Ueber ein vielfaches, auf *Euler*sche Integrale reducirbares Integral.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Im Folgenden wird ein vielfaches bestimmtes Integral betrachtet, welches sich als identisch mit einem Producte aus *Euler*schen Integralen erweist. Die angestellte Rechnung schliesst sich an diejenige an, durch die der Verfasser in einer früher veröffentlichten Arbeit*) ein ähnlich gebildetes vielfaches Integral auf *Euler*sche Integrale erster Art zurückgeführt hat. In der hier abgeleiteten Formel kommt jedoch neben *Euler*schen Integralen erster Art auch eine Gammafunction als Factor vor. Es wird in § 1 zunächst ein Doppelintegral, sodann in § 2 das $(m+1)$-fache Integral behandelt. In § 3 wird das in den §§ 1 und 2 erhaltene Resultat dadurch erweitert, dass man für eine der Integrationen statt des geradlinigen Weges eine geschlossene Integrationscurve anwendet. Die so modificirte Formel enthält statt der Gammafunction das correspondirende bestimmte Integral mit geschlossenem Integrationsweg, welches *H. Hankel* in seiner Abhandlung „Die *Euler*schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments"**) definirt hat. Der in § 3 bewiesene Satz wird in einer nachfolgenden Abhandlung***) für die Integration einer linearen Differentialgleichung benutzt, woselbst er dazu dient, die Verbindung zwischen den Lösungen der Gleichung in Reihenform und gewissen Lösungen in Form bestimmter Integrale herzustellen.

---

*) Cfr. §§ 3 und 6 der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten" in Bd. 102 dieses Journals.

**) *Schlömilchs* Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrgang 9, 1864.

***) „Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte".

§ 1.

Durch A_1 werde das Doppelintegral

$$(1.)\qquad \int_0^\infty s^{-a}\,ds\int_0^1 e^{-st}\,t^b(1-t)^{c-1}\,dt$$

bezeichnet. Man substituire

$$t = 1-z$$

und entwickele die Grösse e^{sz} in die Reihe $1+\frac{sz}{1}+\cdots$. Dann entsteht für A_1 die Gleichung

$$A_1 = \int_0^\infty e^{-s}s^{-a}\,ds\int_0^1 e^{sz}(1-z)^b z^{c-1}\,dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-s}s^{-a}\,ds\int_0^1 \left[1+\frac{sz}{1}+\cdots+\frac{s^\nu z^\nu}{\nu!}+\cdots\right](1-z)^b z^{c-1}\,dz.$$

Nennt man also $E(p,q)$ und $\Gamma(q)$ die *Euler*schen Integrale erster und zweiter Art

$$(2.)\qquad E(p,q) = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}\,dz,$$

$$(3.)\qquad \Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-s}s^{q-1}\,ds$$

und berücksichtigt die bekannten Formeln

$$(4.)\qquad E(p+\nu,q) = \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+\nu-1)}E(p,q),$$

$$(5.)\qquad \Gamma(q+\nu) = q(q+1)\ldots(q+\nu-1)\Gamma(q),$$

so ergiebt sich

$$A_1 = \Gamma(1-a)E(b+1,c)+\frac{1}{1}\Gamma(2-a)E(b+1,c+1)$$

$$+\frac{1}{1.2}\Gamma(3-a)E(b+1,c+2)+\cdots+\frac{1}{\nu!}\Gamma(\nu+1-a)E(b+1,c+\nu)+\cdots$$

$$= \Gamma(1-a)E(b+1,c)\left\{1+\frac{(1-a)c}{1.(b+c+1)}+\frac{(1-a)(2-a)c(c+1)}{1.2.(b+c+1)(b+c+2)}+\cdots\right\}.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass in (1.) diejenigen Zweige der Potenzen s^{-a}, t^b, $(1-t)^{c-1}$ angewendet werden, welche den in den *Euler*schen Integralen vorkommenden Potenzen entsprechen.

