Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme.

(Von Herrn *Stäckel.*)

I.

Begriff eines dynamischen Problems; Normalform der Differentialgleichungen der Dynamik.

Jacobi sagt in der ersten seiner Vorlesungen über *Dynamik* (herausgegeben 1866 von *A. Clebsch,* 1884 von *E. Lottner*), dass er sich auf solche Aufgaben der Mechanik beschränken werde, bei denen es sich handelt um die Bewegung eines Systems einer *endlichen* Zahl materieller *Punkte* von der Beschaffenheit, dass sowohl die Bedingungen des Systems als auch die wirkenden Kräfte allein von der Configuration der Punkte, nicht von ihren Geschwindigkeiten abhängen. Im Folgenden wird es sich als zweckmässig erweisen, auch gewisse Systeme von unbeschränkt vielen materiellen Punkten zuzulassen, nämlich alle diejenigen, deren Lage zur Zeit t durch die Werthe einer *endlichen* Anzahl von *Bestimmungsstücken* angegeben wird, wie dies etwa bei einem starren Körper der Fall ist. Dagegen werden *Jacobi*s Beschränkungen hinsichtlich der Bedingungen des Systems sowie der wirkenden Kräfte durchaus festgehalten werden. Die so definirten Aufgaben der Mechanik sollen kurz *dynamische Probleme* heissen.

Um für ein dynamisches Problem die Differentialgleichungen der Bewegung in der Form aufzustellen, die ihnen *Lagrange* im zweiten Theile seiner Mechanik gegeben hat (Mécanique analytique, Paris 1788. S. 226), werden die Bestimmungsstücke $p_1, p_2, \dots p_n$ des Systems in folgender Art eingeführt. Die Coordinaten des $i$ten materiellen Punktes zur Zeit t in Bezug auf ein beliebiges festes rechtwinkliges Coordinatensystem seien $x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$. Dann bestehen vermöge der Bedingungen des Systems zwischen den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ gewisse Gleichungen, und diese sind bei dynamischen Problemen solcher Natur, dass sie sich identisch erfüllen lassen, indem man die x_h als Functionen von n unabhängigen Veränderlichen $p_1, p_2, \dots p_n$ ausdrückt. Sieht man aber die $p_1, p_2, \dots p_n$ als Functionen von $n+r$ neuen unabhängigen Veränderlichen $q_1, q_2, \dots q_{n+r}$ an, so erhält man Ausdrücke der x_h in diesen neuen Veränderlichen, durch welche ebenfalls die Bedingungsgleichungen erfüllt werden. Deshalb fügt *Lagrange* (a. a. O. S. 217) hinzu, dass n die *kleinste* Anzahl unabhängiger Variabeln sein soll, vermittelst deren sich die x_h darstellen lassen. *Jacobi* (Dynamik, S. 62) drückt diese Forderung so aus (ebenso *Kirchhoff*, Mechanik, S. 29), dass die Anzahl n gleich der Differenz ist zwischen der Anzahl sämmtlicher Coordinaten x_h und der Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen zwischen diesen Grössen. Dies ist erlaubt, so lange man nur eine endliche Zahl von Grössen x_h hat. Es ist aber möglich, dem Kriterium dafür, dass n wirklich die kleinste Anzahl unabhängiger Veränderlicher ist, eine Form zu geben, die frei ist von dieser Beschränkung. Herr *Kronecker* hat nämlich in seinen Vorlesungen folgenden Satz bewiesen:

Ist ein System von mindestens n Functionen $x_1, x_2, \dots x_n$ der unabhängigen Variabeln $p_1, p_2, \dots p_n$ gegeben, so ist die kleinste Anzahl unabhängiger Variabeln, durch welche sich diese Functionen ausdrücken lassen, genau gleich der Zahl, welche den *Rang* *) des Systems:

$$\frac{\partial x_h}{\partial p_\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \dots \\ \varkappa = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

angiebt; sie ist also dann und nur dann gleich n, wenn dieser Rang gerade gleich n ist.

Sind nunmehr die x_h durch die n Bestimmungsstücke $p_1, p_2, \dots p_n$ der verlangten Art dargestellt, so hat man nach *Lagrange* die Componenten nach den Coordinatenaxen der auf den $i$ten materiellen Punkte wirkenden Kraft $X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}$, welche der Voraussetzung nach nur von den x_h abhängen, durch die $p_\varkappa$ darzustellen. Alsdann sind die so gewonnenen Ausdrücke der x_h und X_h einzusetzen:

erstens in den Ausdruck der *virtuellen Arbeit* des Systems im Zeitelemente $(t \dots t+dt)$

$$\sum_h X_h \delta x_h,$$

*) Ueber den Begriff des Ranges eines Systems von Grössen vergl. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884 II. S. 1192.

welcher dadurch übergehen möge in

$$(1.) \qquad U' = \sum_{\varkappa} P_{\varkappa} \delta p_{\varkappa},$$

zweitens in den Ausdruck der *lebendigen Kraft* des Systems zur Zeit t, welcher, wenn die Masse des $i$ten Punktes mit $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}$ bezeichnet wird, lautet

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h} m_h \left(\frac{dx_h}{dt}\right)^2$$

und übergehen möge in:

$$(2.) \qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_{\varkappa}}{dt}\frac{dp_{\lambda}}{dt} \qquad (a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}).$$

Hierbei sind die $P_{\varkappa}$ und $a_{\varkappa\lambda}$ Functionen der $p_1, p_2, \dots p_n$ allein; die kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen hier, wie im Folgenden, die Reihe der Zahlen 1, 2, ... n.

Ist dieses geschehen, so ergeben sich endlich die gesuchten Differentialgleichungen in der Form:

$$(a.) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dp_{\mu}}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial p_{\mu}} - P_{\mu} = 0.$$

Aus diesem System lässt sich aber ein anderes völlig gleichbedeutendes ableiten, bei dem die zweiten Ableitungen der $p_{\varkappa}$ nach der Zeit ausgedrückt sind durch die Grössen $p_{\varkappa}$ selbst und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit. Dies darzuthun dient folgende Ueberlegung.

Die lebendige Kraft des Systems T kann (für reelle Werthe der x_h) nur dann verschwinden, wenn die sämmtlichen $\frac{dx_h}{dt}$ verschwinden. Daher kann auch

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_{\varkappa}}{dt}\frac{dp_{\lambda}}{dt}$$

nur dann verschwinden, wenn die Gleichungen:

$$(3.) \qquad \sum_{\mu} \frac{\partial x_h}{\partial p_{\mu}}\frac{dp_{\mu}}{dt} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots)$$

sämmtlich erfüllt sind. Nun wurde die geringste Zahl n der unabhängigen Veränderlichen dadurch charakterisirt, dass mindestens *eine* Determinante

$$\left|\frac{\partial x_{h_\lambda}}{\partial p_{\mu}}\right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

nicht identisch verschwindet, woraus folgt, dass die Gleichungen (3.) nur befriedigt werden können durch das Verschwinden sämmtlicher $\frac{dp_\mu}{dt}$. Mithin ist T eine quadratische Form der $\frac{dp_\mu}{dt}$, welche nur verschwindet, wenn sämmtliche $\frac{dp_\mu}{dt}$ verschwinden, und sonst einen positiven Werth hat. In der Theorie der quadratischen Formen wird bewiesen, dass mit dieser Eigenschaft untrennbar verbunden die weitere ist, dass die Hauptsubdeterminanten des symmetrischen Systems der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ nicht identisch verschwinden, sondern (abgesehen von singulären Werthsystemen der p_μ) positive Grössen sind. Im besonderen ergiebt sich hieraus, dass bei jedem dynamischen Problem die Determinante:

$$a = |a_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n) \tag{4.}$$

nicht identisch verschwindet; dasselbe gilt von den Grössen a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}.

