Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0107
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0023
LOG Titel: Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie *).

(Von *L. Kronecker.*)

I. Bedeutet δ_{ik}, wie in meinen früheren Aufsätzen, Null oder Eins, je nachdem die Werthe der beiden Indices i, k von einander verschieden oder einander gleich sind, und bezeichnet man ein System von n^2 Grössen:

$$v_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

als das reciproke eines Systems von Grössen:

$$u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

wenn zwischen den beiden Grössensystemen die Gleichungen bestehen:

$$(A.) \qquad \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = 0 \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n),$$

so besagt der Satz,

dass das reciproke eines reciproken Systems das ursprüngliche System ist,

nichts anderes, als dass das Gleichungssystem ($A.$) dem Gleichungssysteme:

$$(B.) \qquad \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} = 0 \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n)$$

äquivalent ist.

Der Inhalt dieses Satzes, dessen Richtigkeit unmittelbar erhellt, wenn man die aus dem Gleichungssystem ($A.$) resultirenden Werthe der n^2 Grössen v_{ik} in die Gleichungen ($B.$) einsetzt, erschöpft aber noch nicht die Beziehungen zwischen den beiden Systemen von *Functionen:*

$$(C.) \qquad \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}, \quad \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g, h, i = 1, 2, \dots n),$$

*) Der Hauptinhalt dieser Notiz ist aus Art. IX und X meines im Mai, Juni, Juli d. J. (1890) in den Sitzungsberichten der hiesigen Akademie veröffentlichten Aufsatzes „Ueber orthogonale Systeme“ entnommen, aber es sind hier die dortigen Entwickelungen weiter ausgeführt.

welche, gleich Null gesetzt, die beiden Gleichungssysteme (*A.*) und (*B.*) ergeben. Diese Beziehungen finden vielmehr ihren vollen Ausdruck in dem bemerkenswerthen Satze,

dass die beiden Systeme von je n^2 Functionen:

$$\sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}, \quad \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n),$$

in welchen sowohl die n^2 Grössen u_{ik} als auch die n^2 Grössen v_{ik} unabhängige Variable bedeuten, *als Modulsysteme aufgefasst*, einander äquivalent sind, d. h. dass sich jede der Functionen des einen Systems als ganze, lineare, homogene Function der Functionen des anderen Systems und zwar *so* darstellen lässt, dass die Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen der $2n^2$ Variabeln u_{ik}, v_{ik} werden.

Um dies in Kürze nachzuweisen, führe ich folgende Bezeichnungen ein:

$$\sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = M_{gh}, \quad \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} = \overline{M}_{gh} \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n),$$

$$|u_{ik}| = U, \quad |v_{ik}| = V \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_{ik}} = U_{ki}, \quad \frac{\partial V}{\partial v_{ik}} = V_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Alsdann bestehen offenbar die Congruenzen:

$$\sum_i u_{gi} v_{ih} \equiv \delta_{gh} \pmod{M_{ik}}, \quad \sum_i v_{gi} u_{ih} \equiv \delta_{gh} \pmod{\overline{M}_{ik}} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

aus welchen mit Hülfe des Multiplicationssatzes der Determinantentheorie folgt, dass für jedes der beiden Modulsysteme (M_{ik}) und $(\overline{M}_{ik})$ die Congruenz stattfindet:

$$(D.) \qquad UV \equiv 1.$$

Ferner zeigen die Relationen:

$$V \sum_{g,h} U_{ig} M_{gh} u_{hk} = UV\overline{M}_{ik}, \quad U \sum_{g,h} V_{ig} \overline{M}_{gh} v_{hk} = UVM_{ik} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

welche sich durch Einsetzung der Werthe von M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$, M_{ik}, $\overline{M}_{ik}$ unmittelbar verificiren lassen, dass die Congruenzen bestehen:

$$UV\overline{M}_{ik} \equiv 0 \pmod{M_{gh}}, \quad UVM_{ik} \equiv 0 \pmod{\overline{M}_{gh}} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und diese gehen, da für beide Modulsysteme $UV \equiv 1$ ist, in folgende über:

$$(E.) \qquad \overline{M}_{ik} \equiv 0 \pmod{M_{gh}}, \quad M_{ik} \equiv 0 \pmod{\overline{M}_{gh}} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

durch welche die nachzuweisende Aequivalenz der beiden Modulsysteme

(M_{gh}), $(\overline{M}_{gh})$, d. h. also die Aequivalenz:

$$(F.)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh}\right) \sim \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi}u_{ih}-\delta_{gh}\right) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

vollständig begründet wird.

