Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0107
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen.

(Von Herrn *Hermann Minkowski* in Bonn.)

Die wesentlich positiven quadratischen Formen verdienen und gestatten eine besondere Behandlung durch den Umstand, dass sie die einfachsten Formen sind, bei welchen durch den Werth der Form zugleich die Werthe sämmtlicher Veränderlichen begrenzt sind. Aus diesem Grunde erscheinen sie als ein naturgemässes Hülfsmittel für die Untersuchung von Reihen discreter Grössen, und in diesem Sinne sind sie namentlich von Herrn *Hermite* zu wiederholten Malen mit bedeutendem Erfolge verwendet worden.

Wenn ihren Coefficienten auch ganz beliebige reelle Werthe, nicht durchaus rationale beigelegt werden, so stellen sie doch immer geeignete Formen für Zahlen vor, d. h. es hat einen Sinn, die Unbestimmten in ihnen auf die Reihe der ganzen Zahlen zu beschränken. Bei einer solchen Auffassung können diese Formen im Speciellen als der analytische Ausdruck gewisser einfacher geometrischer Gebilde gelten, der parallelepipedisch angeordneten regelmässigen Punktsysteme, und es müssen irgend zwei Formen als äquivalent betrachtet werden, welche aus einander durch lineare Substitutionen mit ganzzahligen Coefficienten und von einer Determinante ± 1 hervorgehen.

Nun entsteht die Aufgabe, eine Vereinigung äquivalenter Formen, eine Klasse, vollständig durch Invarianten zu charakterisiren. Erst für binäre Formen hat durch die Untersuchungen von Herrn *Kronecker* diese Aufgabe insofern eine vollkommene Lösung gefunden, als hier in hinreichender Anzahl invariante Bildungen als explicite Functionen eines beliebigen Elements der Klasse und in einer Gestalt, welche die Invarianteneigenschaft unmittelbar in Evidenz treten lässt, gewonnen sind. Aehnliche Aufschlüsse hinsichtlich der Formen mit höherer Variabelnzahl mögen aus den jüngsten Arbeiten dieses Forschers zu erwarten sein.

Indess ist die genannte Aufgabe einer Lösung noch in einem anderen Sinne fähig. Gelingt es, aus den unendlich vielen Formen einer Klasse durch bestimmte Bedingungen eine einzige auszusondern, so stellt eine solche sogenannte reducirte Form gewissermassen ebenfalls ein vollständiges Invariantensystem der Klasse vor, nur dass der Ausdruck dieses Systems von irgend einer gegebenen Form der Klasse aus jedesmal erst durch ein gewisses besonderes Verfahren (das dafür aber nur arithmetische Operationen in beschränkter Zahl erfordern darf) hergeleitet werden kann.

In solcher Art hat *Lagrange**) die Theorie der binären quadratischen Formen in Angriff genommen und zu einem glänzenden Abschlusse gebracht. Seine Resultate über die definiten Formen erhielten durch *Legendre***) eine Fassung, welche wohl auf ihre Verallgemeinerungsfähigkeit hinweisen konnte.

Aus der fünften Section der „Disquisitiones arithmeticae" entnahm *Seeber****) die Anregung zu einem Studium der analogen Fragen betreffs der ternären definiten Formen. Seine äusserst mühsame und nicht erfolglose Arbeit fand eine angemessene Würdigung in einer von *Gauss*†) herrührenden, höchst bemerkenswerthen Anzeige. Namentlich durch zweierlei ist diese Anzeige ausgezeichnet: einmal durch den Hinweis auf das von uns schon erwähnte geometrische Aequivalent einer Klasse von positiven quadratischen Formen, dann durch eine eigenthümliche Identität, mittels deren eine wichtige, von *Seeber* nur durch Induction gefundene Grenze für die Coefficienten seiner reducirten Formen direct in Erscheinung tritt.

Die beschwerliche Methode und die verwickelten Beweise von *Seeber* veranlassten *Dirichlet*††), für den das nicht Einfache überall nur ein Zeichen des Unvollkommenen war, zu einer von Grund aus neuen Behandlung, bei welcher er besonders auch durch die von *Gauss* nur mehr in ihren Um-

---

*) *Recherches d'Arithmétique.* Mém. de l'Acad. de Berlin. 1773. p. 265. (Oeuvres de L. T. III. p. 695.)

**) *Théorie des Nombres,* 3[me] éd. T. I. § VIII.

***) *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen.* Freiburg im Breisgau. 1831.

†) Göttingische gelehrte Anzeigen, Jahrg. 1831. 2. S. 1065 (auch: dieses Journal Bd. 20. S. 312 und: Werke, Bd. II. S. 188).

††) *Ueber die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen,* dieses Journal Bd. 40. 1850. S. 209.

rissen angedeutete geometrische Einkleidung eine ausserordentliche Durchsichtigkeit erzielte. Der grosse Fortschritt von ***Dirichlet*** bestand darin, dass er nicht mit dem schwerfälligen rechnerischen Ausdrucke der Ungleichungen operirte, durch welche *Seeber* reducirte Formen definirt hatte, sondern mit deren wohlerkannter innerer Bedeutung, welche darauf hinausging, die reducirte Form von gewissen in dem zugehörigen Punktsysteme vorkommenden kleinsten Entfernungen abhängig zu machen.

Dasselbe ebenso einfache, wie sachgemässe Princip, doch in rein arithmetischer Fassung, befolgte Herr *Hermite**) in seinen zahlentheoretischen Briefen an *Jacobi*, welche in demselben Bande dieses Journals gedruckt sind, in dem die ausführlichere Darstellung *Dirichlet*s nach einem bereits vorher im Monatsbericht der Akademie (Jahrg. 1848) gegebenen Auszuge erschien. Die Untersuchungen von Herrn *Hermite* beziehen sich auf Formen mit beliebiger Variabelnzahl; sie beginnen mit der Aufstellung des Fundamentalsatzes der Reduction, wonach die kleinste, durch eine positive quadratische Form von n Variabeln mittelst ganzer Zahlen darstellbare, von Null verschiedene Grösse in ihrem dimensionslosen Verhältniss zur $n$ten Wurzel aus der Determinante der Form niemals einen gewissen, nur von der Zahl n abhängigen Betrag übersteigt; und sie stellen sich in ihrem Verlaufe als ein ununterbrochenes Zeugniss für die Fruchtbarkeit dieses Satzes in fast jedem Abschnitte der Zahlenlehre dar; es seien nur die Anwendungen auf Kettenbrüche, complexe Einheiten und approximative Auflösung von Gleichungen hervorgehoben.