Da die Determinante der quadratischen Differentialform:

$$2Tdt^2 = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda$$

nicht identisch verschwindet, so finden auf sie Anwendung die Theoreme, welche die Herren *Christoffel* und *Lipschitz* in ihren gleichzeitig erschienenen Abhandlungen (Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, dieses Journal, Bd. 70 (1869) S. 46 und S. 241; Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, ebendaselbst S. 71) über solche Formen entwickelt haben. Bei diesen Untersuchungen spielt eine besondere Rolle das Aggregat:

$$\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu},$$

welches Herr *Lipschitz* mit $f_{\mu\varkappa\lambda}$, Herr *Christoffel* mit $2\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}$ bezeichnet. Da später verschiedene Differentialformen neben einander betrachtet werden müssen, soll hier nach dem Vorgange von Herrn *Weingarten* (Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. Festschrift der technischen Hochschule. Berlin 1884)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\right) = \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a \tag{5.}$$

gesetzt werden.

Mit Benutzung dieses Zeichens lauten die Gleichungen (a.) explicite:

$$\sum_\varkappa a_{\varkappa\mu}\frac{d^2p_\varkappa}{dt^2} + \sum_{\varkappa,\lambda}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt} - P_\mu = 0. \tag{a'.}$$

Diese Gleichungen aber lassen sich, da die Determinante

$$|a_{\varkappa\mu}| \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \dots n)$$

nicht identisch verschwindet, nach den $\frac{d^2 p_\varkappa}{dt^2}$ auflösen. Zu diesem Zwecke werde noch (ebenfalls nach dem Vorgang der Herren *Christoffel, Lipschitz* und *Weingarten*) eingeführt:

$$(6.) \qquad \sum_\mu \begin{bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{bmatrix}_a a'_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{Bmatrix}_a,$$

wobei $a'_{\mu\nu}$ das dem System der $a_{\mu\nu}$ reciproke System bezeichnet. Alsdann erhält man das dem System $(a'.)$ völlig gleichbedeutende System:

$$(a^*.) \qquad \frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} + \sum_\mu P_\mu a'_{\mu\nu}.$$

Die Gleichungen $(a^*.)$ sollen als die *Normalform* des Systems der Differentialgleichungen der Bewegung für das dynamische Problem bezeichnet werden.

II.

Begriff und Bedingungen der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme.

Statt der unabhängigen Veränderlichen $p_1, p_2, \dots p_n$ kann man neue Veränderliche $q_1, q_2, \dots q_n$ einführen, indem man setzt:

$$(S.) \qquad p_\varkappa = p_\varkappa(q_1, q_2, \dots q_n).$$

Dabei ist die Substitution $(S.)$ nur der einen Bedingung unterworfen, dass die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_\lambda} \right| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n)$$

nicht identisch verschwindet. Da auf der Möglichkeit, die n Bestimmungsstücke in verschiedener Art einzuführen, die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung beruht, so ist die Transformation dieser Gleichungen von fundamentaler Wichtigkeit, und sie zu erleichtern war gerade die Absicht, welche *Lagrange* hatte, als er die Differentialgleichungen der Bewegung in der Form $(a.)$ aufstellte (vergl. a. a. O. S. 217). Führt man nämlich die neuen Variabeln in die Ausdrücke für U' und T ein, wodurch man erhalten möge:

$$(1'.) \qquad U' = \sum_\varkappa Q_\varkappa \delta q_\varkappa,$$

$$(2'.) \qquad T = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa\lambda} \frac{dq_\varkappa}{dt} \frac{dq_\lambda}{dt} \qquad (b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa}),$$

so lauten die neuen Differentialgleichungen der Bewegung

$$(b.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dq_\varkappa}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} - Q_\varkappa = 0.$$

Es genügt also, die Ausdrücke für die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft umzuformen, denn aus diesen kann man unmittelbar die Differentialgleichungen der Bewegung ableiten. Man erhält auf diese Weise auch sofort die Normalform der Bewegungsgleichungen. Zu diesem Zweck hat man aus den Coefficienten von (2'.) nur zu bilden:

$$(5'.)\qquad \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial b_{\varkappa\mu}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial b_{\varkappa\lambda}}{\partial q_\mu}\right] = \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_b,$$

$$(6'.)\qquad \sum_\mu \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_b b'_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_b,$$

wobei $b'_{\mu\nu}$ das dem System der $b_{\mu\nu}$ reciproke System bedeutet. Dann ist

$$(b^*.)\qquad \frac{d^2 q_\nu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_b \frac{dq_\varkappa}{dt}\frac{dq_\lambda}{dt} + \sum_\mu Q_\mu b'_{\mu\nu}.$$

Der Umstand, dass man behufs Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für ein dynamisches Problem von dem betrachteten Systeme nur zu kennen braucht die Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft in der kleinsten Anzahl von Bestimmungsstücken, scheint mir auch nach anderer Richtung von Bedeutung zu sein. Er erklärt die Erscheinung, dass verschiedene in ihrer mechanischen Formulirung ganz disparate Aufgaben der Dynamik zu demselben System von Differentialgleichungen der Bewegung, also zu demselben analytischen Problem geführt haben. Es ist also zu unterscheiden zwischen der ***mechanischen*** Einkleidung und dem ***analytischen*** Kern der dynamischen Probleme. Die Lösung eines einzigen analytischen Problems liefert häufig die Mittel, ganz verschiedenartige dynamische Probleme zu erledigen, indem es nur darauf ankommt, die gewonnenen Functionen der Zeit vom Standpunkte der Mechanik aus zu deuten und zu discutiren. Auf anderen Gebieten der mathematischen Physik sind solche Erscheinungen geläufig, wofür die Potentialtheorie ein schönes Beispiel ist. Aber gerade in der Dynamik scheint jene Unterscheidung nicht mit genügender Klarheit erkannt und durchgeführt worden zu sein. Welche Folgen dies gehabt hat, wird unten an einigen bezeichnenden Beispielen dargethan werden.

Wenn zwei Probleme der Dynamik in der Beziehung zu einander stehen, dass sie zu demselben Systeme von Differentialgleichungen der Bewegung führen, so sollen sie ***analytisch äquivalent*** genannt werden.

Will man den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme für die Untersuchung solcher Aufgaben nutzbar machen, so tritt sofort dadurch eine erhebliche Schwierigkeit ein, dass jene Aequivalenz vermöge der Identität der Systeme der Differentialgleichungen der Bewegung nur dann evident wird, wenn für die beiden betrachteten Aufgaben die Bestimmungsstücke in besonderer Weise gewählt sind. Im allgemeinen gilt nur Folgendes. Führt das Problem I. auf die Gleichungen (a^*.), das Problem II. auf die Gleichungen (b^*.), so sind beide Probleme analytisch äquivalent, wenn eine Substitution (S.) existirt, die das System (a^*.) in das System (b^*.) überführt.

Dafür dass dies der Fall ist, lässt sich sofort eine ***hinreichende*** Bedingung angeben. Seit *Lagrange* weiss man, dass, wenn die beziehlichen Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft für zwei dynamische Probleme:

$$(\mathrm{I.})\begin{cases} U' = \sum\limits_{\varkappa} P_\varkappa \delta p_\varkappa, \\ T = \frac{1}{2}\sum a_{\varkappa\lambda}\frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt}, \end{cases} \qquad (\mathrm{II.})\begin{cases} \mathfrak{U}' = \sum\limits_{\varkappa} \mathfrak{Q}_\varkappa \delta q_\varkappa, \\ \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum \mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}\frac{dq_\varkappa}{dt}\frac{dq_\lambda}{dt} \end{cases}$$

durch eine Substitution (S.) in einander übergehen, dass alsdann dieselbe Substitution die Differentialgleichungen der Bewegung in einander überführt.

Um zu entscheiden, ob eine solche Substitution (S.) existirt, kann man so verfahren. Man untersucht, ob die quadratische Differentialform $2Tdt^2$ sich transformiren lässt in $2\mathfrak{T}dt^2$. Die Frage, ob zwei gegebene quadratische Differentialformen in einander transformirbar sind, ist von Herrn *Christoffel* (a. a. O. S. 65 und S. 244) behandelt worden. Es wird zunächst der Fall ausgeschlossen, dass das Gebiet der Variabeln $p_\varkappa$ bei unverändertem $2Tdt^2$ in sich verschiebbar ist, da alsdann „die Substitution (S.) nothwendig verfügbare Elemente enthält, welche stetiger Aenderung fähig sind". Wenn alsdann Transformation überhaupt möglich ist, so ist sie eine bestimmte, und über die Möglichkeit wird entschieden, indem man die Möglichkeit der simultanen linearen Transformation einer Reihe ***algebraischer*** Formen untersucht.