II. Das Modulsystem (M_{gh}) lässt sich, im Sinne der Aequivalenz, durch das folgende ersetzen:

$$(UV-1,\ v_{gh}-VU_{gh}) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Um dies darzuthun, gehe ich von der Doppelsumme aus:

$$\sum_{h,i} v_{gi}u_{ih}(VU_{hk}-v_{hk}) \qquad (g,\ h,\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ n),$$

welche, je nachdem man zuerst nach h und dann nach i oder in entgegengesetzter Folge summirt, die beiden Ausdrücke liefert:

$$v_{gk}(UV-1)-\sum_i v_{gi}M_{ik}, \qquad VU_{gk}-v_{gk}+\sum_h (VU_{hk}-v_{hk})\overline{M}_{gh}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erschliesst man mit Hülfe der Congruenzen $(D.)$ und $(E.)$, dass für alle Werthe $g,\ h = 1,\ 2,\ \ldots\ n$:

$$(G.)\qquad v_{gh}-VU_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } M_{ik}) \text{ oder } \left(\text{modd. } \sum_{r=1}^{r=n} u_{ir}v_{rk}-\delta_{ik}\right)$$
$$(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

ist. Andererseits resultiren aus den Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh} = (UV-1)\delta_{gh}+\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}(v_{ih}-VU_{ih}) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

die Congruenzen:

$$(H.)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh} \equiv 0 \quad (\text{modd. } UV-1,\ v_{gh}-VU_{gh}) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n),$$

und die nachzuweisende Aequivalenz:

$$(K.)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh}\right) \sim (UV-1,\ v_{gh}-VU_{gh}) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

findet in den Congruenzen $(G.)$, $(H.)$, in Verbindung mit der Congruenz $(D.)$, ihre vollständige Begründung.

III. Um nunmehr noch das Bestehen der Aequivalenz:

$$(L.)\qquad \left(\sum_{r=1}^{r=n} u_{gr}v_{rh}-\delta_{gh}\right) \sim (UV-1,\ U_{gh}-v_{gh}U) \qquad (g,\ h=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

nachzuweisen, sind nur die Congruenzen:

$$\begin{aligned} U_{ik}-v_{ik}U &\equiv 0 \quad \left(\text{modd. } \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr}v_{rh}-\delta_{gh}\right) \\ \sum_{r=1}^{r=n} u_{gr}v_{rh}-\delta_{gh} &\equiv 0 \quad (\text{modd. } UV-1,\ U_{ik}-v_{ik}U) \end{aligned} \qquad (g,\ h,\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

zu verificiren, und dies geschieht für die ersteren durch die Identität:

$$U_{ik}-v_{ik}U = (v_{ik}U-U_{ik})(UV-1)-UV\sum_{g=1}^{g=n}U_{ig}\Big(\sum_{r=1}^{r=n}u_{gr}v_{rk}-\delta_{gk}\Big)$$

in Verbindung mit der Congruenz ($D.$):

$$UV-1\equiv 0 \quad \Big(\text{modd. } \sum_{r=1}^{r=n}u_{gr}v_{rh}-\delta_{gh}\Big) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

für die letzteren durch die Identität:

$$\sum_{r=1}^{r=n}u_{gr}v_{rh}-\delta_{gh} = \Big(\delta_{gh}-\sum_{r=1}^{r=n}u_{gr}v_{rh}\Big)(UV-1)-V\sum_{i=1}^{i=n}u_{gi}(U_{ih}-v_{ih}U).$$

IV. Da nach Art. I das Modulsystem $\Big(\sum_{i=1}^{i=n}u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh}\Big)$ bei Vertauschung der Variabeln u und v in ein äquivalentes übergeht, so können auch auf der rechten Seite der Aequivalenzen ($K.$) und ($L.$) die Variabeln u und v mit einander vertauscht werden. Man sieht daher, dass die sechs verschiedenen Modulsysteme:

$$(M.) \qquad \Big(\sum_{i=1}^{i=n}u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh}\Big),\quad \Big(\sum_{i=1}^{i=n}v_{gi}u_{ih}-\delta_{gh}\Big) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

$$(M'.) \qquad (UV-1,\ v_{gh}-VU_{gh}),\quad (UV-1,\ u_{gh}-UV_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

$$(M''.) \qquad (UV-1,\ U_{gh}-v_{gh}U),\quad (UV-1,\ V_{gh}-u_{gh}V) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

einander äquivalent sind. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass für *jedes beliebige* Modulsystem die sechs verschiedenen Systeme von Congruenzen:

$$(N.) \qquad \Big(\sum_{i=1}^{i=n}u_{gi}v_{ih}\equiv\delta_{gh}\Big),\quad \Big(\sum_{i=1}^{i=n}v_{gi}u_{ih}\equiv\delta_{gh}\Big) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

$$(N'.) \qquad (UV\equiv 1,\ v_{gh}\equiv VU_{gh}),\quad (UV\equiv 1,\ u_{gh}\equiv UV_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n),$$

$$(N''.) \qquad (UV\equiv 1,\ v_{gh}U\equiv U_{gh}),\quad (UV\equiv 1,\ u_{gh}V\equiv V_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

einander äquivalent sind.

