$$\frac{d+\bar{u}_r-u_r}{2} = v_r,$$

so wird:

$$\sum_r \frac{\Theta(x+v_r)\Theta(x-v_r)}{\Pi_r} y_r = 0$$

die Gleichung, der x zu genügen hat. Dies können wir auch so schreiben:

$$\sum_r \frac{\Theta_\lambda^2(x)\Theta_\mu^2(v_r)-\Theta_\mu^2(x)\Theta_\lambda^2(v_r)}{\Pi_r} y_r = 0,$$

wenn $\Theta_\lambda(u)$, $\Theta_\mu(u)$ irgend zwei der vier geraden und ungeraden elliptischen Theta bedeuten. Oder, wenn gesetzt wird:

$$\sum_r \frac{\Theta_\lambda^2(v_r)}{\Pi_r} y_r = L_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3),$$

so ist:

$$\frac{\Theta_\lambda^2(x)}{\Theta_\mu^2(x)} = \frac{L_\lambda}{L_\mu}.$$

Irgend eine elliptische Function von x oder von a lässt sich hiernach rational durch $y_1, y_2, \dots y_{m+n}$ und die Quadratwurzel eines Ausdrucks, der in vier Linearfactoren zerfällt, darstellen:

$$w = \sqrt{L_0 L_1 L_2 L_3}.$$

Da nun y selbst durch eine lineare Gleichung bestimmt ist, deren Coefficienten rationale Functionen von $y_1, y_2, \dots y_{m+n-1}$ und ausserdem elliptische Functionen von a sind, so ergiebt sich schliesslich y als rational in y_1, $y_2, \dots y_{m+n}$ und der Wurzelgrösse w.

Ich will noch hinzufügen, dass, wenn man eine Function

$$\varphi(u) = \frac{A}{B},$$

die den gegebenen Bedingungen genügt, als bekannt betrachtet, alsdann Zähler und Nenner der zweiten Function:

$$\psi(u) = \frac{C}{D},$$

die gleich $\varphi(u)$ werden soll für $u = u_1$, u_2, etc., bestimmt werden können durch die Gleichung:

$$AD-BC = \Theta(u-u_1)\Theta(u-u_2)\dots\Theta(u-u_{m+n}).$$

Dabei sind die Charakteristiken von C und D natürlich so zu wählen, dass die Producte AD, BC mit dem Ausdruck auf der rechten Seite gleichändrig werden.

Die *Cauchy*sche Interpolationsformel wird hauptsächlich gebraucht, um das *Abel*sche Theorem für hyperelliptische Integrale in entwickelter Form darzustellen. Eine solche Anwendung erlaubt auch diese Untersuchung.

Es sei z die Quadratwurzel aus einer rationalen Function $R(x, y)$ von zwei Variabeln, die durch eine Gleichung vom Range 1 verbunden sind, und 2σ sei die Anzahl der Stellen, in denen $R(x, y)$ von ungerader Ordnung 0 oder ∞ wird. Führt man wieder das elliptische Integral u ein, so kann z auf die Form gebracht werden:

$$z = \frac{\sqrt{S(u)}}{P(u)},$$

wo $S(u)$ eine ganze Function 2σten Grades, ohne quadratischen Theiler, bedeutet, während $P(u)$ eine ganze oder gebrochene Function sein kann, in der aber jedenfalls der Grad des Zählers um σ Einheiten grösser ist als der des Nenners. Wir nehmen an, $P(u)$ sei gleichändrig mit $\Theta^\sigma(u)$, also $S(u)$ mit $\Theta^{2\sigma}(u)$. Dadurch wird nur die untere Grenze des Integrals u fixirt.

Das Gebilde (x, y, z) ist vom Range $\sigma+1$. u selbst ist ein Integral erster Gattung. σ andere können wir bilden in der Form:

$$\psi_\alpha(u) = \int \frac{F_\alpha(u)du}{\sqrt{S(u)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \sigma),$$

indem wir für $F_1, F_2, \ldots F_\sigma$ ein System linear-unabhängiger und mit Θ^σ gleichändriger ganzer Functionen setzen. Als untere Grenze nehmen wir einen der Nullpunkte von $S(u)$: $u = c$. Wir können dann sagen, dass $\psi_\alpha(u)$, abgesehen von den periodischen Aenderungen, gleichzeitig mit $\sqrt{S(u)}$ sein Zeichen wechselt.

Wir stellen jetzt einen Ausdruck auf von folgender Form:

$$H = \frac{A+B\sqrt{S}}{C}.$$

A, B, C sollen ganze Thetafunctionen sein, und zwar A, C gleichändrige Functionen vom Grade $n+\sigma$, während B nur vom Grade n sein soll, und so beschaffen, dass der Quotient

$$\frac{A}{B} = \varphi$$

gleichändrig ist mit Θ^σ. Dann ist offenbar H eine rationale Function von x, y, z; also lässt sich hier das *Abel*sche Theorem anwenden.

Der Nenner C verschwindet für $n+\sigma$ Werthe von u. Zu jedem dieser Werthe gehören aber zwei von $\sqrt{S(u)}$, und da $\psi_a(u)$ gleichzeitig mit $\sqrt{S(u)}$ sein Zeichen wechselt, so ist die Integralsumme $\Sigma\psi_a(u_\nu)$, erstreckt über alle $2n+2\sigma$ Unendlichkeitspunkte von H, gleich 0 oder eine Periode.

Von den Nullpunkten muss dasselbe gelten. Da aber der Quotient

$$\varphi = \frac{A}{B}$$

$2n+\sigma$ willkürliche Constanten enthält, so kann man $2n+\sigma$ von den $2n+2\sigma$ Nullpunkten des Zählers willkürlich wählen. Die Gesammtheit der σ übrigen ist dann algebraisch, und zwar im Allgemeinen zweideutig bestimmt.

Auf diese Weise wird es möglich, das Gleichungssystem:

$$\psi_a(u_1)+\psi_a(u_2)+\cdots+\psi_a(u_{2n+\sigma}) = \psi_a(v_1)+\cdots+\psi_a(v_\sigma) \qquad (a=1, 2, \ldots \sigma),$$

in dem $u_1, u_2, \ldots u_{2n+\sigma}$ gegebene, $v_1, v_2, \ldots v_\sigma$ dagegen unbekannte Grössen bedeuten, aufzulösen, und zwar so, dass die elliptischen Functionen von $v_1, v_2, \ldots v_\sigma$ sich algebraisch durch die von $u_1, u_2, \ldots u_{2n+\sigma}$ ausdrücken. Dies ist natürlich nur deshalb bemerkenswerth, weil die Integrale ψ_a nicht vom Range σ, sondern vom Range $\sigma+1$ sind.