Hat man auf diese Weise die Transformation (S.), welche $2Tdt^2$ in $2\mathfrak{T}dt^2$ überführt, so ist nur noch zu ermitteln, ob dadurch auch U' in $\mathfrak{U}'$ übergeht. Dafür ist aber das identische Bestehen der Gleichungen

$$\mathfrak{Q}_\varkappa = \sum_\mu P_\mu \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

nothwendig und hinreichend. Gelten also noch diese Gleichungen, so sind die Probleme analytisch äquivalent.

Da nun zur analytischen Aequivalenz nur erforderlich ist, dass die Differentialgleichungen der Bewegung identisch gemacht werden können, so erhebt sich nunmehr die Frage, in welcher Beziehung bei zwei analytisch äquivalenten dynamischen Problemen die Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft stehen.

Zu zwei solchen Problemen gehört nothwendig dieselbe kleinste Anzahl n von Bestimmungsstücken. Es dürfte daher naturgemäss sein, alle dynamischen Probleme, für welche diese Anzahl denselben Werth hat, zusammenzufassen in *Ordnungen*, welche durch den Werth von n charakterisirt sind.

Da die beiden betrachteten Probleme analytisch äquivalent sind, so kann man sich von vorn herein die Bestimmungsstücke so eingeführt denken, dass die Aequivalenz in Evidenz tritt. Es sei also:

$$U' = \sum_\varkappa P_\varkappa \delta p_\varkappa, \qquad \mathfrak{U}' = \sum_\varkappa V_\varkappa \delta p_\varkappa,$$

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_\varkappa a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt}, \qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} \sum_\varkappa w_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt}.$$

Dann lauten die beziehlichen Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(a^*.) \qquad \frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \left\{ \begin{matrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} + \sum_\mu P_\mu a'_{\mu\nu},$$

$$(w^*.) \qquad \frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \left\{ \begin{matrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{matrix} \right\}_w \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} + \sum_\mu V_\mu w'_{\mu\nu}.$$

Der Voraussetzung nach sind beide Systeme identisch, d. h. sie definiren die $p_\varkappa$ als dieselben Functionen der Zeit. Dafür ist aber nothwendig und hinreichend, dass beide bei denselben willkürlichen Anfangswerthen der $p_\varkappa$ und $\frac{dp_\varkappa}{dt}$ dieselben Werthe der $\frac{d^2 p_\varkappa}{dt^2}$ ergeben, und das bedeutet nichts anderes, als dass die Gleichungen:

$$(A.) \qquad \left\{ \begin{matrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{matrix} \right\}_w = \left\{ \begin{matrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \qquad (\varkappa, \lambda, \nu = 1, 2, \dots n),$$

$$(B.) \qquad \sum_\mu V_\mu w'_{\mu\nu} = \sum_\mu P_\mu a'_{\mu\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

identisch in $p_1, p_2, \dots p_n$ bestehen.

Die Gleichungen (*A.*) und (*B.*) lassen sich auch ansehen als der Ansatz folgender Aufgabe. Gegeben ist ein dynamisches Problem mit den Ausdrücken U' und T, bekannt also sind die $P_\varkappa$ und $a_{\varkappa\lambda}$; gesucht sind die Ausdrücke $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{T}$, also die $V_\varkappa$ und $w_{\varkappa\lambda}$, die zu dynamischen Problemen gehören, welche dem gegebenen analytisch äquivalent sind. Vermöge der Gleichungen (*A.*) und (*B.*) ist diese Aufgabe zurückgeführt auf die Discussion eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen. Dabei ist noch zu bemerken, dass nur solche Lösungen $w_{\varkappa\lambda}$ dieses Systems zugelassen werden dürfen, für welche $2\mathfrak{T}dt^2$ eine positive quadratische Form der $dp_\varkappa$ ist. Und dies ermöglicht sofort eine erhebliche Vereinfachung der Discussion. Denn da die Determinante

$$(7.)\qquad w = |w_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

nicht identisch verschwinden darf, lassen sich die Gleichungen (*B.*) nach den V_λ auflösen, sind also gleichbedeutend mit:

$$(B'.)\qquad V_\lambda = \sum_{\varkappa,\nu} P_\varkappa a'_{\varkappa\nu} w_{\lambda\nu}.$$

Man braucht daher nur zu untersuchen, welches die allgemeinste Lösung der Gleichungen (*A.*) ist, für die $2\mathfrak{T}dt^2$ eine positive quadratische Form ist. Hat man diese gefunden, so erhält man den allgemeinsten Ausdruck $\mathfrak{U}'$, indem man die V_λ durch die Gleichungen (*B'.*) definirt.

Es kommt also alles an auf die Discussion der Gleichungen (*A.*). Man erkennt leicht, dass diese Gleichungen identisch erfüllt sind durch

$$w_{\varkappa\lambda} = c a_{\varkappa\lambda},$$

wo c eine positive Constante bedeutet. Dann ist

$$\mathfrak{T} = cT,$$

also $2\mathfrak{T}dt^2$ eine positive quadratische Form der $dp_\varkappa$. Ferner ergiebt sich

$$\mathfrak{U}' = cU'.$$

Für die analytische Aequivalenz zweier dynamischen Probleme reicht es also hin, dass die beziehlichen Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft sich nur durch dieselbe multiplicative Constante unterscheiden.

Es ist leicht, zu einem Problem mit den Ausdrücken U' und T solche zu finden, die auf $\mathfrak{U}' = cU'$, $\mathfrak{T} = cT$ führen. Man braucht nur jede Länge l im ersten Problem durch αl, jede Masse m durch βm, jede Kraft X durch γX, jede Zeit t durch εt zu ersetzen, wo α, β, γ, ε Constanten bedeuten.

Alsdann geht U' in $\alpha\gamma U'$, T in $\frac{\alpha^2\beta}{\varepsilon^2}T$ über. Wenn also nur

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

ist, so ändern sich U' und T um dieselbe multiplicative Constante, und die Differentialgleichungen der Bewegung bleiben unverändert.

Diese besondere Art analytischer Aequivalenz hat schon *Newton* (Philosophiae naturalis principia mathematica (1686) Liber. I, prop. 87) für Probleme specieller Natur erkannt. In ihrer vollen Allgemeinheit ist sie von Herrn *Bertrand* (Journal de l'École Polytechnique, XIX, Cah. 32, S. 189 (1848). Note sur la similitude en mécanique) formulirt und als *mechanische Aehnlichkeit* bezeichnet worden. Herr *Bertrand* hebt hervor, dass dieses Princip, das er als sehr fruchtbar bezeichnet, zwar nicht die Lösung mechanischer Probleme, wohl aber einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Problemen giebt, Problemen, wie er sagt, „de difficulté analytique équivalente". Es verdient erwähnt zu werden, dass Herr *H. von Helmholtz* in seinen Arbeiten wiederholt von der mechanischen Aehnlichkeit Gebrauch gemacht hat (vergl. z. B. Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I, S. 158).

Es fragt sich jetzt, ob das System (A.) ausser der evidenten Lösung $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$ noch andere Lösungen besitzt. Dass dies bei besonderen Aufgaben sehr wohl der Fall sein kann, zeigt folgendes Beispiel. Es seien die $a_{\varkappa\lambda}$ sämmtlich Constanten. Dann sind alle $\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a$ und damit auch alle $\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}_a$ gleich Null, und die Gleichungen (A.) werden $\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}_w = 0$.

Diese Gleichungen sind aber augenscheinlich identisch erfüllt, wenn man den $w_{\varkappa\lambda}$ irgend welche constanten Werthe beilegt. Damit $2\mathfrak{T}dt^2$ eine positive quadratische Form der $dp_\varkappa$ sei, müssen nur die Hauptsubdeterminanten des symmetrischen Systems der $w_{\varkappa\lambda}$ positiv sein. Dabei ist also durchaus unnöthig, dass das Verhältniss $a_{\varkappa\lambda} : w_{\varkappa\lambda}$ für alle Werthsysteme $\varkappa$, λ denselben constanten Werth habe.