Die Aequivalenz der beiden ersten Systeme von Congruenzen ($N.$) zeigt, dass auch im Sinne der Congruenz für ein beliebiges Modulsystem das reciproke eines reciproken Systems gleich dem ursprünglichen Systeme ist. Aus der Aequivalenz der übrigen geht hervor, dass auch im Sinne der Congruenz für ein beliebiges Modulsystem das zu einem Systeme (u_{ik}) reciproke System (v_{ik}) durch jedes der vier Systeme von Congruenzen ($N'.$), ($N''.$) vollständig definirt ist.

V. Nimmt man in jedem der sechs Modulsysteme ($M.$), ($M'.$), ($M''.$) das Element $U-\varepsilon$ hinzu, wo $\varepsilon=\pm 1$ ist, so kann überdies, wegen der Congruenz $UV\equiv 1$, noch das Element $V-\varepsilon$ hinzugefügt werden. Die Modulsysteme (M'.) und (M''.) stimmen alsdann mit einander überein, und man erhält hiernach nur eine Aequivalenz von vier Modulsystemen:

$$(P.)\quad \begin{cases} \left(U-\varepsilon,\ V-\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih}-\delta_{gh}\right) \sim \left(U-\varepsilon,\ V-\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} v_{gi}u_{ih}-\delta_{gh}\right) \\ \sim (U-\varepsilon,\ V-\varepsilon,\ v_{gh}-\varepsilon U_{gh}) \sim (U-\varepsilon,\ V-\varepsilon,\ u_{gh}-\varepsilon V_{gh}), \\ \qquad (g,\ h=1,2,\dots n) \end{cases}$$

welche zeigt, dass auch im Sinne der Congruenz für *jedes beliebige* Modulsystem das zu einem Systeme, dessen Determinante gleich ± 1 ist, *reciproke* System zugleich das mit dem Vorzeichen der Determinante genommene *adjungirte* System ist.

Setzt man ferner $v_{ih}=u_{hi}$, so geht die Aequivalenz (P.) in folgende über:

$$(P'.)\quad \left(U-\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}u_{hi}-\delta_{gh}\right) \sim \left(U-\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig}u_{ih}-\delta_{gh}\right) \sim (U-\varepsilon,\ u_{gh}-\varepsilon\,\mathrm{adj}.\,u_{gh}), \quad (g,\ h=1,2,\dots n)$$

welche es in Evidenz setzt, dass — auch für *jedes beliebige* Modulsystem — durch jedes der drei Systeme von Congruenzen:

$$(Q.)\quad \begin{cases} \left(U\equiv\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}u_{hi}\equiv\delta_{gh}\right), \quad \left(U\equiv\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig}u_{ih}\equiv\delta_{gh}\right), \\ (U\equiv\varepsilon,\ u_{gh}\equiv\varepsilon\,\mathrm{adj}.\,u_{gh}) \qquad (g,\ h=1,2,\dots n) \end{cases}$$

das System:

$$(u_{ik}) \qquad (i,\ k=1,2,\dots n)$$

als ein „im Sinne der Congruenz orthogonales" definirt wird.

Setzt man schon in jener fundamentalen Aequivalenz, welche im Art. I mit (F.) bezeichnet ist, $v_{ih}=u_{hi}$, so geht dieselbe in folgende über:

$$(Q.)\quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}u_{hi}-\delta_{gh}\right) \sim \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{ig}u_{ih}-\delta_{gh}\right) \qquad (g,\ h=1,2,\dots n);$$

die Elemente jedes dieser beiden Modulsysteme lassen sich also als ganze lineare, homogene Functionen der Elemente des anderen so darstellen, dass die Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen der n^2 Variabeln u_{ik} werden, und hiermit ist wohl für die schon von *Euler* vollständig erkannte und nachgewiesene Aequivalenz der beiden *Gleichungssysteme:*

$$(T.)\quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}u_{hi}=\delta_{gh}\right), \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{ig}u_{ih}=\delta_{gh}\right) \qquad (g,\ h=1,2,\dots n)$$

diejenige befriedigendste Art der Darlegung gewonnen, welche *Euler* gewünscht zu haben scheint.