Die Klammer auf der rechten Seite der letzten Gleichung enthält eine *Gauss*sche hypergeometrische Reihe, deren viertes Argument den Werth 1 hat. Da nun für diese Reihen die Identität:

$$(6.)\qquad 1+\frac{\alpha\beta}{1.\varrho}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}+\cdots = \frac{\Gamma(\varrho)\Gamma(\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\varrho-\alpha)\Gamma(\varrho-\beta)}$$

gilt, so ist

$$A_1 = \Gamma(1-a)E(b+1,c)\frac{\Gamma(b+c+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+c)\Gamma(b+1)},$$

woraus, wegen der Formel

$$(7.)\qquad E(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

die Gleichung

$$A_1 = \Gamma(1-a)\Gamma(c)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+c)}$$

folgt. Indem man die Formel (7.) zum zweiten Mal benutzt, erhält man für A_1 den Ausdruck

$$(8.)\qquad A_1 = \int_0^\infty s^{-a}ds\int_0^1 e^{-st}t^b(1-t)^{c-1}dt = \Gamma(1-a)E(a+b,c).$$

§ 2.

Es sei ferner A_m das $(m+1)$-fache Integral

$$(9.)\qquad A_m = \int_0^\infty s^{-a}ds\int_0^1 S_1ds_1\int_0^1 S_2ds_2\dots\int_0^1 S_{m-1}ds_{m-1}\int_0^1 e^{-ss_1s_2\dots s_m}S_m ds_m,$$

in welchem S_μ für $\mu = 1, 2, \dots m$ das Product

$$(10.)\qquad S_\mu = s_\mu^{b_\mu}(1-s_\mu)^{c_\mu-1}$$

bedeutet, während $a, b_1, c_1, \dots b_m, c_m$ Constanten sind. Man nimmt an, dass letztere Constanten diejenigen Ungleichheiten erfüllen, die für die Convergenz des Integrals A_m erforderlich sind. Es soll gezeigt werden, dass A_m gleich dem Producte

$$(11.)\qquad A_m = \Gamma(1-a)E(a+b_1,c_1)E(a+b_2,c_2)\dots E(a+b_m,c_m)$$

ist. Der Beweis wird durch Induction geführt.

Diejenige Gleichung, die aus (11.) entsteht, wenn man $m-1$ statt m schreibt, wird als bewiesen angenommen. Man ändert hierbei die Bezeichnung, indem man $\mathfrak{S}_\mu$ für $\mu = 1, 2, \dots m-1$ als das Product

$$(12.)\qquad \mathfrak{S}_\mu = s_\mu^{\beta_\mu}(1-s_\mu)^{c_\mu-1}$$

definirt und der als gültig vorausgesetzten Gleichung die Form

$$(13.)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty s^{-k}ds\int_0^1\mathfrak{S}_1ds_1\dots\int_0^1\mathfrak{S}_{m-2}ds_{m-2}\int_0^1 e^{-ss_1s_2\dots s_{m-1}}\mathfrak{S}_{m-1}ds_{m-1} \\ = \Gamma(1-k)E(k+\beta_1,c_1)E(k+\beta_2,c_2)\dots E(k+\beta_{m-1},c_{m-1}) \end{cases}$$

giebt. Das Integral (9.) geht durch die Substitution $s_m = 1-z$ in den Ausdruck

$$\int_0^\infty s^{-a}ds\int_0^1 S_1\,ds_1\ldots\int_0^1 e^{-ss_1\ldots s_{m-1}}S_{m-1}ds_{m-1}\int_0^1 e^{ss_1\ldots s_{m-1}z}(1-z)^{b_m}z^{c_m-1}dz$$

über. Durch Entwickelung der von z abhängigen Exponentialfunction

$$e^{ss_1\ldots s_{m-1}z} = 1+\frac{ss_1\ldots s_{m-1}z}{1}+\cdots+\frac{s^\nu s_1^\nu\ldots s_{m-1}^\nu z^\nu}{1.2\ldots\nu}+\cdots$$

erhält man hieraus eine Reihe, deren allgemeiner Term gleich dem Producte aus einem m-fachen Integral, einem *Euler*schen Integral erster Art und einer numerischen Constante ist. Man nenne zur Abkürzung

$$\Theta_\nu = \int_0^\infty s^{\nu-a}ds\int_0^1 S_1 s_1^\nu ds_1\ldots\int_0^1 S_{m-2}s_{m-2}^\nu ds_{m-2}\int_0^1 e^{-ss_1\ldots s_{m-1}}S_{m-1}s_{m-1}^\nu ds_{m-1}.$$

Dann ergiebt sich, da

$$\int_0^1 (1-z)^{b_m}z^{c_m+\nu-1}dz = E(b_m+1, c_m+\nu)$$

ist, für Δ_m die Entwickelung:

$$\Delta_m = E(b_m+1, c_m)\Theta_0+E(b_m+1, c_m+1)\Theta_1+\cdots+\frac{E(b_m+1, c_m+\nu)}{1.2\ldots\nu}\Theta_\nu+\cdots.$$

Aber die Grösse Θ_ν ist mit dem in (13.) angeführten m-fachen Integral identisch, wenn man in letzterem für die Constanten k, β_1, …, β_{m-1} die Werthe

$$k = a-\nu,\quad \beta_1 = b_1+\nu,\quad \beta_2 = b_2+\nu,\quad \ldots,\quad \beta_{m-1} = b_{m-1}+\nu$$

einsetzt, so dass aus (13.) für Θ_ν die Gleichung

$$\Theta_\nu = \Gamma(\nu+1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\ldots E(a+b_{m-1}, c_{m-1})$$

folgt. Auf diese Weise findet man für den Quotienten

$$\frac{\Delta_m}{E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\ldots E(a+b_{m-1}, c_{m-1})}$$

die Reihe

$$\Gamma(1-a)E(b_m+1, c_m)+\Gamma(2-a)E(b_m+1, c_m+1)+\cdots+\frac{\Gamma(\nu+1-a)E(b_m+1, c_m+\nu)}{1.2\ldots\nu}+\cdots$$

$$= \Gamma(1-a)E(b_m+1, c_m)\left\{1+\frac{(1-a)c_m}{1.(b_m+c_m+1)}+\frac{(1-a)(2-a)c_m(c_m+1)}{1.2(b_m+c_m+1)(b_m+c_m+2)}+\cdots\right\},$$

welche nach (6.) und (7.) mit dem Ausdrucke

$$\Gamma(1-a)\frac{\Gamma(b_m+1)\Gamma(c_m)}{\Gamma(b_m+c_m+1)}\,\frac{\Gamma(b_m+c_m+1)\Gamma(b_m+a)}{\Gamma(a+b_m+c_m)\Gamma(b_m+1)}$$

$$= \Gamma(1-a)\frac{\Gamma(a+b_m)\Gamma(c_m)}{\Gamma(a+b_m+c_m)} = \Gamma(1-a)E(a+b_m, c_m)$$

identisch ist. Unter Annahme der Gültigkeit der Gleichung (13.) ist also für das $(m+1)$-fache Integral A_m der Werth

$$A_m = \Gamma(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2)\dots E(a+b_m, c_m)$$

ermittelt worden. Für $m=1$ ergiebt sich nun aus (9.) und (11.) die auf directem Wege abgeleitete Formel (8.). Somit ist auch die Gleichung (11.), unter der Voraussetzung, dass den Bedingungen der Convergenz genügt ist, allgemein bewiesen.

Wählt man $m=2$, so liefert die erhaltene Formel einen Ausdruck für ein dreifaches Integral, da dieselbe dann die Gestalt

$$(14.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty s^{-a}ds\int_0^1 s_1^{b_1}(1-s_1)^{c_1-1}ds_1\int_0^1 e^{-ss_1s_2}s_2^{b_2}(1-s_2)^{c_2-1}ds_2 \\ = \Gamma(1-a)E(a+b_1, c_1)E(a+b_2, c_2) \end{cases}$$

annimmt.

§ 3.

In den Integralen (1.) und (9.) kommen die Ausdrücke

$$e^{-st},\quad e^{-ss_1s_2\dots s_m}$$

als Factoren der zu integrirenden Function vor, und die Variable s durchläuft, wie daselbst angenommen wird, die positive reelle Axe von 0 bis ∞. Es sollen nunmehr einerseits die obigen Exponentialgrössen durch

$$e^{st},\quad e^{ss_1s_2\dots s_m}$$

ersetzt, andererseits für die Variable s ein geschlossener Integrationsweg, der bei $-\infty$ beginnt und endigt, gewählt werden.