Wohl aber lässt sich zeigen —, und dies wird den Gegenstand des folgenden Abschnittes bilden —, dass *im allgemeinen* das System (A.) nur die Lösung $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$ hat, d. h., dass die Forderung, es solle ausserdem noch eine andere Lösung existiren, eine wirkliche Beschränkung in der Wahl der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ bildet. Es wird dort der Satz bewiesen werden:

Gegeben sei ein symmetrisches System von Functionen der Variabeln

$p_1, p_2, \ldots p_n : a_{\varkappa\lambda}(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$, dessen Hauptsubdeterminanten nicht identisch verschwinden; gesucht ein System $w_{\varkappa\lambda}$ derselben Beschaffenheit, bei welchem die $w_{\varkappa\lambda}$ den partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}_w = \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}_a \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

genügen. Wird ausgeschlossen, dass die $a_{\varkappa\lambda}$ gewissen genau angebbaren partiellen Differentialgleichungen genügen, so ist das allgemeinste System $w_{\varkappa\lambda}$ der verlangten Art gegeben durch:

$$w_{\varkappa\lambda} = c a_{\varkappa\lambda},$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Den Schluss des Abschnittes sollen die Folgerungen bilden, welche man aus diesem Satze für unsere dynamischen Fragen ziehen kann.

Nach *Lagrange* braucht man behufs Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für ein dynamisches Problem von dem betrachteten System nur zu kennen die Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft in der kleinsten Anzahl von Bestimmungsstücken. Aus dem eben angegebenen Satze folgt, dass man, abgesehen von gewissen singulären Fällen, umgekehrt aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft bis auf dieselbe multiplicative Constante ermitteln kann. Das Auftreten dieser Constanten erklärt sich, wie schon aus der Bemerkung Seite 327 unten hervorgeht, daraus, dass diese Ausdrücke, solange die Wahl der Einheiten von Länge, Masse, Kraft und Zeit willkürlich bleibt, überhaupt nur bis auf einen Proportionalitätsfactor bestimmt sind. Man darf daher sagen, dass bei geeigneter Wahl der Einheiten die Identität der Systeme der Differentialgleichungen der Bewegung für zwei Probleme im allgemeinen auch die Identität der Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft nach sich zieht. Unter dieser Bedingung gilt also der Satz:

> Für die analytische Aequivalenz zweier dynamischen Probleme ist, abgesehen von singulären (besonders zu untersuchenden) Fällen, nothwendig und hinreichend, dass die beziehlichen Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft in der kleinsten Anzahl von Bestimmungsstücken identisch sind oder durch simultane Transformation der Variabeln identisch gemacht werden können.

Hieraus folgt, dass jedes allgemeine Princip der Mechanik, mit dessen Hülfe sich die Differentialgleichungen der Bewegung für ein dynamisches

Problem aufstellen lassen, so beschaffen ist, dass man mit seiner Hülfe die Ausdrücke für die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft des Systems ermitteln kann. Die Kenntniss dieser Ausdrücke kann also als das Minimum dessen bezeichnet werden, was zur analytischen Kennzeichnung eines dynamischen Problems erfordert wird.

Die Resultate der vorhergehenden Untersuchung über die analytische Aequivalenz dynamischer Probleme treten jedoch erst dann in das rechte Licht, wenn man sie in Verbindung bringt mit gewissen Betrachtungen, welche Herr *Lipschitz* in seinen Abhandlungen: „Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung“ (dieses Journal, Bd. 74 (1871) S. 746) und: „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges“ (dieses Journal Bd. 82 (1877) S. 316) angestellt hat*). Von besonderer Wichtigkeit ist dabei die Ausführung, welche sich a. a. O. Bd. 82, S. 331 findet, und deren Inhalt sich in der hier angewandten Bezeichnung so wiedergeben lässt.

Eine Aufgabe der Dynamik habe geführt auf die Ausdrücke:

$$U' = \sum_{\varkappa} P_\varkappa \delta p_\varkappa, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt}.$$

Nun lässt sich das Problem der Dynamik in der Weise ausdehnen, dass das Quadrat des Linienelementes ds im Raume gleich einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form der Differentiale der Coordinaten angenommen wird. Man darf daher für diese Differentialform genau den Ausdruck

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} dp_\varkappa dp_\lambda = ds^2 \tag{8.}$$

wählen. In Uebereinstimmung hiermit ist dann die lebendige Kraft eines Punktes der Masse 1 gleich

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt}.$$

Aber auch dem Ausdruck

$$U' = \sum_{\varkappa} P_\varkappa \delta p_\varkappa$$

kann man für die jetzt betrachtete Bewegung die entsprechende Bedeutung der virtuellen Arbeit geben. Thut man dies, so ergiebt sich vermöge der von Herrn *Lipschitz* in der erstgenannten Abhandlung entwickelten Sätze ein System von Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes der

*) Ich bemerke hierbei, dass Herr *Lipschitz* auch die Güte gehabt hat, mir über den Gegenstand einige briefliche Mittheilungen zukommen zu lassen, welche mir bei der vorliegenden Untersuchung von grossem Nutzen gewesen sind, und für welche ich mich zum grössten Danke verpflichtet fühle.

Masse 1 in der n-fachen Mannigfaltigkeit, deren Linienelement ds durch Gl. (8.) gegeben wird, welches genau dieselbe Gestalt hat, wie das System der Differentialgleichungen (a.), das für jenes dynamische Problem aufgestellt wurde.

Wenn man daher bei der Betrachtung dynamischer Probleme auch solche zulässt, die diesem erweiterten Begriff der Mechanik entsprechen, so sind als analytisch aequivalent alle diejenigen Aufgaben anzusehen, welche auf dasselbe System von Differentialgleichungen der Bewegung führen. Dafür dass zwei solche Probleme analytisch aequivalent sind, ist im allgemeinen (abgesehen von jenen singulären Fällen) nothwendig und hinreichend, dass sie auf dieselben Differentialformen:

$$U' = \sum_{\varkappa} P_\varkappa \delta p_\varkappa, \quad 2Tdt^2 = \sum_{\varkappa} a_{\varkappa\lambda} dp_\varkappa dp_\lambda$$

führen. Unter den unendlich vielen analytisch aequivalenten dynamischen Aufgaben giebt es dann immer eine, deren mechanische Formulirung am einfachsten ist, nämlich die Aufgabe, welche besagt, dass die Bewegung *eines* Punktes der Masse 1 bestimmt werden soll, welcher stets in einer n-fachen Mannigfaltigkeit bleibt, deren Linienelement ds durch Gleichung (8.) gegeben wird, während der Ausdruck der virtuellen Arbeit durch U' dargestellt ist. Aber auch in jenen singulären Fällen ist eine solche Zurückführung möglich; nur kann es dann eintreten, dass mehr als ein *Normalproblem* der soeben charakterisirten Art existirt.

Bei dieser Anschauung gewinnen auch die Gleichungen

$$(A.) \qquad \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{Bmatrix}_w = \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{Bmatrix}_a,$$

auf deren Discussion nunmehr alles ankommt, eine einfache dynamische Bedeutung. Sie lassen sich auffassen als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System von Differentialgleichungen:

$$(a^0.) \qquad \frac{d^2p_\mu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{Bmatrix}_a \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt}$$

identisch ist mit dem System:

$$(w^0.) \qquad \frac{d^2p_\mu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \begin{Bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{Bmatrix}_w \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt}.$$

Das erste System lässt sich aber ansehen als das System der Differentialgleichungen der *geodätischen Linien* der n-fachen Mannigfaltigkeit, deren Linienelement ds durch Gleichung (8.) gegeben wird, und die Frage nach der allgemeinsten Lösung der Gleichung (A.) bei gegebenen $a_{\varkappa\lambda}$ ist daher identisch mit der nach der allgemeinsten Form des Linienelementes einer n-fachen Mannigfaltigkeit, deren geodätische Linien den Differentialgleichungen $(a^0.)$ genügen. Da diese Lösung, wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden wird, im allgemeinen $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$ ist, so ergiebt sich damit zugleich, dass — abgesehen von den singulären Fällen, für welche die Entscheidung dahin gestellt bleiben muss — durch die Differentialgleichungen der geodätischen Linien, also auch durch die allgemeinen Gleichungen dieser Linien, das Linienelement der betreffenden n-fachen Mannigfaltigkeit bis auf einen constanten multiplicativen Factor eindeutig bestimmt ist. Dass das Umgekehrte gilt, dass n-fache Mannigfaltigkeiten, deren Linienelemente übereinstimmen, auch zu denselben allgemeinen Gleichungen der geodätischen Linien führen, ist unmittelbar ersichtlich.

III.

Untersuchung des Systems partieller Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{matrix}\right\}_w = \left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{matrix}\right\}_a \qquad (\varkappa,\ \lambda,\ \nu = 1, 2, \dots n).$$

Gegeben sei ein symmetrisches System von Functionen der n unabhängigen Veränderlichen $p_1, p_2, \dots p_n$

$$a_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa,\ \lambda = 1, 2, \dots n),$$

von dem nur vorausgesetzt wird, dass die Hauptsubdeterminanten nicht identisch verschwinden. Gesucht wird das allgemeinste System derselben Beschaffenheit

$$w_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa,\ \lambda = 1, 2, \dots n),$$

welches zu dem gegebenen in der Beziehung steht, dass

$$(A.) \qquad \left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{matrix}\right\}_w = \left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{matrix}\right\}_a \qquad (\varkappa,\ \lambda,\ \nu = 1, 2, \dots n),$$

ist. Die Frage nach einem solchen System $w_{\varkappa\lambda}$ hat einen Sinn, weil $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$, wo c eine Constante bedeutet, eine Lösung von $(A.)$ ist.

Für die Untersuchung der Gleichungen $(A.)$ ist von der grössten Wichtigkeit, dass sie sich ersetzen lassen durch ein vollständig gleichbedeutendes System homogener linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die $w_{\varkappa\lambda}$. Diese Umformung beruht auf der von Herrn *Christoffel* (a. a. O. S. 50) angegebenen Identität

$$(9.) \qquad \begin{bmatrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}_w + \begin{bmatrix}\mu\lambda\\ \varkappa\end{bmatrix}_w = \frac{\partial w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu};$$

diese Identität ist übrigens nur ein specieller Fall einer allgemeineren von Herrn *Lipschitz* (a. a. O. Bd. 70, Formel (11.)) entdeckten. Mit Hülfe der Definition der $\left\{ {\varkappa\lambda \atop \mu} \right\}_w$ erschliesst man aus Gleichung (9.), dass mit den Gleichungen (A.) auch die Gleichungen bestehen:

$$(A^*.)\qquad \frac{\partial w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu} = \sum_\sigma \left\{ {\mu\,\varkappa \atop \sigma} \right\}_a w_{\sigma\lambda} + \sum_\sigma \left\{ {\mu\,\lambda \atop \sigma} \right\}_a w_{\sigma\varkappa}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt aber, dass aus den Gleichungen (A^*.) umgekehrt wieder die Gleichungen (A.) hervorgehen, dass diese also durch die Gleichungen (A^*.) vollständig ersetzt werden.

Die Gleichungen (A^*.) erledigen die Frage nach der allgemeinsten Lösung der Gleichungen (A.) ganz direct in dem schon Seite 328 erwähnten besonderen Falle, dass alle $a_{\varkappa\lambda}$ Constanten sind. Dann wird nämlich

$$\frac{\partial w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \dots n),$$

sodass die oben angegebene Lösung $w_{\varkappa\lambda} = \text{const.}$ sogar die allgemeinste Lösung der Gleichungen (A.) für diesen Specialfall ist, welcher daher fortab als erledigt gelten kann.

Sollen die Gleichungen (A^*.) mit einander verträglich sein, so muss die partielle Ableitung von $\frac{\partial w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}$ nach p_ν übereinstimmen mit der partiellen Ableitung von $\frac{\partial w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\nu}$ nach p_μ. Man erkennt leicht, dass diese ***Integrabilitätsbedingungen*** auftreten in der Form linearer homogener Relationen zwischen den $w_{\varkappa\lambda}$. Die Coefficienten in diesen Relationen stehen in enger Beziehung zu den Coefficienten der von Herrn *Lipschitz* (dieses Journal Bd. 70, S. 84, Formel (34.)) aufgestellten quadrilinearen Form Ψ, welche eine Covariante der quadratischen Differentialform

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda$$

ist, und deren identisches Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass diese Form sich in eine Form mit constanten Coefficienten transformiren lässt. Dieselben Ausdrücke, bis auf einen constanten Factor, treten aber auch in anderem Zusammenhange auf bei Herrn *Christoffel* (ebendaselbst S. 54, Formel (13)), wo sie symbolisch mit $(\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu)$ bezeichnet werden. Da dieses Zeichen auch von Herrn *Lipschitz*, jedoch in ganz anderer Bedeutung gebraucht wird, so halte ich eine andere Bezeichnung für zweckmässig und setze:

$$(10.)\quad \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a = \frac{\partial}{\partial p_\nu}\begin{bmatrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}_a - \frac{\partial}{\partial p_\mu}\begin{bmatrix}\nu\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}_a + \sum_{\alpha,\beta} a'_{\alpha\beta}\left(\begin{bmatrix}\varkappa\nu\\ \alpha\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}\mu\lambda\\ \beta\end{bmatrix}_a - \begin{bmatrix}\varkappa\mu\\ \alpha\end{bmatrix}_a\begin{bmatrix}\nu\lambda\\ \beta\end{bmatrix}_a\right).$$

Dann ist:

$$(11.)\quad \Psi = -2\sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a du_\varkappa \delta u_\lambda dv_\mu \delta v_\nu,$$

wo die u_ϱ und v_σ neue Variabeln bedeuten. Aehnlich wie durch Gleichung (6.) aus den Ausdrücken $\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a$ die Ausdrücke $\begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}_a$ hergeleitet wurden, sollen aus den $\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a$ neue Ausdrücke hergeleitet werden durch:

$$(12.)\quad \sum_\sigma \begin{bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a a'_{\sigma\lambda} = \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a.$$

Alsdann ist umgekehrt:

$$(13.)\quad \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a a_{\sigma\lambda} = \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a,$$

sodass aus dem Verschwinden der $\begin{bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a$ auch das Verschwinden der $\begin{Bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a$ und umgekehrt folgt.

Vergleicht man Formel (13.) mit der von Herrn *Christoffel* (a. a. O. S. 53) abgeleiteten:

$$\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a = \sum_\sigma a_{\sigma\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial p_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\varkappa\\ \sigma\end{Bmatrix}_a - \frac{\partial}{\partial p_\mu}\begin{Bmatrix}\nu\varkappa\\ \sigma\end{Bmatrix}_a + \sum_\varrho\left(\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \varrho\end{Bmatrix}_a\begin{Bmatrix}\varrho\nu\\ \sigma\end{Bmatrix}_a - \begin{Bmatrix}\varkappa\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}_a\begin{Bmatrix}\varrho\mu\\ \sigma\end{Bmatrix}_a\right)\right\},$$

so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichungen gelten:

$$(14.)\quad \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a = \frac{\partial}{\partial p_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{Bmatrix}_a - \frac{\partial}{\partial p_\mu}\begin{Bmatrix}\nu\varkappa\\ \lambda\end{Bmatrix}_a + \sum_\varrho\left(\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \varrho\end{Bmatrix}_a\begin{Bmatrix}\varrho\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}_a - \begin{Bmatrix}\varkappa\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}_a\begin{Bmatrix}\varrho\mu\\ \lambda\end{Bmatrix}_a\right).$$

Bildet man nunmehr die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} - \frac{\partial^2 w_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\nu \partial p_\mu} = 0,$$

so erhält man nach einigen Reductionen:

$$(J.)\quad \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a w_{\sigma\lambda} + \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\lambda\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a w_{\sigma\varkappa} = 0^{*}).$$

---

*) Die Gleichungen (*J.*) bestehen identisch, wenn alle $\begin{Bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{Bmatrix}_a$ identisch verschwinden. Allein dann verschwinden auch alle $\begin{bmatrix}\varkappa\sigma\\ \mu\nu\end{bmatrix}_a$ identisch, also ist $\Psi = 0$, und man kann von vorn herein annehmen, dass die $a_{\varkappa\lambda}$ Constanten sind. Gerade dieser Fall ist aber schon erledigt worden.

Setzt man $\lambda = \varkappa$ und giebt $\varkappa$ einen festen Werth aus der Reihe 1, 2, 3, ... n, während μ und ν beliebig bleiben, also gleich den $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Combinationen zu zweien der n Zahlen 1, 2, ... n gesetzt werden dürfen, so erhält man die unter $(J.)$ enthaltene Gruppe von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen:

$$(J_\varkappa.) \qquad \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\varkappa\ \sigma\\ \mu\ \nu\end{Bmatrix}_a w_{\sigma\varkappa} = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1, 2, \dots n).$$

Diese Gleichungen lassen sich ansehen als lineare homogene Gleichungen für die Unbekannten $w_{1\varkappa}, w_{2\varkappa}, \dots w_{n\varkappa}$. Ihre Anzahl beträgt für $n = 2, 3, 4$ beziehlich 1, 3, 6. Durch $w_{\sigma\varkappa} = a_{\sigma\varkappa}$ sind die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ identisch befriedigt. Da nun $a_{\varkappa\varkappa}$ von Null verschieden ist, so kann man den Gleichungen $(J_\varkappa.)$ genügen, ohne alle n Grössen $w_{\sigma\varkappa}$ gleich Null zu setzen; folglich ist der Rang des Systems

$$(S_\varkappa.) \qquad \begin{Bmatrix}\varkappa\ \sigma\\ \mu\ \nu\end{Bmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \dots n\\ \mu,\ \nu = 1, 2, \dots n\end{pmatrix}$$

nothwendig kleiner als n.

Ist der Rang dieses Systems genau gleich $n-1$, so sind die $w_{\sigma\varkappa}$ durch die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ bis auf einen willkürlichen multiplicativen Factor bestimmt. Man genügt diesen Gleichungen aber durch $w_{\sigma\varkappa} = a_{\sigma\varkappa}$, mithin ist ihre allgemeinste Lösung:

$$w_{\sigma\varkappa} = z_\varkappa a_{\sigma\varkappa},$$

wo $z_\varkappa$ eine noch unbestimmte Function der $p_1, p_2, \dots p_n$ bezeichnet. Um diese Function zu bestimmen, setze ich diese Ausdrücke für die $w_{\sigma\varkappa}$ ein in die Gleichungen des Systems $(A^*.)$:

$$(A_\varkappa^*.) \qquad \frac{\partial w_{\varkappa\varkappa}}{\partial p_\mu} = 2 \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\mu\ \varkappa\\ \sigma\end{Bmatrix}_a w_{\sigma\varkappa} \qquad (\mu = 1, 2, \dots n).$$

Dann ergiebt sich:

$$a_{\varkappa\varkappa} \frac{\partial z_\varkappa}{\partial p_\mu} = -z_\varkappa \left(\frac{\partial a_{\varkappa\varkappa}}{\partial p_\mu} - 2 \sum_\sigma \begin{Bmatrix}\mu\ \varkappa\\ \sigma\end{Bmatrix}_a a_{\sigma\varkappa} \right).$$

Der Factor von $z_\varkappa$ verschwindet aber, weil man den Gleichungen $(A_\varkappa^*.)$ durch $w_{\sigma\varkappa} = a_{\sigma\varkappa}$ genügt; folglich ist

$$a_{\varkappa\varkappa} \frac{\partial z_\varkappa}{\partial p_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots n),$$

und, da $a_{\varkappa\varkappa}$ nicht identisch verschwindet, $\dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial p_\mu} = 0$, also $z_\varkappa$ gleich einer Constanten $C_\varkappa$. Ist der Rang des Systems $(S_\varkappa.)$ gleich $n-1$, so sind also die $w_{1\varkappa}, w_{2\varkappa}, \dots w_{n\varkappa}$ durch die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ in Verbindung mit den Gleichungen $(A_\varkappa^*.)$ bis auf die multiplicative Constante $C_\varkappa$ bestimmt.

Dies gilt für alle n Gruppen $(J_1.)$, ... $(J_n.)$, und ist der Rang der Systeme $(S_1.)$, ... $(S_n.)$ gleich $n-1$, so sind alle $w_{\mu\nu}$ bis auf multiplicative Constanten $C_\varkappa$ bestimmt. Jetzt lässt sich aber zeigen, dass unter dieser Voraussetzung nothwendig die n Constanten $C_\varkappa$ alle denselben Werth c haben müssen. Es ist nämlich

$$w_{\varkappa\lambda} = w_{\lambda\varkappa} = C_\varkappa a_{\varkappa\lambda} = C_\lambda a_{\lambda\varkappa} = C_\lambda a_{\varkappa\lambda},$$

also

$$(C_\varkappa - C_\lambda) a_{\varkappa\lambda} = 0.$$

Hieraus folgt $C_\varkappa = C_\lambda$, ausser wenn $a_{\varkappa\lambda} = 0$ ist. Die Behauptung ist also bewiesen, es sei denn, dass gerade für einen festen Werth von $\varkappa$

$$a_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n)$$

ist, ein Fall, der einer besonderen Untersuchung bedarf. Er findet übrigens statt, und sogar für jedes $\varkappa$, wenn, was häufig vorkommt, die betrachtete Differentialform nur die Quadrate der Differentiale dp_1, dp_2, ... dp_n enthält.

Die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ sind jedenfalls befriedigt durch $w_{\sigma\varkappa} = a_{\sigma\varkappa}$, also in dem hier betrachteten Fall durch:

$$w_{1\varkappa} = 0, \; \dots \; w_{\varkappa-1,\varkappa} = 0, \quad w_{\varkappa\varkappa} = a_{\varkappa\varkappa}, \quad w_{\varkappa+1,\varkappa} = 0, \; \dots \; w_{n\varkappa} = 0.$$

Setzt man diese Werthe der $w_{\sigma\varkappa}$ in $(J_\varkappa.)$ ein, so kommt

$$\begin{Bmatrix} \varkappa\ \varkappa \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a a_{\varkappa\varkappa} = 0,$$

sodass in diesem Falle $\begin{Bmatrix} \varkappa\ \varkappa \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a = 0$ sein muss, und zwar für alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Werthepaare μ, ν. Die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ sind daher nur erfüllbar durch

$$w_{\sigma\varkappa} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n),$$

während $w_{\varkappa\varkappa}$ in ihnen gar nicht auftritt, also ganz unbestimmt bleibt. Die Gleichungen $(A_\varkappa^*.)$ ergeben aber, wie vorher, dass $w_{\varkappa\varkappa} = C_\varkappa a_{\varkappa\varkappa}$ ist.

Da die Gleichungen $(J_\varkappa.)$ und $(A_\varkappa^*.)$ verbraucht sind, muss man seine Zuflucht zu den anderen Gleichungen des Systems $(J.)$ nehmen, in denen $\varkappa$ den hier in Betracht kommenden festen Werth hat. Da $w_{\sigma\varkappa} = 0$ ist für $\sigma = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n$, so sind dies die Gleichungen:

$$\sum_\sigma \begin{Bmatrix} \varkappa\ \sigma \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a w_{\sigma\lambda} + \begin{Bmatrix} \lambda\ \varkappa \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a w_{\varkappa\varkappa} = 0 \qquad \left(\begin{matrix}\lambda = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n \\ \mu, \nu = 1, 2, \dots n\end{matrix}\right).$$

Daher ist:

$$C_\lambda \sum_\sigma \begin{Bmatrix} \varkappa\ \sigma \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a a_{\sigma\lambda} + C_\varkappa \begin{Bmatrix} \lambda\ \varkappa \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}_a a_{\varkappa\varkappa} = 0.$$

Nun besteht identisch:

$$\sum_\sigma \begin{Bmatrix} \varkappa\,\sigma \\ \mu\,\nu \end{Bmatrix}_a a_{\sigma\lambda} + \begin{Bmatrix} \lambda\,\varkappa \\ \mu\,\nu \end{Bmatrix}_a a_{\varkappa\varkappa} = 0,$$

mithin muss

$$(C_\lambda - C_\varkappa) \sum_\sigma \begin{Bmatrix} \varkappa\,\sigma \\ \mu\,\nu \end{Bmatrix}_a a_{\sigma\lambda} = 0$$

sein. Hieraus aber erschliesst man $C_\lambda = C_\varkappa$ für $\lambda = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n$; denn es ist unmöglich, dass *alle* Ausdrücke

$$(15.) \qquad \sum_\sigma \begin{Bmatrix} \varkappa\,\sigma \\ \mu\,\nu \end{Bmatrix} a_{\sigma\lambda} = 0 \qquad {\scriptstyle (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots\ n)}$$

sind. Das System dieser Gleichungen geht nämlich in $(J_\varkappa.)$ über, wenn man $a_{\sigma\lambda}$ durch $w_{\sigma\varkappa}$ ersetzt, folglich ist seine allgemeinste Lösung

$$a_{1\lambda} = 0, \ \dots\ a_{\varkappa-1,\lambda} = 0, \quad a_{\varkappa+1,\lambda} = 0, \ \dots\ a_{n\lambda} = 0.$$

Das Bestehen aller Gleichungen (15.) würde also, da λ von $\varkappa$ verschieden ist, $a_{\lambda\lambda} = 0$ zur Folge haben, was gegen die Voraussetzung ist.

Hiermit ist folgendes Resultat gewonnen:

Wenn jedes der n Systeme:

$$(S_\varkappa.) \qquad \begin{Bmatrix} \varkappa\,\sigma \\ \mu\,\nu \end{Bmatrix}_a \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1,\ 2,\ \dots\ n \\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots\ n \end{pmatrix}$$

genau den Rang $n-1$ hat, so ist die allgemeinste Lösung von

$$(A.) \qquad \begin{Bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \nu \end{Bmatrix}_w = \begin{Bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \nu \end{Bmatrix}_w \qquad {\scriptstyle (\varkappa,\ \lambda,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots\ n)}$$

gegeben durch:

$$w_{\chi\lambda} = c a_{\chi\lambda} \qquad {\scriptstyle (\chi,\ \lambda = 1,\ 2,\ \dots\ n)},$$

wo c eine Constante bedeutet.

Es wird daher alles darauf ankommen, zu zeigen, dass die Forderung, der Rang eines dieser n Systeme sei kleiner als $n-1$, eine wirkliche Beschränkung der Wahl der Functionen $a_{\chi\lambda}$ bedeutet, dass also nicht etwa für *jedes* System $a_{\chi\lambda}$ mindestens eins der Systeme $(S_\varkappa.)$ von selbst einen Rang kleiner als $n-1$ hat.

Zu diesem Zwecke würde es genügen, nachzuweisen, dass, wenn die $a_{\varrho\sigma}$ als willkürliche Functionen angesehen werden, mindestens eine der Unterdeterminanten von $(n-1)^2$ Elementen jedes der Systeme $(S_\varkappa.)$ von Null verschieden ist; allein mit demselben Aufwand von Rechnung lässt sich zeigen, dass, wenn man eine beliebige Gleichung aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$(J_{\varkappa}.)$ herausgreift, man ihr stets $n-2$ weitere dieser Gleichungen so zuordnen kann, dass unter jener Voraussetzung die Verhältnisse der $w_{1\varkappa}, w_{2\varkappa}, \dots w_{n\varkappa}$ durch diese $n-1$ Gleichungen vollständig bestimmt sind.

Werden die $a_{\varrho\sigma}$ als willkürliche Functionen der p_τ angesehen, so sind ihre Ableitungen nach diesen Variabeln als neue willkürliche Functionen anzusehen. Daher kann die Determinante:

$$\left|\begin{Bmatrix} \varkappa & \sigma_\beta \\ \mu_\alpha & \nu_\alpha \end{Bmatrix}\right| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n-1)$$

nur dann identisch verschwinden, wenn das Aggregat der Glieder dieser Determinante, welche die zweiten Ableitungen der $a_{\varrho\sigma}$ enthalten, für sich verschwindet. Es muss also mit jener Determinante die Determinante:

$$\left|\sum_\lambda \left(\frac{\partial^2 a_{\lambda\mu_\alpha}}{\partial p_\varkappa \partial p_{\nu_\alpha}} + \frac{\partial^2 a_{\varkappa\nu_\alpha}}{\partial p_\lambda \partial p_{\mu_\alpha}} - \frac{\partial^2 a_{\lambda\nu_\alpha}}{\partial p_\varkappa \partial p_{\mu_\alpha}} - \frac{\partial^2 a_{\varkappa\mu_\alpha}}{\partial p_\lambda \partial p_{\nu_\alpha}}\right) a'_{\lambda\sigma_\beta}\right| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n-1)$$

identisch verschwinden. Da in jeder dieser $(n-1)^2$ Summen von n Gliedern das Glied für $\lambda = \varkappa$ identisch verschwindet, so ist diese Determinante gleich dem Product:

$$\left|\frac{\partial^2 a_{\lambda'\mu_\alpha}}{\partial p_\varkappa \partial p_{\nu_\alpha}} + \frac{\partial^2 a_{\varkappa\nu_\alpha}}{\partial p_{\lambda'} \partial p_{\mu_\alpha}} - \frac{\partial^2 a_{\lambda'\nu_\alpha}}{\partial p_\varkappa \partial p_{\mu_\alpha}} - \frac{\partial^2 a_{\varkappa\mu_\alpha}}{\partial p_{\lambda'} \partial p_{\nu_\alpha}}\right| \cdot \left|a'_{\lambda'\sigma_\beta}\right| \quad \begin{pmatrix} \lambda' & = 1, 2, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots n \\ \alpha, \beta & = 1, 2, \dots n-1 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Factor kann, solange $a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}$ als willkürliche Grössen angesehen werden, nicht identisch verschwinden. Aber auch der zweite Factor ist von Null verschieden. Dies erkennt man so.

Betrachtet man zuerst die Grössen, die in einem Elemente der Determinante vorkommen, — wobei zu beachten ist, dass die Indices von den $a_{\varrho\sigma}$, wie die Reihenfolge der Differentiationen ohne Aenderung des Werthes vertauscht werden dürfen —, so erkennt man, dass der erste Term nur gleich dem zweiten, der dritte nur gleich dem vierten werden kann und umgekehrt, und dass dies beziehungsweise für $\mu_\alpha = \varkappa$, $\nu_\alpha = \lambda$, und $\nu_\alpha = \varkappa$, $\mu_\alpha = \lambda$ eintritt. Jetzt wähle man $n-1$ verschiedene Werthepaare μ, ν folgendermassen. Es habe μ für alle denselben Werth μ_0, und es sei $\nu = 1, 2, \dots \mu_0-1, \mu_0+1, \dots n$. Da $\mu_0 = 1, 2, \dots n$ sein kann, so erhält man auf diese Weise n mal $n-1$ Paare μ, ν und erkennt leicht, dass diese $n(n-1)$ Paare μ, ν alle möglichen Paare μ, ν, und zwar jedes zweimal, enthalten. Ist daher eine beliebige Gleichung des Systems $(J_\varkappa.)$ gegeben, so kann man ihr stets $n-2$ weitere Gleichungen so zuordnen, dass μ constant bleibt. Von diesen

$n-1$ Gleichungen lässt sich nun zeigen, dass die zugehörigen n Unterdeterminanten von $(n-1)^2$ Elementen, welche die Verhältnisse der $w_{\sigma\varkappa}$ bestimmen, wenn die $a_{\varrho\sigma}$ willkürliche Functionen sind, nicht identisch verschwinden.

Zu diesem Zwecke greife ich heraus die Grösse

$$\frac{\partial^2 a_{\lambda'\mu_0}}{\partial p_\varkappa \partial p_\nu},$$

wo λ' und ν irgend welche festen Werthe haben (nur ist $\lambda' \gtrless \varkappa$, $\nu \gtrless \mu_0$), und frage, wo diese Grösse in der Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 a_{\lambda'\mu_0}}{\partial p_\varkappa \partial p_\nu} + \frac{\partial^2 a_{\varkappa\nu}}{\partial p_{\lambda'} \partial p_{\mu_0}} - \frac{\partial^2 a_{\lambda'\nu}}{\partial p_\varkappa \partial p_{\mu_0}} - \frac{\partial^2 a_{\varkappa\mu_0}}{\partial p_{\lambda'} \partial p_\nu} \right| \qquad \begin{pmatrix} \lambda' = 1, 2, \dots \varkappa-1, \ \varkappa+1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \mu_0-1, \ \mu_0+1, \dots n \end{pmatrix}$$

vorkommt. Man erkennt leicht, dass sie nur vorkommt in *einem* Elemente der Determinante und in diesem Elemente im allgemeinen einmal; nur für $\mu_0 = \varkappa$, $\lambda' = \nu$ kommt sie darin zweimal vor.