In der 1770 erschienenen, im ersten Bande der Commentationes arithmeticae collectae*) auf S. 427—443 abgedruckten Abhandlung „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile“ stellt sich nämlich *Euler* zuerst die Aufgabe, neun Zahlen $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ zu finden, welche den zwölf Bedingungen genügen:

$$A^2+D^2+G^2=1, \quad B^2+E^2+H^2=1, \quad C^2+F^2+J^2=1,$$
$$AB+DE+GH=0, \quad AC+DF+GJ=0, \quad BC+EF+HJ=0,$$
$$A^2+B^2+C^2=1, \quad D^2+E^2+F^2=1, \quad G^2+H^2+J^2=1,$$
$$AD+BE+CF=0, \quad AG+BH+CJ=0, \quad DG+EH+FJ=0,$$

und knüpft daran folgende Bemerkung:

„*Cum numerus conditionum implendarum superet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plus quam determinatum videtur. Utcunque enim conditiones praescriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis jam contineantur, in iis deprehenditur, nisi quod summa conditionum* (7.), (8.), (9.) *conveniat cum summa conditionum* (1.), (2.), (3.)*; unde unica harum duodecim conditionum in reliquis jam contineri videtur; qua remota tamen adhuc undecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de ejusmodi relatione loquor, quae has conditiones consideranti occurrit, revera enim aliquot necessariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animadvertuntur, quam problema perfecte fuerit solutum*“.

Hiernach ging *Euler*s Wunsch dahin, Relationen zu erhalten, durch welche die letzten sechs Gleichungen sich ebenso direct als eine Folge der sechs ersten ergeben, wie durch die *eine*, von *Euler* angeführte Relation sich eine der zwölf Bedingungen als eine Folge der übrigen erweist. Diesem Wunsche entspricht *Lagrange*s Methode des Beweises der Aequivalenz der Gleichungssysteme ($T.$) nicht**), aber aus der im Art. I angegebenen allgemeineren Entwickelung resultirt, wenn dort $v_{ih}=u_{hi}$ und demnach:

$$\sum_{i=n}^{i=n} u_{gi}u_{hi}-\delta_{gh}=M_{gh}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_{ig}u_{ih}-\delta_{gh}=\overline{M}_{gh}$$
$$|u_{gh}|=U, \qquad \frac{\partial U}{\partial u_{gh}}=U_{hg} \qquad (g, h=1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, für den vorliegenden Fall die (übrigens auch leicht zu verificirende) Relation:

$$(R.) \qquad \overline{M}_{ik} = \overline{M}_{ik}(1-|M_{gh}+\delta_{gh}|)+U\sum_{g,h} u_{gi}U_{kh}M_{gh} \qquad (g, h, i, k=1, 2, \dots n),$$

*) Petersburg, 1849.

**) *Jacobi* hebt in seinen Bemerkungen zur *Euler*schen Abhandlung (S. 603 des III. Bandes der gesammelten Werke) diese Methode mit den Worten hervor: *Lagrange* hat in seiner Mécanique analytique bereits in der ersten Ausgabe gezeigt, wie die einen Bedingungen aus den anderen auf die leichteste Art und ohne alle Rechnung folgen.

in welcher jedes Glied auf der rechten Seite mindestens einen der Ausdrücke M_{gh} als Factor enthält, und durch welche daher, genau wie bei der einen *Euler*schen Relation, sich das Nullwerden der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Ausdrücke $\overline{M}_{ik}$ direct als eine Folge des Nullwerdens der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Ausdrücke M_{ik} ergiebt.

In ähnlicher Weise werden durch die einfachere und ebenfalls leicht zu verificirende Relation:

$$(R'.) \qquad \overline{M}_{ik} = \varepsilon \sum_{g,h} u_{gi} U_{kh} M_{gh} + \overline{M}_{ik}(1-\varepsilon U) \qquad (g,\, h,\, i,\, k = 1, 2, \ldots n;\ \varepsilon = \pm 1)$$

die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen $\overline{M}_{ik} = 0$ als eine Folge der $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ Gleichungen:

$$U = \varepsilon, \quad M_{gh} = 0 \qquad (g,\, h = 1, 2, \ldots n)$$

dargestellt; aber um die erste dieser $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ Gleichungen als eine Folge der übrigen aufzuzeigen, hat man nur die Relation:

$$(R''.) \qquad (U-\varepsilon)(U+\varepsilon) = |M_{gh}+\delta_{gh}|-1 \qquad (g,\, h = 1, 2, \ldots n),$$

welche von wesentlich anderer Art ist als die Relationen $(R.)$ und $(R'.)$, da sie z. B. nicht für jedes beliebige Modulsystem, sondern im Allgemeinen nur für Primmodulsysteme, gestattet, das Bestehen der Congruenz $U \equiv \pm 1$ aus dem Bestehen der Congruenzen $M_{gh} \equiv 0$ zu erschliessen.