Für die Integrale mit geschlossener Integrationscurve wird im Folgenden die abgekürzte Bezeichnungsweise benutzt, welche der Verfasser in § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf"*) angegeben hat. Man setzt hiernach einen horizontalen Strich über das Integralzeichen (was andeuten soll, dass der Weg ein geschlossener ist), schreibt den Werth, welcher Ausgangspunkt und Endpunkt der Integrationscurve ist, als untere Integralgrenze hin und führt an der sonst von der oberen Integralgrenze eingenommenen Stelle in Klammern diejenigen singulären Punkte der zu integrirenden Function (durch Kommata von einander getrennt) an,

*) Mathem. Annalen, Bd. 35, pag. 472.

welche vom Integrationswege umschlossen werden. Hierbei nennt man die verschiedenen singulären Punkte in der Reihenfolge, wie sie umkreist werden, und fügt im Fall einer negativen Umkreisung ein Minuszeichen hinter den betreffenden singulären Punkt hinzu.

Sind die Variablen s und t von einander unabhängig, so hat das Product

$$s^{-a}e^{st}t^{b}(1-t)^{c-1}$$

als Function von s keinen anderen endlichen singulären Punkt als den Punkt $s=0$. Wird also das obige Product in der Art nach s und nach t integrirt, dass die Variable t die reellen Werthe zwischen 0 und 1 durchläuft, und die Variable s von dem unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe aus einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt, so hat man für das hierdurch definirte Doppelintegral, welches K_1 heissen möge, die abgekürzte Bezeichnung

$$(15.)\qquad K_1 = \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} s^{-a}ds\int_0^1 e^{st}t^{b}(1-t)^{c-1}dt.$$

In analoger Weise nennt man K_m das $(m+1)$-fache Integral

$$(16.)\qquad K_m = \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} s^{-a}ds\int_0^1 S_1 ds_1\int_0^1 S_2 ds_2\dots\int_0^1 S_{m-1}ds_{m-1}\int_0^1 e^{ss_1s_2\dots s_m}S_m ds_m,$$

in welchem der Integrationsweg von s derselbe wie in K_1 ist. $S_1, S_2, \dots S_m$ bedeuten die in (10.) angegebenen Ausdrücke.

Das Verfahren, nach welchem in den §§ 1 und 2 die Integrale A_1 und A_m umgeformt wurden, ist auch auf die Integrale K_1 und K_m anwendbar. Durch die Substitution $t=1-z$ erhält man aus (15.) die Gleichung

$$\begin{aligned}K_1 &= \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{s}s^{-a}ds\int_0^1 e^{-sz}(1-z)^{b}z^{c-1}dz\\ &= \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{s}s^{-a}ds\int_0^1 \Big[1-\frac{sz}{1}+\frac{s^2z^2}{1.2}-\cdots\Big](1-z)^{b}z^{c-1}dz\end{aligned}$$

oder, bei Berücksichtigung von (2.),

$$\begin{aligned}K_1 = {}& E(b+1,c)\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{s}s^{-a}ds-\frac{1}{1}E(b+1,c+1)\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{s}s^{1-a}ds\\ &+\cdots+(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu!}E(b+1,c+\nu)\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{s}s^{\nu-a}ds+\cdots.\end{aligned}$$

Es soll nun durch $\overline{\Gamma}(q)$ das Integral

$$(17.) \qquad \overline{\Gamma}(q) = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^s s^{q-1} ds,$$

dessen Integrationsweg die oben genannte geschlossene Curve ist, bezeichnet werden*). Dasselbe convergirt für jeden endlichen Werth von q. Ist der reelle Theil von q positiv, so besteht zwischen dem *Euler*schen Integral $\Gamma(q)$ (welches dann convergent ist) und dem Integral $\overline{\Gamma}(q)$ die Beziehung

$$(18.) \qquad \overline{\Gamma}(q) = (e^{\pi i q} - e^{-\pi i q})\Gamma(q) = 2i\sin(\pi q)\Gamma(q).$$

In (3.) hat man, nach der Definition von $\Gamma(q)$, für die Potenz s^{q-1} den Werth $e^{(q-1)\log s}$, in welchem $\log s$ den reellen Logarithmus bedeutet, einzusetzen; bei $\overline{\Gamma}(q)$ gilt die entsprechende Bestimmung für den Schnittpunkt des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe. Es ist ferner

$$(19.) \qquad \overline{\Gamma}(q+1) = -q\overline{\Gamma}(q),$$

woraus für ein positives ganzzahliges ν die Formel

$$(20.) \qquad \overline{\Gamma}(q+\nu) = (-1)^\nu q(q+1)\dots(q+\nu-1)\overline{\Gamma}(q)$$

folgt. Die für K_1 abgeleitete Reihe lautet hiernach

$$K_1 = \begin{cases} \overline{\Gamma}(1-a)E(b+1,c) - \frac{1}{1}\overline{\Gamma}(2-a)E(b+1,c+1) + \cdots \\ \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}\overline{\Gamma}(\nu+1-a)E(b+1,c+\nu) + \cdots \end{cases}$$

oder, wegen (4.) und (20.),

$$K_1 = \overline{\Gamma}(1-a)E(b+1,c)\left\{1 + \frac{(1-a)c}{1.(b+c+1)} + \frac{(1-a)(2-a)c(c+1)}{1.2.(b+c+1)(b+c+2)} + \cdots\right\}.$$

Die rechte Seite der letzteren Gleichung unterscheidet sich aber von dem in § 1 für A_1 erhaltenen Ausdruck nur dadurch, dass $\overline{\Gamma}(1-a)$ an Stelle von $\Gamma(1-a)$ getreten ist. Somit ergiebt sich (nach § 1) für K_1 die Gleichung

$$(21.) \qquad K_1 = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} s^{-a} ds \int_0^1 e^{st} t^b (1-t)^{c-1} dt = \overline{\Gamma}(1-a)E(a+b,c).$$

In ähnlicher Weise lässt sich die in § 2 für A_m angestellte Rechnung auf K_m übertragen. Aus dem Integrale (16.) entsteht, wenn man $s_m = 1-z$ setzt und die Exponentialgrösse $e^{-ss_1\dots s_{m-1}z}$ entwickelt, eine Reihe

*) Man vergleiche die erwähnte Abhandlung von *H. Hankel*, sowie § 3 der Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale", Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 495.

von derselben Art, wie im Vorhergehenden für A_m erhalten wurde; und nachdem der Factor $\bar{\Gamma}(1-a)$ und die in § 2 vorkommenden *Euler*schen Integrale erster Art vor die Klammer genommen sind, bleibt wiederum die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{(1-a)c_m}{1.(b_m+c_m+1)}+\frac{(1-a)(2-a)c_m(c_m+1)}{1.2.(b_m+c_m+1)(b_m+c_m+2)}+\cdots$$

übrig, auf welche die Formel (6.) angewendet wird. Auf diese Weise findet man, nach Berücksichtigung der Gleichung (21.), für K_m den Ausdruck

$$(22.)\qquad K_m = \bar{\Gamma}(1-a)E(a+b_1,\, c_1)E(a+b_2,\, c_2)\dots E(a+b_m,\, c_m).$$

Im Fall $m=2$ ergiebt sich aus (22.) die zu (14.) analoge Formel

$$(23.)\qquad \begin{cases} \bar{\int}_{-\infty}^{(0)} s^{-a}ds\int_0^1 s_1^{b_1}(1-s_1)^{c_1-1}ds_1\int_0^1 e^{ss_1s_2}s_2^{b_2}(1-s_2)^{c_2-1}ds_2 \\ = \bar{\Gamma}(1-a)E(a+b_1,\, c_1)E(a+b_2,\, c_2). \end{cases}$$

In den Gleichungen (8.), (11.), (14.) muss die Constante a der Bedingung genügen, dass der reelle Bestandtheil von $1-a$ positiv sei, da die Integrale A_1, A_2, A_m sonst divergent werden. Die in (21.), (22.), (23.) genannten Integrale behalten dagegen auch im Falle $a>1$ einen bestimmten Sinn. Für die Anwendungen, welche von den vorstehenden Rechnungen gemacht werden sollen (s. d. Einl.), erweist sich gerade dieser Umstand als ein wesentlicher, indem daselbst für die Grösse a (weil sie den Stellenzeiger einer Reihe enthält) auch unbegrenzt grosse positive Werthe zu setzen sind.