Insbesondere ergiebt sich aus jenem Satze mit Leichtigkeit und noch auf mannigfache Weise die Endlichkeit der Klassenanzahl bei Beschränkung auf ganzzahlige Werthe der Coefficienten und einen festen ganzzahligen Werth der Determinante. Für diese specielle Folgerung musste offenbar bereits ein Verfahren genügen, um aus jeder Klasse überhaupt nur eine endliche Anzahl von Formen, nicht gerade eine einzige auszusondern. Eine werthvolle Ergänzung lieferte deshalb Herr *Camille Jordan***) durch den Nachweis, dass bei gewissen Festsetzungen wenigstens eine bloss von der Variabelnzahl abhängige Grenze für die Anzahl der im Maximum aus einer Klasse ausgesonderten Formen besteht, indem überhaupt die Sub-

---

*) Dieses Journal, Bd. 40. 1850. S. 261-315.

) ***Mémoire sur l'équivalence des formes.* Journ. de l'École Polyt. T. XXIX. Cah. 48. 1880. p. 111.

stitutionen, durch welche die ausgesonderten Formen in einander bei Aequivalenz oder in sich selbst übergehen könnten, von vornherein mit der Variabelnzahl und zwar in beschränkter Anzahl angewiesen erscheinen.

Neue Gesichtspunkte eröffneten *Korkine* und *Zolotareff**), indem sie jene besonderen Formen heranzogen und bis zur Variabelnzahl fünf vollständig bestimmten, für welche das in dem Fundamentalsatze von *Hermite* genannte Verhältniss (des durch ganze Zahlen erreichbaren Minimum zur $n$ten Wurzel aus der Determinante) ein Maximum ist.

In dem vorliegenden Aufsatze versuche ich hauptsächlich, gewisse Lücken auszufüllen, welche sich in der Theorie der positiven quadratischen Formen gegenwärtig noch fühlbar machen. So geht bei den bisher eingeführten reducirten Formen mit höheren Variabelnanzahlen der den ursprünglichen binären reducirten Formen von *Lagrange* innewohnende Charakter verloren, durch eine Reihe von linearen Ungleichungen in den Coefficienten definirt zu sein. Es erscheint mir aber theoretisch als eine Thatsache von ganz hervorragender Bedeutung, dass man im Stande ist, aus der $\frac{1}{2}n(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit, in welcher eine jede quadratische Form von n Variabeln durch einen Punkt, unter Zugrundelegung der Werthe der Coefficienten als Coordinaten, repräsentirt wird, aus dieser Mannigfaltigkeit mit Hülfe einer beschränkten Anzahl von lauter ebenen $(\frac{1}{2}n(n+1)-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten ein zusammenhängendes Gebiet abzugrenzen, in welchem — die Grenzen sind nur theilweise miteinzurechnen — jeder Punkt je eine Klasse von positiven Formen vertritt, und jede solche Klasse auch einmal und nur einmal vertreten ist.

Ein solches Gebiet wird durch die $(\frac{1}{2}n(n+1)-1)$-fache Mannigfaltigkeit aller Formen von einer festen positiven, im Uebrigen beliebigen Determinante in zwei Theile geschieden, von denen der am Nullpunkt befindliche einen endlichen Inhalt hat. Der Ausdruck dieses Inhalts wird hier allgemein mitgetheilt. Es steht dieser Inhalt mit interessanten mittleren Werthen der Zahlentheorie im Zusammenhang.

Die Ueberführung irgend einer gegebenen Form in eine reducirte muss durch ausschliessliche Verwendung einer beschränkten Zahl a priori anzuweisender Operationen geleistet werden können, und die Ausgangsform darf jedesmal nur in Bezug auf Reihenfolge und Wiederholung der Ope-

*) Math. Annalen Bd. 6. 1873. S. 366 und Bd. 11. 1877. S. 242.

rationen massgebend sein; dieser berechtigten Forderung wird hier genügt werden.

Mit Hülfe einer auch auf Formen mit mehr als drei Veränderlichen übertragenen geometrischen Ausdrucksweise gelingt es, den Fundamentalsatz von *Hermite* über das Minimum einer positiven quadratischen Form nicht allein als in gewissem Sinne evident hinzustellen, sondern auch die in diesem Satze und in Erweiterungen desselben benöthigten Grenzen den bisher angezeigten gegenüber beträchtlich zu verengern. Dadurch werden dann neue, folgenreiche Anwendungen dieses Satzes möglich. —

1.

Die Grundeigenschaft der wesentlich positiven quadratischen Formen.

Eine wesentlich positive quadratische Form kann nur für eine endliche Anzahl von ganzzahligen Werthsystemen ihrer Veränderlichen Werthe annehmen, die eine gegebene Grösse nicht überschreiten.

Denn eine solche Form f mit n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ ist bekanntlich immer als Summe der Quadrate von n unabhängigen reellen Linearformen ihrer Variabeln darstellbar:

$$f = \xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2,$$

$$(1^a.)\qquad \xi_a = \pi_{a1}x_1+\pi_{a2}x_2+\cdots+\pi_{an}x_n,\quad |\pi_{ab}| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (a,\, b=1,\, 2,\, \dots\, n)}.$$

Eine Ungleichung $f \leqq G$ mit positivem G hat nun für jede der Linearformen abs. $\xi_a \leqq \sqrt{G}$ zur Folge. Lautet die Auflösung dieser Formen nach ihren Variabeln:

$$(1^b.)\qquad x_b = \varphi_{1b}\xi_1+\varphi_{2b}\xi_2+\cdots+\varphi_{nb}\xi_n \qquad {\scriptstyle (b=1,\, 2,\, \dots\, n)},$$

so muss daher

$$\text{abs. } x_b \leqq \sqrt{G}(\text{abs. }\varphi_{1b}+\text{abs. }\varphi_{2b}+\cdots+\text{abs. }\varphi_{nb}) \qquad {\scriptstyle (b=1,\, 2,\, \dots\, n)}$$

sein. Diesem Systeme von Ungleichungen können aber nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Systemen $x_1, x_2, \dots x_n$ entsprechen. Natürlich brauchen diese dann nicht sämmtlich ein $f(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq G$ zu ergeben.

2.

Die geometrische Interpretation der wesentlich positiven quadratischen Formen.

In einer ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit mögen die Werthe der Linearformen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ solche Coordinaten für einen veränderlichen

Punkt P abgeben, dass das Quadrat des von P ausgehenden Linearelements durch die Summe der Quadrate der Differentiale $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_n$ ausgedrückt erscheint. Der Nullpunkt der so vorausgesetzten rechtwinkligen Coordinaten heisse O. Jedem Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ entspricht gemäss (1^a.) ein Werthsystem $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, und kommt jetzt ein Punkt P zu; die Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ stellt offenbar das Quadrat der Entfernung dieses Punktes P von dem festen Nullpunkte O dar.

Welche Punkte gehören nun den ganzzahligen Systemen $x_1, x_2, \dots x_n$ an? Um diese Punkte zu finden, hat man zuvörderst diejenigen n Punkte $P_1, P_2, \dots P_n$ kenntlich zu machen, für welche jedesmal eine der n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ den Werth 1 und die anderen $n-1$ den Werth Null haben. Liegen diese n Punkte vom Nullpunkte O beziehlich um die Strecken $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_n$ ab, so wird der Punkt, welcher einem willkürlich gewählten Systeme $x_1, x_2, \dots x_n$ angehört, gefunden, indem man vom Nullpunkte aus die Strecke

$$\mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \cdots + \mathfrak{p}_n x_n$$

construirt, wobei die Additionen in geometrischem Sinne zu verstehen sind.

Hiernach würde man folgendermassen zu den sämmtlichen Punkten mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $x_1, x_2, \dots x_n$ gelangen können: Man stelle in die am Punkte O von den dort ausgehenden n Strecken $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_n$ gebildete n-kantige Ecke — das Vorhandensein einer solchen wirklichen Ecke ist die Folge der Unabhängigkeit der Gleichungen (1^a.) — ein mit diesen n Strecken als Kanten construirtes n-dimensionales Parallelepipedum. Von den $2n$ $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungsebenen dieses Parallelepipedum wollen wir die n durch den Punkt O nicht hindurchgehenden in ihrer ganzen Ausdehnung, d. h. mit allen ihren Grenzlinien verschiedener Dimensionen, also im Besonderen mit allen übrigen Eckpunkten, als nicht mehr zu dem *Bereiche* des Parallelepipedum gehörig betrachten; in ähnlichem Sinne wollen wir uns auch künftighin den Bereich jedes irgend einmal vorkommenden Parallelepipedum festgesetzt denken. An jede der $2n$ Begrenzungsflächen dieses Grundparallelepipedum lege man gleichgerichtet ein vollkommen gleiches Parallelepipedum, an die noch freien Begrenzungsflächen dieser Parallelepipeda wieder ein gleiches, und dieses Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Dann finden sich die gesuchten Punkte in den einzelnen Hauptecken dieser nach einander construirten Parallelepipeda.

Das vollständige System dieser Punkte mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist um jeden einzelnen seiner Punkte in gleicher Weise gelagert. Wir nennen es deshalb ein *regelmässiges Punktsystem.* Wir werden ein solches System mitunter einfach mit dem Buchstaben $\mathfrak{P}$ ohne weiteren Zusatz, oder wenn die Dimension des Systems kenntlich gemacht werden soll, mit $\mathfrak{P}^{(n)}$ bezeichnen. Ein System $\mathfrak{P}$ besetzt nach irgend einer Parallelverschiebung entweder vollständig neue Punkte oder tritt wieder ganz in die anfänglichen Lagen seiner Punkte ein.

Da die zu construirenden Parallelepipeda den ganzen vorausgesetzten n-dimensionalen Raum lückenlos erfüllen werden, und da sie überdies nach den Punkten des Systems zählbar, d. h. ihnen eindeutig zugeordnet sind — nach unseren Festsetzungen über den Bereich dieser Parallelepipeda ist ein jeder Punkt des Raumes einem und nur einem der Parallepipeda zuzutheilen —, so wird innerhalb eines, überallhin gleichmässig ins Unendliche ausgedehnten Gebiets (man denke beispielsweise an einen n-dimensionalen Würfel mit unendlich grosser Kante) im Durchschnitt ein Punkt des Systems auf einen Raumtheil gleich dem Volumen des Grundparallelepipedum kommen. In der Maasszahl dieses Volumens erkennen wir hiernach eine für das Punktsystem an sich charakteristische und von der Wahl des Gerüsts, durch welches wir die Punkte verbunden haben, völlig unabhängige Constante; und den reciproken Werth dieser Maasszahl werden wir passend als die *mittlere Dichtigkeit des Punktsystems* bezeichnen können.

Zu jedem Punktsysteme giebt es offenbar ein geometrisch ähnliches Punktsystem von der mittleren Dichtigkeit 1.

3.

Erneuter Beweis der Grundeigenschaft.

Die in 1. bewiesene Grundeigenschaft der wesentlich positiven quadratischen Formen lässt sich nun auch leicht geometrisch einsehen.

Die gesammten Begrenzungsflächen der vorhin construirt gedachten Parallelepipeda sind enthalten in n verschiedenen Schaaren von lauter parallelen und äquidistanten $(n-1)$-dimensionalen Ebenen, als deren Durchschnitte eben die Punkte unseres Systems sich ergeben. Die Distanzen in den einzelnen Schaaren werden durch die n Höhen des Grundparallelepipedum geliefert; die Längen dieser Höhen mögen $h_1, h_2, \ldots h_n$ heissen.

In jeder einzelnen Schaar sind die Elemente nach einer bestimmten der n Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu numeriren. Im Nullpunkte O kreuzen sich die Nullelemente aller Schaaren; in einem Punkte P mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $x_1, x_2, \dots x_n$ das $x_1$te Element der ersten, das $x_2$te der zweiten, ... das $x_n$te der $n$ten Schaar. Nun kann der Abstand OP nicht kleiner sein als der senkrechte Abstand zweier durch O und P gehenden $(n-1)$-dimensionalen Parallelebenen. Soll also der Abstand OP eine gegebene Länge $\sqrt{G}$ nicht überschreiten, d. h. soll:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \leqq G$$

sein, so müssen um so mehr die Ungleichungen statthaben:

$$h_a \,\mathrm{abs.}\, x_a \leqq \sqrt{G} \qquad (a = 1, 2, \dots n), \tag{3.}$$

und diesen kann wieder nur eine beschränkte Anzahl von ganzen Zahlen genügen.

4.

Positive quadratische Form und Parallelepipedum.

Die mit Ausnahme des Falles $n = 1$ immer vorhandene Willkür in der Darstellung einer positiven quadratischen Form f als Summe von n Quadraten linearer Formen betrifft geometrisch nur die Neigung der Elementarparallelepipeda gegen die rechtwinkligen Coordinatenaxen, auf welchen die linearen Formen ihre Auslegung finden: es sind nämlich die Projectionen der Strecken $\mathfrak{p}_b$ auf die Axen der $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ genau die Coefficienten $\pi_{1b}, \pi_{2b}, \dots \pi_{nb}$ der zugehörigen Variablen x_b in den linearen Formen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$.

Die Figur des Elementarparallelepipedum, ohne Rücksicht auf ihre Stellung im vorausgesetzten n-dimensionalen Raume, aber mit Kennzeichnung ihrer Ursprungsecke und der Reihenfolge der Kanten an dieser Ecke, bestimmt eindeutig den Ausdruck der Form f in ihren Coefficienten. Soll dieser:

$$f = \Sigma q_{ab} x_a x_b \qquad \left(\begin{matrix} a, b = 1, 2, \dots n \\ q_{ab} = q_{ba}, \; a \gtreqless b \end{matrix}\right) \tag{4.}$$

lauten, so bedeutet jedesmal ein Coefficient q_{aa} mit gleichen Indices das Quadrat der Länge der Strecke $\mathfrak{p}_a$, und ein Coefficient q_{ab} mit verschiedenen Indices das Product aus den Längen der Strecken $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ und dem Cosinus des Neigungswinkels dieser Strecken. Ferner bedeuten: 1) die Determinante der Form, $|q_{ab}| = \Delta$, das Quadrat des Inhalts des Parallelepipedum, 2) die symmetrischen Unterdeterminanten $\frac{\partial \Delta}{\partial q_{aa}}$ die Quadrate der Inhalte seiner paarweise einander gleichen Begrenzungsebenen, so dass für die n Höhen des Parallelepipedum die Ausdrücke resultiren:

$$h_a = \sqrt{\frac{\Delta}{\frac{\partial\Delta}{\partial q_{aa}}}} \qquad (a=1,2,\dots n).$$

Alle diese Beziehungen sind am einfachsten durch ein Zurückgehen auf das rechtwinklige Coordinatensystem der $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ einzusehen, werden übrigens sofort noch klarer hervortreten.

Umgekehrt gehören dagegen zur gegebenen wesentlich positiven Form f (4.) in dem gleichen Raume von n Dimensionen immer zwei verschiedene Arten von n-kantigen begrenzten Ecken, und dementsprechende Parallelepipeda. Denn zunächst haben wir jedenfalls in 2. eine solche Art gefunden, und zwar auf Grund irgend einer Darstellung von f als Summe der Quadrate von n linearen Formen. Um das dabei angewandte Verfahren beschreiben zu können, ohne auf die Bedeutung der ξ-Coordinaten wieder eingehen zu müssen, wollen wir uns auf den positiven Seiten der rechtwinkligen Coordinatenaxen der $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ die n Punkte $E_1, E_2, \dots E_n$ markirt denken, welche in der Einheit der Entfernung von O abliegen, und die geometrischen Strecken nach diesen Punkten mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \dots \mathfrak{e}_n$ bezeichnen. Dann entsteht die erste, zur Form f gehörige Ecke $O(P_1P_2\dots P_n)$ aus 2. einfach, indem in O die Strecken:

$$(4^a.) \qquad \mathfrak{p}_b = \pi_{1b}\mathfrak{e}_1 + \pi_{2b}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \pi_{nb}\mathfrak{e}_n \qquad (b=1,2,\dots n)$$

angefügt werden. Der günstige Erfolg dieser Operation lässt sich am besten mit Hülfe einer von *Grassmann* eingeführten Symbolik übersehen: Das Product aus den Längen zweier Strecken $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ und dem Cosinus ihres Neigungswinkels mag das *innere Product* dieser Strecken heissen und $\mathfrak{l}|\mathfrak{m}$ geschrieben werden. Offenbar gilt für diese Art von Multiplication neben den Regeln $\mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_a = 1$, $\mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_b = 0$ $(a \gtrless b)$ das distributive Gesetz, und daraus geht sofort $\mathfrak{p}_a|\mathfrak{p}_b = q_{ab}$ hervor. Andererseits aber folgt allein aus den Beziehungen $\mathfrak{p}_a|\mathfrak{p}_b = q_{ab}$, sowie man mit Hülfe der aus (1^b.) entnommenen Coefficienten n Strecken:

$$(4^b.) \qquad \mathfrak{e}_a = \varphi_{a1}\mathfrak{p}_1 + \varphi_{a2}\mathfrak{p}_2 + \cdots + \varphi_{an}\mathfrak{p}_n \qquad (a=1,2,\dots n)$$

bildet, mit Nothwendigkeit: $\mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_a = 1$, $\mathfrak{e}_a|\mathfrak{e}_b = 0 (a \gtrless b)$, und also jedesmal eine rechtwinklige Ecke mit n Kanten gleich der Längeneinheit.

Von solchen rechtwinkligen Ecken giebt es nun in einem Raume von n Dimensionen (genau so wie im speciellen Falle $n=3$) immer zwei Arten, die innerhalb dieses Raumes nicht in allen ihren entsprechenden Kanten zugleich zur Deckung zu bringen sind. Eine Art können wir als durch die Ecke $O(E_1 E_2 \ldots E_n)$ der Coordinatenaxen definirt betrachten. Dann entsteht die zweite Art durch Spiegelung dieser Ecke an irgend einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene, und durch die nämliche Spiegelung muss aus der zuerst gefundenen Ecke $O(P_1 P_2 \ldots P_n)$ eine zweite zu f gehörige Ecke hervorgehen. Der Spiegelung an einer Ebene:

$$\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \cdots + \varphi_n \xi_n = 0$$

entspricht die Umwandlung der Coefficienten π_{ab} in:

$$\pi_{ab} - 2\left(\frac{\pi_{1b}\varphi_1 + \pi_{2b}\varphi_2 + \cdots + \pi_{nb}\varphi_n}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots + \varphi_n^2}\right)\varphi_a \qquad (a, b = 1, 2, \ldots n).$$

Man überzeugt sich leicht, dass dabei die Quadratsumme der linearen Formen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ den Ausdruck f ungeändert beibehält, die Determinante $|\pi_{ab}|$ hingegen in den entgegengesetzten Werth übergeht, was eben das Zeichen dafür ist, dass in der That eine Ecke neuer Art gewonnen ist.

Ueberhaupt können wir nämlich in n Dimensionen zwei Arten von n-kantigen wirklichen Ecken unterscheiden, in diesem Sinne: n-kantige Ecken gleicher Art sind durch continuirliche Abänderungen, ohne dass sie aufhören, wirkliche Ecken zu bleiben, zum Zusammenfallen in allen ihren entsprechenden Kanten zu bringen; bei n-kantigen Ecken ungleicher Art ist solches nicht möglich. Dass n Strecken $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$ eine *wirkliche* Ecke bilden, heisst soviel, wie dass sie auf ein Parallelepipedum von nichtverschwindendem n-dimensionalem Inhalte führen. Den fraglichen Inhalt können wir als eine Art von Product auffassen und $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n$ schreiben. Wir haben es alsdann mit der sogenannten *äusseren Multiplication* von Strecken zu thun (es ist das wieder eine Bezeichnung von *Grassmann*), für welche neben dem distributiven und dem associativen Gesetze offenbar die Regel gilt, dass das Product einer Strecke in sich selbst Null ist, woraus für zwei Strecken $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ durch Betrachtung von $(\mathfrak{l}+\mathfrak{m})(\mathfrak{l}+\mathfrak{m})$ sich $\mathfrak{l}\mathfrak{m} = -\mathfrak{m}\mathfrak{l}$ ergiebt; und mit Hülfe dieser Regeln folgt aus (4^a.): $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n = |\pi_{ab}|\, \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$. Das Nichtverschwinden der Determinante $|\pi_{ab}|$ ist hiernach für die Bildung einer wirklichen Ecke charakteristisch, und nach dem Vorzeichen dieser Determinante richtet sich dann, wie man leicht einsieht, die Art der Ecke.

In dem aus einer Ecke $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_n)$ folgenden Parallelepipedum befindet sich der betreffenden Ecke diametral gegenüber eine Ecke mit den Kanten $-\mathfrak{p}_1$, $-\mathfrak{p}_2$, ... $-\mathfrak{p}_n$; diese zweite Ecke gehört offenbar zu derselben quadratischen Form, ergiebt aber bei ungeradem n ein entgegengesetztes Kantenproduct. Bei ungeradem n sind demnach die Parallelepipeda, welche aus zwei zusammengehörigen Ecken ungleicher Art entstehen, im Wesentlichen identisch, sie erscheinen nur verschieden aufgefasst, während bei geradem n eine Deckung solcher zweier Parallelepipeda in der Regel erst innerhalb eines dimensionsreicheren Raumes zu erzielen sein wird. —

Da die quadratische Form f als Ausdruck eines parallelepipedisch geordneten, regelmässigen Punktsystems in einem gegebenen Raume, wie wir sehen, eine Zweideutigkeit bestehen lässt, so erscheint es vielleicht angebrachter, als solchen Ausdruck die *lineare* Form:

$$\mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \dots + \mathfrak{p}_n x_n = \mathfrak{p}$$

zu nehmen. In dieser sind die Coefficienten allerdings nicht reine Zahlen, sie bedeuten vielmehr Strecken, bestimmt in Richtung und Länge; aber durch ausschliessliche Betrachtung dieser Strecken sind keine weiteren Zahlgrössen zu entnehmen, als eben die Coefficienten von f. Das Volumen $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$ setzen wir immer als von Null verschieden voraus. Nach der vorhin erklärten Ausdrucksweise würde f als das innere Product dieser linearen Form $\mathfrak{p}$ in sich selbst, als ihr inneres Quadrat, zu bezeichnen sein.

5.

Anschauliche Auslegung des Aequivalenzbegriffs.

Ist ein, auf irgend eine Weise in parallelepipedischer Anordnung gegebenes regelmässiges Punktsystem $\mathfrak{P}^{(n)}$ noch weiterer solcher Anordnungen fähig?

Bei jeder solchen Anordnung müsste jeder Punkt des Systems als Ausgangspunkt einer, in n anderen Punkten des Systems endenden Ecke eines jedesmal gleichen Parallelepipedum erscheinen, in dessen Bereich — wenn die dem Punkte nicht anliegenden Begrenzungsflächen immer vollständig ausgeschlossen werden — kein weiterer Punkt des Systems fallen dürfte. Verbinden wir also zunächst einen beliebigen Punkt O des Systems mit n beliebigen anderen Punkten des Systems, die nur nicht sämmtlich mit O zusammen bereits in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene liegen sollen. Die Strecken von O nach diesen n Punkten mögen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_n$ heissen. Da diese Strecken lauter Punkte des Systems verbinden, so werden sie mit den für die gegebene Anordnung charakteristischen Strecken $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$ durch irgend welche Relationen:

$$\mathfrak{q}_b = s_{1b}\mathfrak{p}_1 + s_{2b}\mathfrak{p}_2 + \cdots + s_{nb}\mathfrak{p}_n \qquad (b = 1, 2, \ldots n)$$

mit lauter ganzzahligen Coefficienten s_{ab} verbunden sein, die nur ein nichtverschwindendes Volumen $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_n$ (d. i. eine nichtverschwindende Determinante $|s_{ab}|$) zu ergeben haben; und deshalb wird dann weiter auch jede beliebige, von O aus construirte Strecke $\mathfrak{q}_1 y_1 + \mathfrak{q}_2 y_2 + \cdots + \mathfrak{q}_n y_n = \mathfrak{q}$ mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $y_1, y_2, \ldots y_n$ auf einen Punkt des Systems auslaufen müssen.

Ein von O aus, der eben genannten linearen Form $\mathfrak{q}$ gemäss, in parallelepipedischer Anordnung aufgebautes Punktsystem $\mathfrak{Q}$ wird also ganz in dem vorausgesetzten Punktsysteme $\mathfrak{P}$ enthalten sein. Dieses System $\mathfrak{Q}$ wird mit $\mathfrak{P}$ zusammenfallen, also eine neue parallelepipedische Anordnung von $\mathfrak{P}$ darbieten, wenn die Parallelepipeda von $\mathfrak{Q}$ in ihren Bereichen — dieselben in dem früher festgesetzten Sinne genommen — ausser ihrer jedesmaligen Hauptecke keine weiteren Punkte von $\mathfrak{P}$ enthalten. Jedenfalls enthält nun jedes dieser Parallelepipeda gleichviele Punkte aus $\mathfrak{P}$, sagen wir s, und an lauter entsprechenden Stellen, da die Parallelverschiebungen, durch welche $\mathfrak{Q}$ mit sich selbst zur Deckung kommt, ja nichts weiter als ein Theil der Deckbewegungen von $\mathfrak{P}$ sind. In 2. sahen wir, dass innerhalb eines unendlich grossen n-dimensionalen Würfels aus dem Punktsysteme $\mathfrak{P}$ im Durchschnitt ein Punkt auf einen Raumtheil gleich dem Volumen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n$ kommt, und nun sollen offenbar s solcher Punkte im Durchschnitt auf einen Raumtheil gleich dem Volumen $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_n = |s_{ab}|\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n$ kommen. Mithin kann die Zahl s nur den absoluten Werth der Determinante $|s_{ab}|$ vorstellen, und die Bedingung für eine neue parallelepipedische Anordnung des Punktsystems $\mathfrak{P}$ lautet: $|s_{ab}| = \pm 1$. Es ist geometrisch evident, dass bei Erfüllung dieser Bedingung umgekehrt auch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$ als lineare Functionen von $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_n$ lauter ganzzahlige Coefficienten werden aufweisen müssen.

Die Form $\mathfrak{q}$ geht aus der Form $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \cdots + \mathfrak{p}_n x_n$ vermittelst der Substitution:

$$x_a = s_{a1}y_1 + s_{a2}y_2 + \cdots + s_{an}y_n \qquad (a = 1, 2, \ldots n)$$

hervor, und es ist klar, dass durch dieselbe Substitution aus der quadratischen Form $\mathfrak{p}|\mathfrak{p} = f$ eine quadratische Form g entsteht, welche als das innere Quadrat von $\mathfrak{q}$ erscheinen wird. Die Eigenschaften der zugehörigen Punktsysteme machen es verständlich, dass man die, durch eine solche lineare Substitution mit ganzzahligen Coefficienten aus einer Form f hervorgehende Form g als *enthalten* in der Form f bezeichnet, ebenso, dass man sie der Form f *äquivalent* nennt, wenn die Determinante $|s_{ab}| = \pm 1$ ist. Man spricht von eigentlicher oder uneigentlicher Aequivalenz, je nachdem $|s_{ab}| = 1$ oder $= -1$ ist, je nachdem also die für f und g übereinstimmenden Punktsysteme aus Ecken gleicher oder ungleicher Art herzuleiten sind. Da bei ungeradem n vermöge der Substitution $x_1 = -y_1$, $x_2 = -y_2$, $\ldots$ $x_n = -y_n$ jede Form sich selbst auch uneigentlich äquivalent ist, so hat diese letztere Unterscheidung nur bei geradem n einen Werth; natürlich können auch hier unter Umständen Formen einander eigentlich und uneigentlich äquivalent zu gleicher Zeit sein.

Eine *Klasse* von äquivalenten Formen entspricht nun dem Inbegriff aller möglichen parallelepipedischen Anordnungen eines Punktsystems $\mathfrak{P}$.

6.

Von dem Minimum einer wesentlich positiven quadratischen Form.

In einem parallelepipedisch geordneten, regelmässigen Punktsysteme $\mathfrak{P}^{(n)}$ denken wir uns um irgend einen Punkt O des Systems als Centrum zwei n-dimensionale Kugeln construirt; der Radius der einen sei die kleinste der Höhen des Elementarparallelepipedum, der Radius der anderen die kleinste der Längen seiner Kanten. Nach (3.) kann in das Innere der ersten Kugel ausser O kein weiterer Punkt des Systems fallen; dagegen liegen gewiss zwei solcher Punkte an den Enden eines bestimmten Durchmessers der zweiten, mithin jedenfalls nicht kleineren Kugel. Nach 1. oder 3. können wir alle Punkte bestimmen, welche in der Schicht zwischen den beiden Kugeln, die Begrenzungen mit eingerechnet, sich vorfinden; ihre Anzahl ist nach den dortigen Sätzen eine beschränkte. Unter diesen Punkten werden dann ein oder vielleicht mehrere Paare vorhanden sein, welche dem Punkte O am nächsten liegen. Die Entfernung dieser nächstgelegenen Punkte von O bezeichnen wir mit $\sqrt{M}$; wegen der Regelmässigkeit des Punktsystems ist dieses dann überhaupt die kleinste Entfernung zweier Punkte, welche im Systeme vorkommt. Zugleich ist M die kleinste, von Null verschiedene Grösse, welche durch die, zur gegebenen Anordnung des Systems gehörige quadratische Form f mittelst ganzer Zahlen darstellbar ist; wir nennen M das *Minimum* dieser Form f. Fast evident erscheint nun die folgende wichtige Eigenschaft:

Die kleinste Entfernung zweier Punkte in einem regelmässigen Punktsysteme kann nicht einen gewissen, durch die mittlere Dichtigkeit des Systems bestimmten Betrag übersteigen.

Denn denken wir uns um jeden Punkt des Systems einen n-dimensionalen Würfel von der Kante $\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{M}$ abgegrenzt, indem wir jedesmal den Punkt als Mittelpunkt des Würfels nehmen, — wir können uns etwa alle diese Würfel parallel orientirt vorstellen —, so sind die vom Mittelpunkte am weitesten abliegenden Punkte eines solchen Würfels jedesmal seine Eckpunkte, und die Entfernung dieser vom Mittelpunkte beträgt das $\frac{1}{2}\sqrt{n}$-fache der Kante, also hier $\frac{1}{2}\sqrt{M}$. Wegen der Bedeutung der Länge $\sqrt{M}$ können daher diese Würfel sich niemals durchdringen, sie können höchstens unter Umständen in ihren Eckpunkten zusammentreffen, müssen im Uebrigen aber ausserhalb ihrer Seitenflächen noch einen freien Raum zwischen sich lassen. Ziehen wir diesen freien Raum in Betracht, so kommt also in einem, überallhin gleichmässig ins Unendliche ausgedehnten Raume auf einen Raumtheil gleich dem Volumen eines der Würfel im Durchschnitt weniger als ein Punkt des Systems. Dieses Volumen muss also nach den Betrachtungen in 2. kleiner sein als das Volumen des Elementarparallelepipedum, d. h. wir haben:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{M}\right)^n < \sqrt{\varDelta},$$

oder:

$$M < n\sqrt[n]{\varDelta}, \tag{6^a.}$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist. In dem sehr einfachen Falle $n = 1$, den wir hier stillschweigend übergangen haben, müsste in diesen Formeln offenbar das Gleichheitszeichen statt $<$ genommen werden.

Wir haben so den folgenreichen Satz von Herrn *Hermite* über das Minimum einer positiven quadratischen Form in das rechte Licht gesetzt und zugleich in $n\sqrt[n]{\varDelta}$ eine sehr viel engere Grenze für dieses Minimum gefunden, als sie, die kleinsten Zahlen n ausgenommen, bisher bekannt ist (s. unten 10.). Wir können aber sofort auch diese Grenze noch einschränken. Construiren wir nämlich um jeden Punkt des Systems als Mittelpunkt eine n-dimensionale Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{M}$, so müssen auch diese, den vorhin construirten Würfeln umschriebenen Kugeln sich gegenseitig vollständig ausschliessen und zwischen sich noch einen freien Raum lassen, und es muss also auch das Volumen einer solchen Kugel kleiner sein als das Volumen des Elementarparallelepipedum. Nun beträgt das Volumen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius 1 bekanntlich:

$$\frac{\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)},$$

d. i. je nachdem n gerade oder ungerade ist:

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{1.2.3\cdots\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1.3.5\ldots n};$$

also finden wir:

$$\frac{\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}(\tfrac{1}{2}\sqrt{M})^n < \sqrt{\Delta}. \tag{6^b.}$$

Durch Benutzung des asymptotischen Ausdrucks der Γ-Function folgt daraus leicht:

$$M < \frac{2n}{\pi e}\sqrt[n]{n\pi e^{\frac{1}{3n}}}\sqrt[n]{\Delta},$$

sodass diese zweite Grenze für das Minimum bei grossen Werthen von n ungefähr das $\frac{2}{\pi e} = 0{,}234\ldots$fache der früher gefundenen ausmacht. Später werden wir noch engere Grenzen für das Minimum kennen lernen.

7.

Anwendung auf die Theorie der algebraischen Zahlen.

Eine der ersten Anwendungen, welche Herr *Hermite* von der Existenz einer Grenze für das Minimum positiver quadratischer Formen gemacht hat, betraf die Theorie der algebraischen Zahlen. Die grossen Fortschritte, welche auf diesem Gebiete seitdem erzielt sind, und andererseits die im Vorhergehenden gefundene natürlichere Grenze für das Minimum ermöglichen es uns, diese Anwendung wesentlich zu vertiefen und sie zugleich in vollkommenerer Form zur Darstellung zu bringen.

Es sei θ eine Wurzel einer irreductiblen ganzzahligen Gleichung von einem Grade n, welcher grösser als Eins sei; und es bedeute $\mathfrak{o}$ das System aller ganzen algebraischen Zahlen, welche unter den rationalen Functionen von θ mit ganzzahligen Coefficienten überhaupt zu finden sind. Es sei ferner $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ irgend eine Reihe von n Zahlen aus $\mathfrak{o}$, für welche das Quadrat der Determinante

$$|\omega_k^{(h)}| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

aus den n conjugirten Reihen von Null verschieden und dazu dem absoluten Betrage nach möglichst klein ausfalle, und der dabei eintretende Werth dieses Quadrats, die sogenannte ***Discriminante*** von $\mathfrak{o}$, heisse D. Das System $\mathfrak{o}$ stimmt dann genau überein mit den Werthen der Form

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n = \omega$$

für alle möglichen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, und diese Werthe sind unter einander alle verschieden*). Wenden wir dieselben Zeichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ für die Unbestimmten einer beliebigen, wesentlich positiven Form f mit entsprechender Zahl n an, so kann daher ein, dieser Form f gemäss parallelepipedisch aufgebautes regelmässiges Punktsystem $\mathfrak{O}$ gewissermassen als Träger des gesammten Zahlensystems $\mathfrak{o}$ betrachtet werden; wir haben nur festzusetzen, welcher Punkt der Zahl $\omega = 0$ entsprechen soll.

Unter einem ***Ideal*** des Gebietes $\mathfrak{o}$ versteht man nach Herrn *Dedekind* jedes in $\mathfrak{o}$ enthaltene und nicht aus der Zahl Null allein bestehende Zahlensystem $\mathfrak{a}$, dessen Inhalt keine Bereicherung erfahren könnte, weder wenn man Summen und Differenzen aus seinen Zahlen, noch wenn man Producte aus seinen Zahlen in Zahlen aus $\mathfrak{o}$ hinzunehmen wollte (*D.* § 168). Als Träger eines Ideals $\mathfrak{a}$ erscheint ein, im Punktsysteme $\mathfrak{O}$ im Sinne von 5. enthaltenes, ebenfalls parallelepipedischer Anordnungen fähiges, regelmässiges n-dimensionales Punktsystem $\mathfrak{A}$; der Quotient aus der mittleren Dichtigkeit des Punktsystems $\mathfrak{O}$ und der mittleren Dichtigkeit dieses darin enthaltenen Punktsystems $\mathfrak{A}$ heisst die *Norm* des Ideals $\mathfrak{a}$, in Zeichen: $\mathrm{Nm}(\mathfrak{a})$. Es giebt immer nur eine beschränkte Anzahl von Idealen, welche dieselbe

*) *Kronecker,* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctorjubiläum. Dieses Journal Bd. 92. S. 99. — *Dedekind,* Allgemeine Zahlentheorie (Suppl. XI zu den Vorlesungen über Zahlentheorie von *Dirichlet,* III. Aufl.). — Für unsern speciellen Zweck liegen die *Dedekind*schen Begriffsbestimmungen besonders günstig; auf das soeben genannte Werk beziehen sich im Folgenden die Citate mit dem Buchstaben *D.*

Norm haben. Das System $\mathfrak{o}$, selbst ein Ideal, ist offenbar das einzige von der Norm 1. Die Gesammtheit aller Zahlen in $\mathfrak{o}$, welche durch eine bestimmte, von Null verschiedene Zahl η aus $\mathfrak{o}$ theilbar sind, constituirt ein sogenanntes *Hauptideal* $\mathfrak{o}\eta$; die Norm eines solchen ist der absolute Werth der Norm von η, d. i. des Products der n conjugirten Zahlen $\eta', \eta'', \ldots \eta^{(n)}$, welche zu den einzelnen n Wurzeln der irreductiblen Ausgangsgleichung in derselben Beziehung stehen wie die Zahl η zu der Wurzel θ dieser Gleichung.

Unter dem *Producte* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man den Inbegriff aller Zahlen, welche sich als ein Product aus einer Zahl in $\mathfrak{a}$ und einer Zahl in $\mathfrak{b}$ oder als Summe mehrerer solcher Producte darstellen lassen; das Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist wieder ein Ideal und seine Norm das Product der Normen von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ (*D.* § 170). Beziehungen zwischen Producten aus Idealen lassen ganz analoge Folgerungen zu wie Beziehungen zwischen Producten aus rationalen ganzen Zahlen; das Ideal $\mathfrak{o}$ spielt dabei die Rolle der Zahl 1.

Zu jeder, von Null verschiedenen Zahl μ eines Ideals $\mathfrak{a}$ giebt es ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{m}$, welches die Gleichung $\mathfrak{o}\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ befriedigt und also die Fähigkeit besitzt, durch sein Hinzutreten als Factor das Ideal $\mathfrak{a}$ in ein Hauptideal zu verwandeln (*D.* § 175). Die Ideale werden nach den Multiplicatoren classificirt, welche geeignet sind, sie in Hauptideale zu verwandeln und über diese Multiplicatoren wollen wir nun einen wichtigen Satz ableiten. Zu dem Ende legen wir jedoch eine quadratische Form f von besonderer Beschaffenheit zu Grunde, nämlich wir setzen:

$$f = \sum_h \lambda_h (\text{abs.}\, \omega_1^{(h)} x_1 + \omega_2^{(h)} x_2 + \cdots + \omega_n^{(h)} x_n)^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots n);$$

die linearen Formen in diesem Ausdrucke sollen die n mit der Form ω conjugirten Formen vorstellen; unter $(\text{abs.})^2$ soll das Quadrat des absoluten Betrags einer solchen Form verstanden werden, die Variabeln als reelle Grössen gedacht; ferner sollen die λ_h beliebige positive Constanten bedeuten. Ein solches f ist eine wesentlich positive quadratische Form, und die Determinante dieser Form hat den Ausdruck $\prod_h \lambda_h$ abs. D, unter abs. D den absoluten Werth der Discriminante D verstanden. Die mittlere Dichtigkeit in dem, zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ gehörigen Punktsysteme $\mathfrak{A}$ wird demnach

$$1 : \text{Nm}(\mathfrak{a}) \sqrt{\prod_h \lambda_h \,\text{abs.}\, D}$$

betragen. Fassen wir nun in dem Punktsysteme $\mathfrak{A}$ einen Punkt in's Auge, welcher möglichst nahe dem Nullpunkte liegt, und benutzen wir die in (6^a.) gegebene Grenze für die kleinste Entfernung zweier Punkte in einem regelmässigen Punktsysteme, so können wir aus dem Orte dieses Punkts n Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ erschliessen, für welche

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n = \mu$$

eine Zahl in $\mathfrak{a}$ ist, und zugleich erweist sich für diese Zahlen der Ausdruck

$$\sum_h \lambda_h (\text{abs.}\, \mu^{(h)})^2 < n \sqrt[n]{\prod_h \lambda_h (\text{Nm}\,\mathfrak{a})^2 \,\text{abs.}\, D} \qquad (h = 1, 2, \dots n).$$