VI. Für den allgemeinen im Art. I behandelten Fall, wo die Bedeutung der Ausdrücke M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh} = M_{gh}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} = \overline{M}_{gh} \qquad (g,\, h = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben ist, tritt an Stelle der Relation $(R.)$ die folgende:

$$(R^0.) \qquad \overline{M}_{ik} = \overline{M}_{ik}(1-|M_{gh}+\delta_{gh}|) + V \sum_{g,h} v_{hk} U_{ig} M_{gh} \qquad (g,\, h,\, i,\, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welcher jedes Glied auf der rechten Seite mindestens einen der Ausdrücke M_{gh} als Factor enthält, und durch welche es daher in Evidenz gesetzt wird, dass das Nullwerden der Ausdrücke $\overline{M}_{ik}$ eine Folge des Nullwerdens der Ausdrücke M_{gh} ist. Diese Relation, welche in Beziehung auf die Variabeln u_{ik}, v_{ik} von der Dimension $2n+2$ ist, scheint aber noch einer Vereinfachung fähig zu sein; wenigstens habe ich für den Fall $n = 2$ Relationen gefunden, deren Dimension nur gleich vier ist. Es sind dies die folgenden zwei:

$$\begin{aligned}
u_{11}v_{11}+u_{21}v_{12}-1 &= (1-u_{21}v_{12})(u_{11}v_{11}+u_{12}v_{21}-1)-u_{22}v_{21}(u_{11}v_{12}+u_{12}v_{22}) \\
&\quad +u_{11}v_{12}(u_{21}v_{11}+u_{22}v_{21})+u_{12}v_{21}(u_{21}v_{12}+u_{22}v_{22}-1), \\
u_{11}v_{21}+u_{21}v_{22} &= -u_{21}v_{22}(u_{11}v_{11}+u_{12}v_{21}-1)+u_{21}v_{21}(u_{11}v_{12}+u_{12}v_{22}) \\
&\quad +u_{11}v_{22}(u_{21}v_{11}+u_{22}v_{21})-u_{11}v_{21}(u_{21}v_{12}+u_{22}v_{22}-1),
\end{aligned}$$

aus welchen die zwei anderen zur Darstellung von:

$$u_{12}v_{21}+u_{22}v_{22}-1, \quad u_{12}v_{11}+u_{22}v_{12}$$

erforderlichen Relationen hervorgehen, wenn die Variabeln:

$$u_{11}, \quad u_{12}, \quad u_{21}, \quad u_{22}, \quad v_{11}, \quad v_{12}, \quad v_{21}, \quad v_{22}$$

durch:

$$u_{12}, \quad u_{11}, \quad u_{22}, \quad u_{21}, \quad v_{21}, \quad v_{22}, \quad v_{11}, \quad v_{12}$$

ersetzt werden.

Mit Benutzung der Bezeichnungen M_{gh}, $\overline{M}_{gh}$ lauten hiernach für den Fall $n=2$ die vier Relationen:

$$\begin{aligned}
\overline{M}_{11} &= (1-u_{21}v_{12})M_{11}-u_{22}v_{21}M_{12}+u_{11}v_{12}M_{21}+u_{12}v_{21}M_{22}, \\
\overline{M}_{12} &= \quad -u_{22}v_{12}M_{11}+u_{22}v_{11}M_{12}+u_{12}v_{12}M_{21}-u_{12}v_{11}M_{22}, \\
\overline{M}_{21} &= \quad -u_{21}v_{22}M_{11}+u_{21}v_{21}M_{12}+u_{11}v_{22}M_{21}-u_{11}v_{21}M_{22}, \\
\overline{M}_{22} &= (1-u_{22}v_{22})M_{11}-u_{21}v_{11}M_{12}+u_{12}v_{22}M_{21}+u_{11}v_{11}M_{22};
\end{aligned}$$

aber für *beliebige* Zahlen n muss die Ermittelung der Relation *niedrigster* Dimension:

$$\overline{M}_{ik} = \sum_{g,h} F_{gh}^{(ik)} M_{gh} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots n),$$

in welchen die Multiplicatoren $F_{gh}^{(ik)}$ ganze Grössen des aus den $2n^2$ Elementen u_{ik}, v_{ik} zu bildenden natürlichen Rationalitätsbereichs sind, weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben.