Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Paul Günther.*)

In meiner Notiz „Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkt einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen" (dieses Journal, Bd. 106, S. 330 ff.) habe ich an dem Beispiele der Differentialgleichungen zweiter Ordnung gezeigt, wie man eine nach der Methode von Herrn *Fuchs* (Annali di Matematica, 1870, Bd. IV, S. 36–49) hergestellte Reihenentwickelung der Integrale einer solchen Differentialgleichung dazu benutzen kann, Ausdrücke für die Coefficienten der zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalgleichung zu erlangen. Ich habe a. a. O. bereits bemerkt, dass man dieselbe Reihenentwickelung auch noch in anderer Weise, als dort geschehen, zu demselben Zwecke verwerthen könne, und erlaube mir, dies im Folgenden ebenfalls an dem Beispiele der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auseinanderzusetzen.

I.

Um die zu einem Umlauf der Veränderlichen x gehörige Fundamentalgleichung für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p(x)\cdot y$$

herzustellen, benutzen wir, wie in der angeführten Notiz, folgende Reihenentwickelung eines durch seine Anfangswerthe (für $x = x_0$) bestimmten Integrals der Gleichung (1.):

$$(2.)\qquad y = \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_\varrho(x),$$

wo

$$(3.)\qquad u_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p(x).u_{\varrho-1}(x)dx \qquad (\varrho \geqq 1)$$

ist und $u_0(x)$ dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

bedeutet, welches die für y vorgeschriebenen Anfangswerthe besitzt.

Ist sodann (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) mit folgenden Anfangswerthen

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = x_0,$$

und ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

das System der entsprechenden Werthe für $x = x_0$ nach einem Umlauf der Veränderlichen x, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(4.)\qquad \omega^2-(a_{11}+a_{22})\omega+1 = 0$$

die zu diesem Umlauf gehörige Fundamentalgleichung.

Nach dem Obigen erhalten wir

$$y_1 = \sum_{\varrho=0}^{\infty} U_\varrho,$$

wo $U_0 = 1$ und U_ϱ ($\varrho \geqq 1$) durch das 2ϱ-fach iterirte Integral

$$(5.)\qquad U_\varrho = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p\,dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p\,dx = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p\,.\,U_{\varrho-1}\,dx$$

dargestellt wird; ferner

$$\frac{dy_2}{dx} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} V_\varrho,$$

wo $V_0 = 1$ und für $\varrho \geqq 1$

$$(6.)\qquad \begin{cases} V_\varrho = \int_{x_0}^{x} p\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-x_0)p\,dx \\ \quad = \int_{x_0}^{x} p\,dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x\,.\,p\,dx - x_0 \int_{x_0}^{x} p\,.\,U_{\varrho-1}\,dx \end{cases}$$

($(2\varrho-1)$-fach iterirte Integrale). Da nun die benutzten Reihenentwickelungen nach Herrn *Fuchs* für jeden endlichen nichtsingulären Werth x convergiren — vorausgesetzt nur, dass der Integrationsweg eine endliche Länge hat und durch keinen singulären Punkt geht — so wird man die Grössen, auf die es ankommt, erhalten können, indem man x von x_0 aus den betreffenden Umlauf machen lässt; ist dann $\bar{U}_\varrho$, $\bar{V}_\varrho$ das, was hierbei aus U_ϱ, V_ϱ wird, so ergiebt sich

$$(7.)\qquad a_{11}+a_{22} = \sum_{\varrho=0}^{\infty}(\bar{U}_\varrho+\bar{V}_\varrho) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} C_\varrho.$$

Mit Hülfe der Identität

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p.U_{\varrho-1}dx = x\int_{x_0}^{x} p.U_{\varrho-1}dx - \int_{x_0}^{x} x.p.U_{\varrho-1}dx$$

folgt, wenn wir x den obigen Umlauf machen lassen

$$(8.)\qquad \begin{cases} C_\varrho = \int_{x_0}^{x_0} p\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} x.p\,dx \\ \qquad -\int_{x_0}^{x_0} x.p\,dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p\,dx, \end{cases}$$

wo nur noch $(2\varrho-1)$-fach iterirte Integrale auftreten *).

II.

Wenn der in Rede stehende Umlauf nur *einen* singulären Punkt umschliesst, so denken wir uns den letzteren nach $x=0$ verlegt und entwickeln $p(x)$ in der Umgebung dieses Punktes:

$$(1.)\qquad p(x) = \sum_k c_k x^k,$$

wobei wir über die Werthe, welche der Index k durchläuft, zunächst gar keine Voraussetzung machen.

Von den Umläufen um *mehrere* singuläre Punkte betrachten wir nur solche innerhalb von Kreisringen mit dem Mittelpunkt $x=0$, welche eine Anzahl singulärer Punkte ein-, die andern ausschliessen; man sieht leicht, dass man auf diese Weise die zur Bestimmung der *Gruppe* nöthige Anzahl

---

*) Die Reihenentwickelung (7.) ist, allerdings aus anderen Principien hergeleitet, auch in einer Abhandlung von Herrn *H. Vogt* „Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre“, Thèse, Paris 1889, und Annales de l'Éc. Norm. Sup. 1889, Supplément, benutzt, von welcher ich inzwischen Kenntniss erhalten habe, nachdem diese Untersuchungen grösstentheils schon vollendet waren. Dort wird nur der Fall in Betracht gezogen, wo die Differentialgleichung (1.) zur *Fuchs*schen Klasse gehört, d. h. ihre Integrale überall bestimmt sind (vgl. *Fuchs*, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen; Sitzungsber. der Berliner Akademie, 1888, S. 1279); auch ist die Behandlung der Frage eine andere.

von Umläufen erhalten kann (unter Zuhülfenahme von Transformationen $x = z + \alpha$). Für jeden solchen Ring gilt dann wieder eine Entwickelung der Form (1.), worin k aber jedenfalls unendlich viele positive und negative Werthe annimmt.

Es ergiebt sich nun aus (8.), No. I

$$(2.)\qquad C_\varrho = \sum_{(k_1, \dots k_\varrho)} c_{k_1} \dots c_{k_\varrho} . [J(k_1+1, 0, k_2, 0, \dots k_\varrho) - J(k_1, 0, k_2, 0, \dots k_\varrho+1)],$$

wenn wir allgemein mit $J(\mu_1, \dots \mu_m)$ das bezeichnen, was aus der Function

$$J(x, x_0; \mu_1, \dots \mu_m) = \int_{x_0}^{x} x^{\mu_m} dx \int_{x_0}^{x} x^{\mu_{m-1}} dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x^{\mu_1} dx$$

wird, wenn x einen Umlauf, wie der obige ist, beschreibt. In der Summe (2.) sind jedem Index k_h alle Werthe beizulegen, welche k in (1.) annimmt.

Die Function $J(x, x_0; \mu_1, \dots \mu_m)$ geht durch die Substitution

$$x = x_0 . t$$

über in

$$(3.)\qquad J(x, x_0; \mu_1, \dots \mu_m) = x_0^{r_1} . J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m),$$

wo

$$r_1 = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m + m$$

ist. Um $J(\mu_1, \dots \mu_m)$ mit Hülfe von (3.) bestimmen zu können, hat man, nachdem $J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m)$ berechnet ist, t einen Umlauf von $t = 1$ um $t = 0$ beschreiben zu lassen.

Der Gleichung (3.) zufolge wird C_ϱ ein Aggregat von Potenzen der Grösse x_0; man sieht leicht, dass $\sum_{\varrho=0}^{\infty} C_\varrho$ sich in eine Potenzreihe von x_0 umformen lässt (im Allgemeinen mit unendlich vielen positiven und negativen Potenzen); da aber die Coefficienten der Fundamentalgleichung von x_0 unabhängig sind, so brauchen wir in (2.) nur die von x_0 freien Glieder beizubehalten. Die Bedingung $r_1 = 0$ lautet aber für die beiden in (2.) auftretenden typischen Glieder

$$(4.)\qquad \sum_{h=1}^{\varrho} k_h = -2\varrho;$$

die Summe (2.) ist also nur über die Werthsysteme $(k_1, \dots k_\varrho)$ zu erstrecken, die dieser Bedingung genügen. Wenn also $p(x)$, wie wir im Folgenden annehmen wollen, eine rationale Function ist (und ebenso in andern leicht zu übersehenden Fällen), so wird bei einem Umlauf um $x = 0$ allein sich C_ϱ nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern zusammensetzen, während bei einem Umlauf um mehrere singuläre Punkte C_ϱ durch eine unendliche Reihe gegeben wird.

Um die Function $J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m)$, auf welche nunmehr alles ankommt, zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen. Diese Function genügt offenbar der linearen Differentialgleichung $(m+1)$ter Ordnung

$$(5.)\qquad t^{\mu_1+\dots+\mu_m}.\frac{d}{dt}t^{-\mu_1}\frac{d}{dt}t^{-\mu_2}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}t^{-\mu_m}\frac{dy}{dt} = 0$$

oder

$$y^{(m+1)}+\frac{A_1}{t}y^{(m)}+\frac{A_2}{t^2}y^{(m-1)}+\dots+\frac{A_m}{t^m}.y' = 0,$$

deren Coefficienten $A_1, \dots A_m$, auf die es uns übrigens nicht ankommt, leicht daraus erhalten werden können, dass die Wurzeln $r_1, \dots r_{m+1}$ der determinirenden Fundamentalgleichung

$$F(r) = r(r-1)\dots(r-m)+A_1 r(r-1)\dots(r-m+1)+\dots+A_m.r = 0$$

die Werthe

$$r_\alpha = \mu_m+\mu_{m-1}+\dots+\mu_\alpha+m-\alpha+1, \quad r_{m+1} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$

haben, wie aus dem Umstande hervorgeht, dass der obigen Differentialgleichung (5.) ausser $J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m)$ auch noch die Integrale

$$\int_1^t t^{\mu_m}dt\int_1^t\dots\int_1^t t^{\mu_\alpha}dt \qquad (\alpha = 2, \dots m)$$

genügen. Die Function $J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m)$ ist vollkommen bestimmt durch die Differentialgleichung (5.) und die Anfangsbedingungen

$$(6.)\qquad J = 0, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \quad \dots \quad \frac{d^{m-1}J}{dt^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m J}{dt^m} = 1,$$
$$(\text{für } t = 1),$$

welche offenbar auch durch die folgenden ersetzt werden können:

$$(6^a.)\quad J = 0, \quad \frac{dJ}{d\log t} = 0, \quad \dots \quad \frac{d^{m-1}J}{(d\log t)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m J}{(d\log t)^m} = 1$$
$$(\text{für } t = 1).$$

Führt man die Differentialgleichung (5.) vermittelst der Substitution

$$t = e^z$$

auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurück und wendet auf letztere Gleichung die bekannte *Cauchy*sche Integrationsmethode an, so erhält man unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $(6^a.)$ unmittelbar den Ausdruck

$$(7.)\qquad J(t,1;\mu_1,\dots\mu_m) = \int \frac{t^r}{F(r)}\,dr,$$

das Integral erstreckt über eine Curve, welche die sämmtlichen Nullstellen $r_1,\dots r_{m+1}$ von $F(r)$ einschliesst. Wenn nun der von $t=1$ um $t=0$ herum auszuführende Umlauf letzteren Punkt nur einmal umwindet (was wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, immer voraussetzen wollen), so ist

$$(7^a.)\qquad J(\mu_1,\dots\mu_m) = x_0^{r_1}.\int \frac{e^{2\pi i r}}{F(r)}\,dr.$$

Nimmt man hier den Integrationsweg als einen hinlänglich grossen Kreis um den Nullpunkt an und entwickelt $e^{2\pi i r}$ nach steigenden, $\frac{1}{F(r)}$ nach fallenden Potenzen von r, so erhält man $J(\mu_1,\dots\mu_m)$ als eine Potenzreihe von $2\pi i$ mit unendlich vielen positiven Potenzen, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $\mu_1,\dots\mu_m$ sind; mit Hülfe dieses Ausdrucks erhält man, wenn nach Potenzen von $2\pi i$ geordnet wird, die Fundamentalgleichung in derselben Gestalt, wie sie sich nach der Methode von Herrn *Hamburger* (dieses Journal Bd. 83, S. 193 ff.) ergiebt (vergl. meine oben angeführte Notiz).

Integrirt man dagegen über Kreise, welche die Punkte

$$r_\alpha \qquad\qquad (\alpha=1,\dots m+1)$$

einzeln umschliessen, so wird man Zähler und Nenner des Integranden in (7^a.) nach steigenden Potenzen von $r-r_\alpha$ entwickeln; hier enthält $J(\mu_1,\dots\mu_m)$ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $2\pi i$, deren Coefficienten rationale gebrochene Functionen von $\mu_1,\dots\mu_m$ sind. Sind λ_1 von den Grössen $r_1,\dots r_{m+1}$ etwa $=n_1$, ferner λ_2 derselben $=n_2$, u. s. f., λ_s etwa $=n_s$, wo

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha = m+1$$

ist, so wird in (7^a.)

$$\frac{1}{F(r)} = \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{s}(r-n_\alpha)^{\lambda_\alpha}} = \frac{1}{(r-n_h)^{\lambda_h}}\cdot\Phi_h(r)$$

und daher

$$(8.)\qquad J(\mu_1,\dots\mu_m) = x_0^{r_1}.\sum_{h=1}^{s}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda_h-1}\frac{a_{h\varkappa}(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!},$$

wo

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} a_{h,\lambda_h-1} &= \Phi_h(n_h) = \frac{1}{\prod\limits_{a \neq h} (n_h - n_a)^{\lambda_a}}, \\ a_{h\varkappa} &= \frac{1}{(\lambda_h-\varkappa-1)!}\cdot\frac{\partial^{\lambda_h-\varkappa-1}\Phi_h(n_h)}{\partial n_h^{\lambda_h-\varkappa-1}} \\ &= \frac{1}{(\lambda_h-\varkappa-1)!}\,\frac{\partial^{\lambda_h-\varkappa-1}a_{h,\lambda_h-1}}{\partial n_h^{\lambda_h-\varkappa-1}} \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{smallmatrix}\varkappa = 0,\, \dots\, \lambda_h - 2 \\ h = 1,\, \dots\, s\end{smallmatrix}\right)$$

ist.

Mit Hülfe der allgemeinen Formel

$$\frac{1}{i!}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\frac{d^i\varphi(x)}{dx^i} = \sum_{(\varkappa,\mu_a,\nu_a)} \frac{1}{\mu_1!\mu_2!\dots(\nu_1+1)^{\mu_1}(\nu_2+1)^{\mu_2}\dots}\,\psi_{\nu_1}^{\mu_1}\psi_{\nu_2}^{\mu_2}\dots$$

$$(\varkappa = 1,\, 2,\, \dots\, i;\; \Sigma\mu_a = \varkappa,\; \Sigma\mu_a\nu_a = i - \varkappa;\; \nu_a \geqq 0),$$

wo

$$\psi_\nu = \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{d^{\nu+1}\log\varphi(x)}{dx^{\nu+1}}$$

ist, erhält man aus (9.) folgenden independenten Ausdruck:

$$(10.)\quad a_{h\varkappa} = \frac{1}{\prod\limits_{a \neq h}(n_h - n_a)^{\lambda_a}}\cdot\sum_{(l,\mu_a,\nu_a)} \frac{(-1)^l}{\mu_1!\mu_2!\dots(\nu_1+1)^{\mu_1}(\nu_2+1)^{\mu_2}\dots}\,P_{h\nu_1}^{\mu_1}P_{h\nu_2}^{\mu_2}\dots$$

$$(l = 1,\, \dots\, \lambda_h - \varkappa - 1;\; \Sigma\mu_a = l,\; \Sigma\mu_a\nu_a = \lambda_h - l - \varkappa - 1;\; \nu_a \geqq 0),$$

wenn nämlich

$$P_{h\nu} = \sum_{a \neq h} \frac{\lambda_a}{(n_a - n_h)^{\nu+1}} \qquad (\nu = 0,\, 1,\, 2,\, \dots)$$

gesetzt wird. Damit ist die explicite Bestimmung von $J(\mu_1, \dots \mu_m)$ beendet.

Die Gleichungen (8.), (9.) können auch ohne Benutzung der *Cauchy*-schen Integrationsmethode abgeleitet werden. Nach bekannten Principien muss nämlich

$$J(t, 1; \mu_1, \dots \mu_m) = \sum_{h=1}^{s}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda_h-1} \frac{a_{h\varkappa}}{\varkappa!}\cdot t^{n_h}.\log^\varkappa t$$

sein, wo die Coefficienten $a_{h\varkappa}$ vermittelst der Anfangsbedingungen (6^a.) zu bestimmen sind, d. h. also aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{h=1}^{s}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda_h-1} l_\varkappa.n_h^{l-\varkappa}.a_{h\varkappa} = \delta_{lm}$$

$$(l = 0,\, \dots\, m;\; a_{h\varkappa} = 0 \text{ für } \varkappa > \lambda_h - 1);$$

hierbei bedeuten die $l_\varkappa$ Binomialcoefficienten, und δ_{lm} ist $= 0$ für $l < m$, aber $= 1$ für $l = m$.

Die Determinante D dieses Gleichungssystems wird erhalten, wenn man, von der Determinante

$$\Delta(u_1, \dots u_{m+1}) = |u_\alpha^{\beta-1}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots m+1)$$

ausgehend (wo die u_α Unbestimmte bedeuten), den Ausdruck

$$\lim \frac{\Delta(n_1, u_2, u_3, \dots u_{\lambda_1}, n_2, u_{\lambda_1+2}, u_{\lambda_1+3}, \dots u_{m+1})}{(u_2-n_1)(u_3-n_1)^2 \dots (u_{\lambda_1}-n_1)^{\lambda_1-1}(u_{\lambda_1+2}-n_2)(u_{\lambda_1+3}-n_2)^2 \dots (u_{m+1}-n_s)^{\lambda_s-1}}$$

$$(\text{für } u_2 = n_1,\ u_3 = n_1,\ \dots\ u_{\lambda_1} = n_1,\ u_{\lambda_1+2} = n_2,\ u_{\lambda_1+3} = n_2,\ \dots\ u_{m+1} = n_s)$$

bildet*). Aus

$$\Delta(u_1, \dots u_{m+1}) = \Pi(u_\alpha - u_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots m+1;\ \alpha > \beta)$$

erhält man auf diese Weise sofort

$$D = \Pi(n_\alpha - n_\beta)^{\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots s;\ \alpha > \beta).$$

(Man vergleiche hierzu: ***Franke***, „Ueber den Ausdruck, welcher im Falle gleicher Wurzeln an die Stelle der *Vandermonde*schen alternirenden Function tritt“, dieses Journal Bd. 83, S. 65 ff., in welcher Abhandlung der Ausdruck für D in weniger einfacher Weise hergeleitet ist.)

Bei Auflösung des obigen Gleichungssystems ergiebt sich nun offenbar zuvörderst

$$a_{h,\lambda_h-1} = \frac{D_h}{D} \cdot (-1)^{m+1+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_h} \qquad (h = 1, 2, \dots s),$$

wo D_h aus D hervorgeht, wenn man $m+1$ durch m, und λ_h durch λ_h-1 ersetzt; also

$$a_{h,\lambda_h-1} = \frac{1}{\prod\limits_{\alpha \neq h} (n_h - n_\alpha)^{\lambda_\alpha}} \qquad (h = 1, 2, \dots s).$$

Aus diesem Coefficienten leitet man die übrigen ab vermittelst der Formel

$$(\lambda_h - \varkappa) a_{h,\varkappa-1} = \frac{\partial a_{h,\varkappa}}{\partial n_h} \qquad \left(\begin{matrix}\varkappa = 1, 2, \dots \lambda_h - 1 \\ h = 1, 2, \dots s\end{matrix}\right),$$

welche direct aus dem obigen Gleichungssystem abgeleitet werden kann, worauf wir aber hier nicht eingehen wollen. Durch ähnliche Betrachtungen, wie sie dabei anzustellen sind, können auch die in der angeführten ***Franke***schen Arbeit unausgeführt gebliebenen Bestimmungen erledigt werden.

---

*) Um diesen Grenzübergang auszuführen, entwickele man $u_h^{\beta-1} (h = 2, \dots \lambda_1)$ nach Potenzen von $u_h - n_1$, ferner $u_{\lambda_1+h}^{\beta-1} (h = 2, \dots \lambda_2 - \lambda_1)$ nach Potenzen von $u_{\lambda_1+h} - n_2$, u. s. f.

III.

Durch die Ergebnisse der vorigen Nummer ist nun der Ausdruck der Fundamentalgleichung

$$\omega^2 - \omega . \sum_{\varrho=0}^{\infty} C_\varrho + 1 = 0$$

ein ganz bestimmter. Der Coefficient eines Gliedes $c_{\varkappa_1} c_{\varkappa_2} \dots c_{\varkappa_\varrho}$ in $C_\varrho (\varrho \geqq 1;$ $C_0 = 2)$ ist

$$\sum_{(\varkappa_{h_1}, \dots \varkappa_{h_\varrho})} [J(\varkappa_{h_1}+1, 0, \varkappa_{h_2}, 0, \dots \varkappa_{h_\varrho}) - J(\varkappa_{h_1}, 0, \varkappa_{h_2}, 0, \dots \varkappa_{h_\varrho}+1)],$$

die Summe erstreckt über alle Permutationen $(\varkappa_{h_1} \dots \varkappa_{h_\varrho})$ des Systems $(\varkappa_1 \dots \varkappa_\varrho)$. Dabei ist ((4.) No. II.) immer

$$\sum_1^\varrho \varkappa_h = -2\varrho.$$

Man hat nun für die beiden oben auftretenden Ausdrücke J die Grössen $r_1, \dots r_{2\varrho}$ (No. II.) aufzustellen; setzt man

$$\mathfrak{r}_\alpha = \sum_{h=\alpha}^{\varrho} \varkappa_h + 2(\varrho - \alpha + 1) \qquad \left(\begin{smallmatrix} \alpha = 1, \dots s \\ \mathfrak{r}_1 = 0 \end{smallmatrix}\right),$$

so wird

für $J(\varkappa_1+1, 0, \dots \varkappa_\varrho)$:

$a)$ $r_1 = 0;$ $r_2 = \mathfrak{r}_2,$ $r_3 = \mathfrak{r}_2 - 1;$ $\dots$ $r_{2\varrho-2} = \mathfrak{r}_\varrho,$ $r_{2\varrho-1} = \mathfrak{r}_\varrho - 1,$ $r_{2\varrho} = 0;$

für $J(\varkappa_1, 0, \dots \varkappa_\varrho+1)$:

$b)$ $r_1 = 0;$ $r_2 = \mathfrak{r}_2 + 1,$ $r_3 = \mathfrak{r}_2;$ $\dots$ $r_{2\varrho-2} = \mathfrak{r}_\varrho + 1,$ $r_{2\varrho-1} = \mathfrak{r}_\varrho;$ $r_{2\varrho} = 0.$

Durch die r_h sind die n_h und λ_h(No. II.) und damit die $a_{\alpha\beta}$ unmittelbar gegeben. Man zeigt leicht, dass sich die beiden obigen Ausdrücke J für die verschiedenen Permutationen so combiniren lassen, dass man für

$$J(\varkappa_{h_1}+1, 0, \dots \varkappa_{h_\varrho}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\varkappa_{h_1} \dots \varkappa_{h_\varrho})}}{\beta!} \cdot (2\pi i)^\beta$$

den Ausdruck C_ϱ in der Form

$$C_\varrho = \Sigma c_{\varkappa_1} \dots c_{\varkappa_\varrho} . \sum_{(\varkappa_{h_1}, \dots \varkappa_{h_\varrho})} \sum_{\alpha, \beta} \frac{2 . a_{\alpha\beta}^{(\varkappa_{h_1} \dots \varkappa_{h_\varrho})}}{\beta!} \cdot (2\pi i)^\beta,$$

wo nur über die *geraden* Werthe von β summirt wird. Dass in der Fundamentalgleichung nur gerade Potenzen von $2\pi i$ vorkommen, ist ja von vornherein einleuchtend, da diese Gleichung dieselbe sein muss wie diejenige für den entgegengesetzten Umlauf (denn ihre Wurzeln sind zu einander reciprok). —

Man kann von dem Vorhergehenden eine einfache Anwendung machen, indem man zeigt, wie in dem Falle, dass für die Integrale der gegebenen Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = p(x).y$ der Punkt $x = 0$ kein Punkt der Unbestimmtheit ist und der Umlauf nur diesen Punkt umschliesst, die bekannten Ergebnisse durch das oben dargelegte Verfahren erhalten werden können.

Wenn $p(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ die Entwickelung

$$p(x) = \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa x^\varkappa$$

hat, also die Indices $\varkappa_h \geqq -2$ sind, so kann der Bedingung $\sum_{h=1}^{\varrho} \varkappa_h = -2\varrho$ nur durch $\varkappa_1 = \cdots = \varkappa_\varrho = -2$ genügt werden. Eine leichte Rechnung giebt dann für die Grösse C_ϱ den Ausdruck

$$C_\varrho = 2.c_{-2}^\varrho.(-1)^\varrho \left\{ \sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]} (2\varrho-2h-2)_{\varrho-2} \cdot \frac{(2\pi i)^{2h}}{(2h)!} - \sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]-1} (2\varrho-2h-2)_\varrho \cdot \frac{(2\pi i)^{2h}}{(2h)!} \right\}$$

$$= \frac{2.c_{-2}^\varrho}{\varrho!} (-1)^\varrho. \sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]} \frac{(2\varrho-2h-1)!}{(\varrho-2h)!(2h-1)!} (2\pi i)^{2h} \qquad (\varrho \geqq 2;\ C_1 = 0).$$

Für

$$C = 2 + \sum_{\varrho=2}^{\infty} C_\varrho$$

hat die Fundamentalgleichung die Form

$$\omega^2 - C\omega + 1 = 0;$$

daher muss C, wenn wir mit r_1, r_2 die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1) - c_{-2} = 0$$

bezeichnen, übereinstimmen mit

$$S = e^{2\pi i r_1} + e^{2\pi i r_2}.$$

Man kann dies entweder ganz direct nachweisen oder auch folgendermassen. Man erkennt leicht, dass S, als Function der Veränderlichen c_{-2} betrachtet, der linearen Differentialgleichung

$$(4c_{-2}+1) \cdot \frac{d^2S}{dc_{-2}^2} + 2 \cdot \frac{dS}{dc_{-2}} - (2\pi i)^2.S = 0$$

genügt und durch diese nebst den Anfangsbedingungen

$$S = 2, \quad \frac{dS}{dc_{-2}} = 0 \quad \text{für} \quad c_{-2} = 0$$

vollkommen bestimmt ist.

Dieselben Eigenschaften kommen aber auch der Function C von c_{-2} zu. Für die Anfangsbedingungen erhellt dies unmittelbar; um zu zeigen, dass auch der Differentialgleichung genügt wird, hat man nur die Gleichung

$$\left[\frac{d^{\varrho+2}C}{dc_{-2}^{\varrho+2}}\right]_{c_{-2}=0}+(4\varrho+2)\left[\frac{d^{\varrho+1}C}{dc_{-2}^{\varrho+1}}\right]_{c_{-2}=0}-(2\pi i)^2\left[\frac{d^{\varrho}C}{dc_{-2}^{\varrho}}\right] = 0$$

oder

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]+1}\frac{(2\varrho-2h+3)!(2\pi i)^{2h}}{(\varrho-2h+2)!(2h-1)!}-(4\varrho+2)\sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho+1}{2}\right]}\frac{(2\varrho-2h+1)!(2\pi i)^{2h}}{(\varrho-2h+1)!(2h-1)!}$$
$$-(2\pi i)^2.\sum_{h=1}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]}\frac{(2\varrho-2h-1)!(2\pi i)^{2h}}{(\varrho-2h)!(2h-1)!} = 0$$

als erfüllt nachzuweisen; man erkennt sofort, dass in letzterer der Coefficient jeder Potenz von $2\pi i$ verschwindet. Daher sind die Ausdrücke C und S identisch, was zu beweisen war.

III.

Der ursprüngliche Ausdruck der Fundamentalgleichung war

$$(1.)\qquad \omega^2-\omega.\sum_{\varrho=1}^{\infty}C_\varrho+1 = 0,$$

wo

$$(2.)\quad \begin{cases} C_0 = 2,\ C_\varrho = \int_{x_0}^{x_0}pdx\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}x.pdx \\ -\int_{x_0}^{x_0}x.pdx\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}pdx. \end{cases}$$

Man kann die hier durch $(2\varrho-1)$-fach iterirte Integrale dargestellte Grösse C_ϱ auch durch ein Aggregat von nur ϱ-fach iterirten Integralen ausdrücken, und zwar in folgender Weise.

Es gilt die Identität

$$(3.)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}q_m(x)dx\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}q_{m-1}(x)dx\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}q_1(x)dx \\ = \sum_{(i_1,\dots i_m)}(-1)^{\varepsilon_{i_1\dots i_m}}x^{m-\sum_{h=1}^{m}i_h}\int_{x_0}^{x}x^{i_m}q_m(x)dx\int_{x_0}^{x}x^{i_{m-1}}q_{m-1}(x)dx\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}x^{i_1}q_1(x)dx, \end{cases}$$

wo die Summe zu erstrecken ist über alle 2^m Systeme ganzer nicht negativer Zahlen $i_1,\dots i_m$, welche den m Bedingungen

$$\sum_{h=1}^{r}i_h = r-1 \quad\text{oder}\quad = r \qquad (r = 1, 2, \dots m)$$

genügen, und wo

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_m} \equiv \sum_{h=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} i_{2h+1} + \tfrac{1}{2}m(m-1) + (m-1)\sum_{h=1}^{m} i_h \quad (\text{mod. } 2)$$

ist.

Die Richtigkeit der obigen Formel ergiebt sich für die ersten Werthe von m unmittelbar; gesetzt nun, sie sei bis zu einem bestimmten m als gültig erwiesen, so folgt, wenn wir den Ausdruck auf der linken Seite von (3.) mit $\Phi_m(q_1, \dots q_m)$ bezeichnen,

$$\Phi_{m+1}(q_1, \dots q_m, q_{m+1}) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \Phi_m(q_1, \dots q_m) . q_{m+1} . dx$$

$$= x . \int_{x_0}^{x} q_{m+1} \Phi_m dx - \int_{x_0}^{x} x . q_{m+1} \Phi_m dx$$

$$= \sum_{i_1, \dots i_m} (-1)^{\varepsilon_{i_1 \dots i_m}} \Big\{ x \int_{x_0}^{x} x^{m - \sum_1^m i_h} q_{m+1} dx \int_{x_0}^{x} x^{i_m} q_m dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x^{i_1} q_1 dx$$

$$- \int_{x_0}^{x} x^{m+1-\sum_1^m i_h} . q_{m+1} dx \int_{x_0}^{x} x^{i_m} q_m dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x^{i_1} q_1 dx \Big\}$$

$$= \sum_{i_1, \dots i_{m+1}} (-1)^{\varepsilon'_{i_1 \dots i_{m+1}}} . x^{m+1-\sum_1^{m+1} i_h} \int_{x_0}^{x} x^{i_{m+1}} q_{m+1} dx \int_{x_0}^{x} x^{i_m} q_m dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x^{i_1} q_1 dx,$$

wo die Summe erstreckt ist über alle 2^{m+1} Systeme ganzer nicht negativer Zahlen $i_1, \dots i_{m+1}$, die den $m+1$ Bedingungen

$$\sum_{h=1}^{r} i_h = r-1 \quad \text{oder} \quad = r \qquad (r = 1, 2, \dots m+1)$$

genügen, und wo

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_{m+1}} \equiv \varepsilon_{i_1 \dots i_m} + \sum_{h=1}^{m+1} i_h - m \equiv \sum_{1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} i_{2h+1} + \tfrac{1}{2}m(m+1) + m\sum_{1}^{m} i_h + i_{m+1} \quad (\text{mod. } 2)$$

ist. Wenn nun m gerade ist, so wird

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_{m+1}} \equiv \sum_{h=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} i_{2h+1} + \tfrac{1}{2}m(m+1) + m\sum_{h=1}^{m+1} i_h$$

$$\equiv \varepsilon_{i_1 \dots i_{m+1}} \quad (\text{mod. } 2),$$

und wenn m ungerade ist,

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{i_1\ldots i_{m+1}} &\equiv \sum_{h=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} i_{2h+1}+\tfrac{1}{2}m(m+1)+m\sum_{h=1}^{m+1} i_h \\ &\equiv \varepsilon_{i_1\ldots i_{m+1}} \quad (\text{mod. } 2).\end{aligned}$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Formel (3.) dargethan.

Die Zahlensysteme $i_1, \ldots i_m$, deren einzelne Elemente übrigens nur die Werthe 0, 1, 2 annehmen, können für jedes m leicht direct aufgestellt werden.

Hiernach wird

$$C_\varrho = \Sigma(-1)^{\varepsilon_{i_1\ldots i_{\varrho-1}}}\int_{x_0}^{x_0} x^{\varrho-1-\sum_1^{\varrho-1} i_h}.p.dx\int_{x_0}^{x} x^{i_{\varrho-1}}.p.dx\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} x^{i_1+1}p\,dx,$$

$$-\Sigma(-1)^{\varepsilon_{i_1\ldots i_{\varrho-1}}}\int_{x_0}^{x_0} x^{\varrho-\sum_1^{\varrho-1} i_h}.p.dx\int_{x_0}^{x} x^{i_{\varrho-1}}.p.dx\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} x^{i_1}.p\,dx,$$

die Summen erstreckt über alle $2^{\varrho-1}$ Werthsysteme $(i_1, \ldots i_{\varrho-1})$. Mit Hülfe der Eigenschaften der Zahlen i und des Zeichens ε erkennt man leicht, dass man dieser Gleichung folgende Form geben kann:

$$(4.)\left\{\begin{aligned}C_\varrho &= \Sigma(-1)^{\varepsilon_{i_1\ldots i_\varrho}}.\int_{x_0}^{x_0} x^{i_\varrho}.p.dx\int_{x_0}^{x} x^{i_{\varrho-1}}.p.dx\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} x^{i_1+1}.p.dx \\ &\quad+\Sigma(-1)^{\varepsilon_{i_1\ldots i_\varrho}}.\int_{x_0}^{x_0} x^{i_\varrho}.p.dx\int_{x_0}^{x} x^{i_{\varrho-1}}.p.dx\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} x^{i_1}.p.dx,\end{aligned}\right.$$

wo die erste Summe erstreckt ist über alle diejenigen $2^{\varrho-1}$ Werthsysteme $i_1, \ldots i_\varrho$, für welche

$$\sum_1^r i_h = r-1 \quad \text{oder} \quad = r \quad (r = 1, \ldots \varrho-1), \quad \sum_1^\varrho i_h = \varrho-1$$

ist (wir wollen ein solches System für einen Augenblick ein i-System der ersten Klasse nennen), die zweite über alle diejenigen, für welche

$$\sum_1^r i_h = r-1 \quad \text{oder} \quad = r \quad (r = 1, \ldots \varrho-1), \quad \sum_1^\varrho i_h = \varrho$$

ist (i-System der zweiten Klasse).

Man beweist ferner ohne Mühe: Für ein i-System $(i_1, \ldots i_\varrho)$ der ersten Klasse ist entweder $(i'_1, \ldots i'_\varrho) = (i_2, i_3, \ldots i_\varrho, i_1+1)$ ein i-System der zweiten, oder $(i_2-1, i_3, \ldots i_\varrho, i_1+1)$ ein i-System der ersten Klasse, beide Male mit demselben ε wie das ursprüngliche System; für ein System $(i_1, \ldots i_\varrho)$ der zweiten Klasse ist entweder $(i_2, i_3, \ldots i_\varrho, i_1)$ ein i-System der zweiten, oder

$(i_2-1, i_3, \dots, i_\varrho, i_1)$ ein solches der ersten Klasse, und wieder ist beide Male der Werth von ε derselbe wie beim ursprünglichen System.

Definirt man daher 2^ϱ Systeme ganzer nicht negativer Zahlen $h_1, \dots h_\varrho$ und das Zeichen $\eta_{h_1 \dots h_\varrho} = \pm 1$, indem man (4.) in der Form

$$(4^a.) \qquad C_\varrho = \sum_{h_1,\dots h_\varrho} (-1)^{\eta_{h_1\dots h_\varrho}} . \int_{x_0}^{x_0} x^{h_\varrho}.p.dx \int_{x_0}^{x} x^{h_{\varrho-1}}.p.dx \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} x^{h_1}.p.dx$$

schreibt, und betrachtet den Ausdruck

$$P(x_1, x_2, \dots, x_\varrho) = \sum_{h_1,\dots h_\varrho} (-1)^{\eta_{h_1\dots h_\varrho}} . x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_\varrho^{h_\varrho},$$

so ergiebt sich: Die ganze rationale Function P der Unbestimmten $x_1, \dots x_\varrho$ (welche in diesen letzteren homogen von der Dimension ϱ ist) bleibt bei den cyklischen Vertauschungen ihrer Argumente ungeändert.

Die Eigenschaften der $i_1, \dots i_\varrho$ lehren ferner, dass P verschwindet für $x_1 = x_2$, also auch für $x_2 = x_3, \dots x_\varrho = x_1$. Daher ist P durch

$$(x_1 - x_\varrho)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_\varrho - x_{\varrho-1})$$

theilbar; der Quotient muss eine Constante sein, man findet ihn $=1$ durch Betrachtung zweier entsprechenden Coefficienten, z. B. des Gliedes $-x_1^2 x_3 \dots x_\varrho$. Die Zahlensysteme $h_1, \dots h_\varrho$ und das Zeichen η können daher am einfachsten definirt werden durch die Identität

$$(5.) \quad P(x_1, \dots x_\varrho) = \sum_{h_1,\dots h_\varrho} (-1)^{\eta_{h_1\dots h_\varrho}} . x_1^{h_1} \dots x_\varrho^{h_\varrho} = (x_1 - x_\varrho)(x_2 - x_1) \dots (x_\varrho - x_{\varrho-1}).$$

Damit ist der Ausdruck (4^a.) in einfacher Weise bestimmt, und es ist klar, dass derselbe nun in ähnlicher Weise weiter behandelt werden kann, wie dies oben mit dem Ausdruck (8.) No. I geschehen ist.

V.

Die in den vorhergehenden Nummern für Differentialgleichungen zweiter Ordnung näher ausgeführte Methode, die Fundamentalgleichungen mit Hülfe der von Herrn *Fuchs* (Annali di Mat. 1870, Bd. IV, S. 36—49) gegebenen Reihenentwicklungen zu bestimmen, kann, wie schon bemerkt ist, auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt werden. Bei dieser Ausdehnung der hier gegebenen Theorie muss man, um möglichst übersichtliche Resultate zu erhalten, die von Herrn *Hamburger* (dieses Journal, Bd. 84, S. 264 ff.) gemachten Bemerkungen anwenden, also nicht direct die Coefficienten der Fundamentalgleichung, sondern zunächst die

Potenzsummen ihrer Wurzeln bestimmen (was mit den hier gegebenen Hülfsmitteln geschehen kann). Es enthalten nämlich die a. a. O. mit a_{ik} bezeichneten Grössen (die Substitutionscoefficienten für den betreffenden Umlauf) im Allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen der Grösse x_0, und es würden daher, da die Coefficienten der Fundamentalgleichung durch Multiplication aus den a_{ik} zusammengesetzt sind, die von x_0 freien Glieder sich in gänzlich unbrauchbarer Form ergeben, ein Uebelstand, der bei Benutzung der erwähnten Bemerkungen vermieden wird. —

Aus der Möglichkeit, die Reihenentwickelungen des Herrn *Fuchs* in der hier dargelegten Weise zur Bestimmung der Fundamentalgleichungen verwenden zu können, ergiebt sich mit unmittelbarer Evidenz folgender von Herrn *Poincaré* (Acta math. IV, S. 212 ff.) auf anderem Wege bewiesener Satz:

„Wird eine gegebene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung in der Form

$$(1.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\varkappa=0}^{n} p_\varkappa(x)\cdot\dfrac{d^{n-\varkappa}J}{dx^{n-\varkappa}} = 0, \\ p_0(x) = 1, \quad p_\varkappa(x) = \sum\limits_{h,i}\dfrac{A_{h\varkappa i}}{(x-a_i)^h} \end{cases}$$

vorausgesetzt, so sind die Coefficienten der Fundamentalgleichungen ganze transcendente Functionen der Grössen $A_{h\varkappa i}$. Denkt man sie sich nach Potenzen dieser letzteren Grössen entwickelt, so kann der Coefficient jedes einzelnen Gliedes durch iterirte Integrale ausgedrückt werden.“

Herr *Poincaré* hat a. a. O. darauf hingewiesen, diese iterirten Integrale darzustellen mit Hülfe der Transcendenten

$$\varLambda(x;\,\alpha_1,\dots\alpha_m) = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x-\alpha_m}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x-\alpha_{m-1}}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x-\alpha_1};$$

durch Grössen dieser Art lässt sich nämlich offenbar jede Function, die durch iterirte Integration rationaler Functionen von x entsteht, linear ausdrücken mit Coefficienten, welche rationale Functionen von x sind. (Ueber die $\varLambda$-Functionen vergl. auch *Kummer*, dieses Journal Bd. 21, S. 74 ff., *Vogt*, a. a. O. S. 32 ff.). Doch scheint die Bestimmung expliciter Ausdrücke der Coefficienten der Fundamentalgleichungen mit Hülfe dieser Transcendenten (auch nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung) auf grosse Schwierigkeiten zu stossen; und selbst wenn es gelänge, diese sehr complicirten Ausdrücke wirklich herzustellen, so würde man doch (z. B. für die numerische Berechnung) wahrscheinlich zu solchen Entwickelungen, wie wir sie in No. II ausgeführt haben, seine Zuflucht nehmen müssen; — dann aber kann man auch diese Entwickelungen gleich direct vornehmen, ohne erst die Ausdrücke der auftretenden iterirten Integrale durch $\varDelta$-Functionen aufzustellen. —

Berücksichtigt man die Art und Weise, wie sich die Coefficienten $c_\varkappa$ der Entwickelung

$$p(x) = \sum_\varkappa c_\varkappa x^\varkappa$$

aus den $A_{i\varkappa}$ und a_i in

$$p(x) = \sum_{i,\varkappa} \frac{A_{i\varkappa}}{(x-a_i)^\varkappa}$$

zusammensetzen, so erkennt man, dass durch die hier dargelegte Methode (und ebenso durch die in meiner oben angeführten Notiz gegebene) der Coefficient $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ der Fundamentalgleichung

$$\omega^2-(\alpha_{11}+\alpha_{22})\omega+1 = 0$$

für die lineare Differentialgleichung

$$(2.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p(x).y$$

erhalten werden kann in Form einer (nach dem Obigen beständig convergenten) Potenzreihe der $A_{i\varkappa}$, deren Coefficienten durch Summen unendlich vieler rationaler Functionen der a_i dargestellt werden; man erkennt sofort, dass das Analoge für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung gilt.

Dass diese Summen von unendlich vielen rationalen Functionen der a_i sich im Allgemeinen nicht auf rationale Functionen der a_i reduciren (und dass daher ihre Convergenz nur eine beschränkte ist), davon kann man sich in einfacher Weise überzeugen, da man leicht die Coefficienten der Anfangsglieder in der Entwickelung von $\alpha_{11}+\alpha_{22}$ nach Potenzen der $A_{i\varkappa}$ durch $\varDelta$-Functionen ausdrücken kann.

Bezeichnet man allgemein mit $\varDelta(\alpha_1, \dots \alpha_m)$ das, was aus $\varDelta(x; \alpha_1, \dots \alpha_m)$ nach dem vorgeschriebenen Umlauf wird, so ergiebt sich (vgl. *Vogt,* a. a. O. S. 50) für den Coefficienten von $A_{11}A_{21}A_{31}$ der Werth

$$\begin{aligned}
&-(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\{\varDelta(a_1a_2a_3)+\varDelta(a_2a_3a_1)+\varDelta(a_3a_1a_2)\}\\
&+(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\{\varDelta(a_2a_1a_3)+\varDelta(a_1a_3a_2)+\varDelta(a_3a_2a_1)\}\\
&+\Sigma(a_1-a_2)^2(2a_3-a_1-a_2)\{\varDelta(a_1a_2)+\varDelta(a_2a_1)\}
\end{aligned}$$

(die Summe über die cyklischen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 erstreckt);

und dabei ist (a. a. O. S. 39)

$$\Lambda(a_1a_2a_3)+\Lambda(a_2a_3a_1)+\Lambda(a_3a_1a_2)$$

$$= \Sigma_{23}\log\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}+\Sigma_{31}\log\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}+\Sigma_{12}\log\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}+C_1\Sigma_{23}+C_2\Sigma_{31}+C_3\Sigma_{12},$$

die Grössen

$$\Sigma_{23} = \Lambda(a_2a_3)+\Lambda(a_3a_2),$$

ebenso Σ_{31}, Σ_{12}, C_1, C_2, C_3 bedeuten von a_1, a_2, a_3 unabhängige Constanten.

Nimmt man die Gleichung (2.)' in der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x).y,\quad p(x) = \frac{\sum\limits_{h=0}^{r} B_h x^h}{\prod\limits_i (x-a_i)^{l_i}}$$

an, so kann die Grösse $a_{11}+a_{22}$ auch in eine beständig convergirende Potenzreihe der B_h entwickelt werden; die Coefficienten dieser Entwickelung werden ebenfalls Summen unendlich vieler rationaler Functionen der a_i und reduciren sich, wie man aus dem Vorhergehenden leicht folgert, ebenfalls nicht auf rationale Functionen selbst. Hierdurch wird eine Bemerkung des Herrn *Mittag-Leffler* (Acta math. Bd. XV, S. 22) berichtigt.

VI.

Bei der von Herrn *Fuchs* a. a. O. gegebenen Methode, die Integrale der Differentialgleichung

$$D(y) = \sum_\varkappa p_\varkappa(x)\frac{d^{n-\varkappa}y}{dx^{n-\varkappa}} = 0$$

in überall convergente Reihen zu entwickeln, hat man den Differentialausdruck $D(y)$ dergestalt in zwei andere $D_1(y)$, $D_2(y)$, von denen der erstere die höchste Ableitung von y enthält, zu zerlegen:

$$D(y) = D_1(y)-D_2(y),$$

dass man den Verlauf der Integrale von $D_1(y)=0$ in der ganzen Ebene beherrscht. Wir haben hier bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung diejenige specielle Form der Reihenentwickelung benutzt, welche sich bei der Zerfällung

$$D_1(y) = \frac{d^2y}{dx^2},\quad D_2(y) = p(x).y$$

ergiebt; aber es bleibt die Frage offen, ob man nicht durch Wahl anderer Zerlegungen zweckmässigere Formen der Entwickelung erhält, und diese

Frage wird nicht minder bei den Differentialgleichungen höherer Ordnung zu erörtern sein.

Um ein Beispiel für eine solche andere Art der Zerlegung zu geben, betrachten wir den Fall

$$(1.)\qquad D_1(y) = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{c_{-2}}{x^2}\cdot y,\quad D_2(y) = y.\sum_{\varkappa \neq -2} c_\varkappa x^\varkappa = y.q(x).$$

Nach der Theorie des Herrn *Fuchs* hat man nun, um ein Integral der gegebenen Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Anfangswerthen (für $x = x_0$) zu erhalten, folgendermassen zu verfahren. Es sei u_0 dasjenige Integral von $D_1(y) = 0$, welches diese Anfangswerthe besitzt; ferner sei η_1, η_2 ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen derselben Differentialgleichung. Wenn die Variable x durch z ersetzt wird, so mögen η_1, η_2 in v_1, v_2 übergehen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$$

werde mit $\varDelta(z)$ bezeichnet; ferner möge $\varDelta(z, x)$ aus $\varDelta(z)$ dadurch hervorgehen, dass v_1', v_2' durch $D_2(\eta_1)$, $D_2(\eta_2)$ ersetzt werden, also

$$\varDelta(z, x) = q(x).\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = q(x).\varDelta_1(z, x).$$

Definirt man dann die Functionen $F_\varrho(x)$ durch die Gleichungen

$$F_0(x) = D_2(u_0),\quad F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varDelta(z, x)}{\varDelta(z)}\cdot F_{\varrho-1}(z)dz \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

und setzt

$$u_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varDelta_1(z, x)}{\varDelta(z)}\cdot F_{\varrho-1}(z)dz \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

$$= \frac{F_\varrho(x)}{q(x)},$$

so wird

$$y = \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_\varrho(x)$$

das gesuchte Integral.

In unserem Falle bestimmen wir (vgl. No. I) η_1, η_2 so, dass

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{pmatrix}_{x=x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird, also

$$\eta_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\cdot\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} - \frac{r_1}{r_2 - r_1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2},$$

$$\eta_2 = \frac{x_0}{r_1 - r_2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_1} - \frac{x_0}{r_1 - r_2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_2},$$

wo r_1 und $r_2 = 1-r_1$ die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1) = c_{-2}$$

bedeuten. Dann wird

$$\Delta_1(z, x) = \frac{1}{r_1-r_2}(x^{r_1}z^{r_2}-x^{r_2}z^{r_1}),$$

also

$$(2.)\quad \begin{cases} u_\varrho(x) = \dfrac{x^{r_1}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} x^{r_2}.F_{\varrho-1}(x)dx - \dfrac{x^{r_2}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} x^{r_1}.F_{\varrho-1}(x)dx \\ \quad = \dfrac{x^{r_1}}{r_1-r_2}\cdot\displaystyle\int_{x_0}^{x} q(x).x^{r_2}.u_{\varrho-1}(x)dx - \dfrac{x^{r_2}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} q(x).x^{r_1}.u_{\varrho-1}(x)dx. \end{cases}$$

Nun setzen wir einmal $u_0 = \eta_1$ und bestimmen so mit Hülfe von (2.) eine Reihe $U_0(=\eta_1)$, U_1, U_2, ...; andererseits nehmen wir $u_0 = \eta_2$, bestimmen nach (2.) eine Reihe $U'_0(=\eta_2)$, U'_1, U'_2, ... und nehmen

$$V_\varrho = \frac{dU'_\varrho}{dx} \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots);$$

dann wird die Reihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}(U_\varrho + V_\varrho),$$

wenn man x nach vollzogenem Umlauf $= x_0$ setzt, nach Früherem in $a_{11}+a_{22}$ übergehen, und es wird damit die Fundamentalgleichung

$$\omega^2-(a_{11}+a_{22})\omega+1 = 0$$

bestimmt sein.

Für

$$(3.)\quad x = x_0.t,\quad \bar{q}(t) = q(x_0.t).x_0^2,\quad W_\varrho = \frac{1}{x_0}\cdot U'_\varrho(x_0.t),\quad V_\varrho = \frac{dW_\varrho}{dt}$$

wird

$$(4.)\quad \begin{cases} U_\varrho = \dfrac{t^{r_1}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_1^t \bar{q}(t).t^{r_2}.U_{\varrho-1}dt - \dfrac{t^{r_2}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_1^t \bar{q}(t).t^{r_1}U_{\varrho-1}dt, \\ W_\varrho = \dfrac{t^{r_1}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_1^t \bar{q}(t).t^{r_2}.W_{\varrho-1}dt - \dfrac{t^{r_2}}{r_1-r_2}\displaystyle\int_1^t \bar{q}(t).t^{r_1}.W_{\varrho-1}dt, \end{cases} \qquad (\varrho \geqq 1)$$

$$(5.)\quad \begin{cases} U_0 = \dfrac{r_2}{r_2-r_1}\cdot t^{r_1} - \dfrac{r_1}{r_2-r_1}t^{r_2}, \\ V_0 = \dfrac{r_1}{r_1-r_2}t^{r_1-1} - \dfrac{r_2}{r_1-r_2}t^{r_2-1}. \end{cases}$$

Man erkennt leicht, dass sowohl U_ϱ als auch V_ϱ ein Aggregat von Gliedern von folgender Form wird:

$$(6.)\qquad t^{\mu_0}.\int_1^t \bar{q}(t).t^{\mu_1}dt\int_1^t \bar{q}(t).t^{\mu_2}dt\int_1^t\dots\int_1^t \bar{q}(t).t^{\mu_\varrho}dt,$$

wo μ_0 immer einen der Werthe

$$\begin{matrix} r_1, & r_2, \\ r_1-1, & r_2-1 \end{matrix}$$

annimmt und auch $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ sich linear und ganzzahlig aus r_1, r_2 zusammensetzen.

Da nach (3.)

$$\bar{q}(t) = \sum_{\varkappa \neq -2} c_\varkappa t^\varkappa . x_0^{\varkappa+2},$$

so wird der von x_0 freie Bestandtheil des Ausdrucks (6.) gegeben durch

$$(6^a.)\qquad \sum_{\varkappa_1,\dots\varkappa_\varrho} c_{\varkappa_1}\dots c_{\varkappa_\varrho}.t^{\mu_0}.\int_1^t t^{\mu_1+\varkappa_1}dt\int_1^t\dots\int_1^t t^{\mu_\varrho+\varkappa_\varrho}dt,$$

die Summe erstreckt über alle Werthsysteme $(\varkappa_1, \dots \varkappa_\varrho)$, die den Bedingungen

$$(7.)\qquad \sum_h \varkappa_h = -2\varrho, \quad \varkappa_h \neq -2 \qquad (h=1,\dots\varrho)$$

genügen. Um die Fundamentalgleichung selbst zu erhalten, hat man t von $t=1$ aus einen Umlauf um $t=0$ nach $t=1$ zurück vollziehen zu lassen; dabei nimmt t^{μ_0} immer einen der beiden Werthe $e^{2\pi i r_1}$ oder $e^{2\pi i r_2}$ an, während das iterirte Integral nach Früherem eine rationale Function von r_1 und r_2 wird, sodass der Coefficient jedes Gliedes $c_{\varkappa_1}\dots c_{\varkappa_\varrho}$ in $a_{11}+a_{22}$ die Form

$$(8.)\qquad Q.e^{2\pi i r_1}+R.e^{2\pi i r_2}$$

annimmt, wo Q, R rationale Functionen von r_1, r_2 bedeuten.

Setzt man

$$r_1 = n, \quad r_2 = 1-n,$$

so kann (8.) auch auf die Form

$$(8^a.)\qquad \bar{Q}.\sin 2\pi n+\bar{R}.\cos 2\pi n$$

gebracht werden, wo $\bar{Q}$, $\bar{R}$ rationale Functionen sind. Man kann auch leicht zeigen, dass die Nenner dieser Functionen nur Linearfactoren von der Form $2n+\lambda$ (λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl) enthalten können; dies ist nämlich die allgemeine Form der von n abhängigen Wurzeldifferenzen für die determinirenden Gleichungen derjenigen linearen Differentialgleichungen, denen die iterirten Integrale in (6^a.) genügen (vgl. No. II); ausserdem treten die Ausdrücke (6^a.) in U_ϱ und V_ϱ nur mit solchen rationalen Functionen multiplicirt auf, deren Nenner Potenzen von $1-2n$ (nämlich r_2-r_1) sind.

Dies ist die Verallgemeinerung eines von Herrn *Bruns* (Astronomische Nachrichten No. 2533, 1883 und 2553, 1884) für eine Differentialgleichung der Störungstheorie ausgesprochenen Satzes.

Auf die explicite Darstellung der Fundamentalgleichung mit Hülfe des angegebenen Verfahrens gehe ich hier nicht näher ein. Dagegen soll noch kurz der Fall betrachtet werden, dass der Umlauf nur den Punkt $x = 0$ umschliesst und in diesem Punkte die Integrale der gegebenen Differentialgleichung nicht unbestimmt werden.

Dann ist

$$q(x) = \Sigma c_\varkappa x^\varkappa \qquad (\varkappa = -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

also kann für $\varrho \geqq 1$ den Bedingungen (7.) durch kein einziges Werthsystem $(\varkappa_1, \ldots \varkappa_\varrho)$ genügt werden; es wird

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{22} &= [U_0+V_0]_{t=e^{2\pi i}} \\ &= e^{2\pi i r_1}+e^{2\pi i r_2}, \end{aligned}$$

sodass man sofort auf das bekannte Resultat zurückkommt.