Ein besonderer Nachdruck ist aus einem bald ersichtlichen Grunde darauf zu legen, dass hier das Zeichen $<$ und nicht etwa $\leqq$ sich einfindet. Benutzen wir nun, dass eine Summe von n positiven Grössen niemals kleiner ist als das n-fache der $n$ten Wurzel aus dem Producte der n Grössen, und setzen wir zugleich $(\text{Nm}\,\mu)^2$ für $\prod_h (\text{abs.}\, \mu^{(h)})^2$, so können wir aus der vorstehenden Ungleichung die weitere entnehmen:

$$n \sqrt[n]{\prod_h \lambda_h (\text{Nm}\,\mu)^2} < n \sqrt[n]{\prod_h \lambda_h (\text{Nm}\,\mathfrak{a})^2 \,\text{abs.}\, D} \qquad (h = 1, 2, \dots n).$$

Ist $\mathfrak{m}$ das Ideal, welches die Gleichung $\mathfrak{o}\mu = \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ befriedigt, so haben wir $\text{Nm}(\mathfrak{a})\text{Nm}(\mathfrak{m}) = \pm \text{Nm}(\mu)$, und wir finden demnach:

$$\text{Nm}(\mathfrak{m}) < \sqrt{\text{abs.}\, D}.$$

Zu jedem Ideal giebt es behufs Herstellung eines Hauptideals mindestens einen Multiplicator, bei welchem die Norm weniger beträgt als die Wurzel aus dem absoluten Werthe der Discriminante.

Als eine specielle Folgerung geht daraus der bekannte Satz hervor, dass eine endliche Anzahl von Multiplicatoren ausreichend ist, um alle Ideale in Hauptideale zu verwandeln*). Eine andere, sehr bemerkenswerthe Folgerung ist diese: Da die Norm eines Ideals eine ganze Zahl, mindestens gleich Eins ist, so ergiebt die letzte Ungleichung $1 < \sqrt{\text{abs.}\, D}$, also muss D von ± 1 verschieden sein, d. h.:

Jede Discriminante enthält Primzahlen als Factoren.

Diese das Wesen der algebraischen Zahlen tief berührende Eigenschaft findet sich auf Seite 21 der unten citirten Festschrift von Herrn

*) Dieser Satz ist auf Herrn *Kronecker* zurückzuführen. Vgl. die Bemerkungen auf S. 64 der Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctorjubiläum, dieses Journal Bd. 92.

Kronecker ausgesprochen; doch ist ein Beweis dieser Eigenschaft bisher nicht veröffentlicht worden.

Ueberhaupt kommen die kleinsten positiven wie negativen Zahlen bis zu gewissen von der jedesmaligen Ordnung n abhängigen Grenzen als Werthe von Discriminanten nicht vor.

Denn benutzen wir die zweite in 6. gefundene Grenze für das Minimum einer positiven quadratischen Form, so finden wir im Uebrigen nach genau demselben Verfahren, wie bei der ersten Grenze, eine schärfere Ungleichung, nämlich die folgende:

$$(7^b.)\qquad \mathrm{Nm}(\mathfrak{m}) < \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^n}\,\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\mathrm{abs.}\,D},$$

und diese können wir wieder mit der Ungleichung $1 \leqq \mathrm{Nm}(\mathfrak{m})$ verbinden; so zeigt sich, dass der absolute Werth einer Discriminante $n$ter Ordnung sicherlich immer die Grösse $\dfrac{\left(\frac{\pi e}{2}\right)^n}{n\pi e^{\frac{1}{3n}}}$ übertrifft.

Die zuletzt gefundene Grenze für die Norm eines Multiplicators wollen wir noch in einem Beispiele anwenden. Herr *Wolfskehl* *) hat vor Kurzem den Nachweis geliefert, dass der zweite Factor der Klassenanzahl für die aus den 13ten Wurzeln der Einheit gebildeten Zahlen gleich Eins ist. Dieser Nachweis erforderte ausser einer Benutzung der *Reuschle*schen Tafeln noch recht verwickelte Rechnungen. Wir können hier einfacher zu demselben Satze gelangen und noch hinzufügen, dass die gleiche Erscheinung auch bei den 17ten und 19ten Wurzeln der Einheit eintritt; ja später werden wir sogar durch ähnliche Mittel dieses Resultat noch weiter auszudehnen im Stande sein.

Stellt λ eine ungerade Primzahl vor, so bedeutet der zweite Factor der Klassenanzahl für die aus den λten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen — wir machen augenblicklich von der *Kummer*schen Terminologie Gebrauch — dasselbe wie die Klassenanzahl für die aus den $\frac{\lambda-1}{2}$ zweigliedrigen Perioden dieser Einheitswurzeln gebildeten Zahlen. Die Discriminante des Systems dieser letzteren Zahlen hat den Ausdruck $\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-3)}$; setzen

*) Dieses Journal Bd. 99. S. 173.

wir in die Ungleichung (7^b.) diese Grösse für D und zugleich $\frac{\lambda-1}{2}$ für n, so erlangt die rechte Seite dort folgende Werthe:

für $\lambda = 5$,	7,	11,	13,	17,	19,
1, ...	2, ...	13, ...	34, ...	311, ...	1027, ...

Bis zu diesen Grenzen hätten wir also höchstens die Normen der Multiplicatoren zur Hervorbringung wirklicher Zahlen zu suchen, und wenn alle Zahlen bis zu diesen Grenzen sich in wirkliche Factoren zerlegen lassen sollten, so kommen in den hier betrachteten Fällen ideale Multiplicatoren und demgemäss auch ideale Zahlen überhaupt nicht vor. Nun entnehmen wir aus den *Reuschle*schen Tafeln, dass für die soeben aufgezählten Werthe von λ alle Zahlen unter 1000 sich in wirkliche Factoren zerlegen lassen. Wir haben also nur noch in Bezug auf $\lambda = 19$ festzustellen, dass hier die Primzahlen zwischen 1000 und 1027, das sind 1009, 1013, 1019, 1021, ebenfalls einer solchen Zerlegung innerhalb des durch die entsprechenden zweigliedrigen Perioden bestimmten Gebiets fähig sind. Nun gehören in Bezug auf die Primzahl 19 die Zahlen 1009 und 1021 zum Exponenten 18, die Zahl 1013 zum Exponenten 9; diese Zahlen sind also in dem fraglichen Zahlengebiet der zweigliedrigen Perioden selbst noch Primzahlen. Die Zahl 1019 endlich gehört modulo 19 zum Exponenten 6, ihre Primfactoren werden also von den drei sechsgliedrigen Perioden der 19ten Einheitswurzeln abhängen. Diese sind die Wurzeln der Gleichung $\eta^3+\eta^2-6\eta-7 = 0$, deren Discriminante den Werth $D = 19^2$ hat. Da nun in dem durch diese Wurzeln bestimmten Gebiete nach den *Reuschle*schen Tafeln die Zahlen bis zu $\sqrt{D} = 19$ in wirkliche Factoren zerlegbar sind, so können in diesem Gebiete ideale Theiler nicht existiren, und demnach muss auch 1019 in drei wirkliche Factoren zerlegt werden können.

(Fortsetzung in einem der nächsten Hefte.)