Denkt man sich jetzt die Determinante nach den Grössen

$$\frac{\partial^2 a_{\lambda'\mu_0}}{\partial p_\varkappa \partial p_\nu} \qquad \begin{pmatrix} \lambda' = 1, 2, \dots \varkappa-1, \ \varkappa+1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \mu_0-1, \ \mu_0+1, \dots n \end{pmatrix}$$

entwickelt, so kann sie nur verschwinden, wenn die Aggregate gleicher Dimension in diesen Grössen identisch verschwinden, also im besonderen, wenn die Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 a_{\lambda'\mu_0}}{\partial p_\varkappa \partial p_\nu} \right|$$

dieser Grössen identisch verschwindet. Diese enthält aber, wenn die $a_{\varrho\sigma}$ willkürliche Functionen sind, $(n-1)^2$ willkürliche Functionen.

Hiermit ist der Beweis vollständig erbracht und die Untersuchung soweit geführt worden, wie es an dieser Stelle geschehen sollte; es möge nur noch bemerkt werden, dass die Discussion der Fälle, wo die n Systeme $(S_\varkappa)$ *nicht* alle vom Range $n-1$ sind, erhebliche Schwierigkeiten zu bieten scheint.

IV.

Einige Anwendungen des Begriffes der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme auf bestimmte Aufgaben der Mechanik.

Es dürfte zweckmässig sein, die Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte an dem einfachsten Fall der dynamischen Probleme, für die $n = 2$ ist, zu erläutern.

Es sei also:

$$U' = P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left[a_{11}\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dp_1}{dt}\frac{dp_2}{dt} + a_{22}\left(\frac{dp_2}{dt}\right)^2\right].$$

Hieraus folgt, dass jede dynamische Aufgabe zweiter Ordnung analytisch äquivalent ist der Bewegung *eines* Punktes auf einer Fläche, deren Linienelement ds gegeben wird durch:

$$ds^2 = a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1 dp_2 + a_{22}dp_2^2.$$

Zur analytischen Aequivalenz von zwei Problemen dieser Art ist nach dem Vorhergehenden hinreichend und, gewisse singuläre Fälle ausgenommen, auch nothwendig, dass erstens die beiden zugehörigen Flächen auf einander abwickelbar sind, und dass zweitens für entsprechende Punkte dieser beiden Flächen U' immer denselben Werth hat.

Diese Bedingung ist unter allen Umständen hinreichend. Man hat daher den Satz:

> Biegt man eine Fläche, auf welcher sich ein materieller Punkt bewegt, und lässt dabei auf ihn Kräfte wirken, deren Tangentialcomponenten für jeden Punkt p_1, p_2 der Fläche immer dieselben Functionen von p_1, p_2 sind, so durchläuft der bewegte Punkt bei denselben Anfangsbedingungen auf den gebogenen Flächen die Bahnen, welche aus der ursprünglichen Bahn durch die Biegung der Fläche hervorgehen; und zwar so, dass zu entsprechenden Punkten p_1, p_2 immer derselbe Werth der Zeit gehört.

Schon *Euler* hat in seiner Mechanik (Mechanica sive motus scientia analytice exposita. Petersburg 1736. T. II. § 869, 870) dieses *Princip der Biegungen* angewandt, indem er dadurch das Problem der Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreiscylinder zurückführte auf die entsprechende Bewegung in der Ebene; die gleiche Zurückführung ist übrigens bei jedem Cylinder möglich. Bei *Liouville* (*Liouville*s Journal, T. XII (1846) S. 358) findet sich das Princip der Biegungen in den Worten ausgesprochen: „que des formules d'analyse identiques entre elles serviront pour le mouvement d'un point sur deux surfaces susceptibles d'être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. Herr *Bertrand* bemerkt (*Liouville*s Journal, T. XVII (1851) S. 121), dass, wenn die Differentialgleichungen der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche gewisse vorgeschriebene Integrale besitzen, auch die durch Biegung daraus entstandenen Flächen zu denselben Integralen führen. Für die Flächen vom Krümmungsmaasse Null hat Herr *Wittenbauer* (Berichte der Wiener Akademie, Bd. LXXI. 1880) die Invarianz der Bahnen bei Verbiegungen durch rein geometrische Betrachtungen erschlossen. Endlich habe ich in meiner Inauguraldissertation (Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. Berlin 1885.) jenen Satz in der oben angegebenen Form, nur mit der unnöthigen Einschränkung, dass U' ein totales Differential sei, ausgesprochen und auf seine Bedeutung für die Lösung dynamischer Aufgaben hingewiesen.

Das Princip der Biegungen steht in engem Zusammenhange mit der Theorie der *geodätischen Krümmung* der Curven auf einer Fläche und lässt die Invarianz dieser Krümmung bei Biegungen, welche *Minding* (Dieses Journal, Bd. 6, S. 159: „Bemerkung über die Abwicklung krummer Linien von Flächen". (1830)) zuerst dargethan hat, unmittelbar erkennen. Auf der betrachteten Curve bewege sich vom Punkte p_1, p_2 oder A aus ein materieller Punkt der Masse 1 und durchlaufe im Zeitelemente dt das Bogenelement $AB = ds$; dann wird er im folgenden Zeitelemente dt ein Bogenelement BC der Curve durchlaufen, das sich von ds nur um Grössen zweiter Ordnung unterscheidet. Es sei noch BC' das Bogenelement der geodätischen Fortsetzung von AB, welches der Punkt, sich selbst überlassen, im zweiten Zeitelemente dt zurücklegen würde, und welches auch von ds nur um Grössen zweiter Ordnung abweicht. Der Winkel CBC' sei gleich $d\gamma$. Dann ist mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen erster Ordnung die geodätische Krümmung ϱ_g der Curve im Punkte B gleich $d\gamma : ds$, folglich auch gleich $CC' : ds^2$. Mithin ist ϱ_g nichts anderes als die Componente der bewegenden Kraft in der Tangentialebene der Fläche senkrecht zur Tangente der Bahn, dividirt durch das Quadrat der Geschwindigkeit an dieser Stelle der Bahn (vergl. auch den Aufsatz von Herrn *Resal*, *Liouville*s Journal, Sér. III, T. 3 (1877) S. 82 und die Bemerkung, welche Herr *O. Bonnet* ebendaselbst S. 207 macht). Biegt man nunmehr die Fläche und lässt den Punkt sich bei denselben Anfangsbedingungen und unter Einwirkung von Kräften bewegen, welche dieselben Functionen von p_1, p_2 sind, wie vorher, so wird die durch Biegung aus der gegebenen Curve entstandene Curve beschrieben; für diese Curve hat daher auch ϱ_g den alten Werth.

Jetzt denke ich mir umgekehrt zwei Flächen gegeben. Auf jeder von ihnen bewege sich ein materieller Punkt unter dem Einfluss gegebener

Kräfte. Stellt man die Differentialgleichungen der Bewegung auf und findet in beiden Fällen genau dieselben Gleichungen, so lässt sich daraus erschliessen, dass die Flächen auf einander abwickelbar sind, es sei denn, dass einer jener singulären Fälle vorliegt, welche eine besondere Untersuchung erfordern. Diese Untersuchung lässt sich aber für den Fall $n=2$ leicht durchführen. Dabei wird sich zeigen, dass das Auftreten singulärer Fälle keineswegs in einem Mangel der Untersuchungsmethode seinen Grund hat, dass vielmehr wesentliche Unterschiede in der Natur der quadratischen Differentialformen eine Scheidung von Fällen bedingen.

Jene singulären Fälle waren dadurch charakterisirt, dass nicht alle n Systeme $(S_1.)$, $(S_2.)$, ... $(S_n.)$ den Rang $n-1$ hatten. Für $n=2$ zeigt eine einfache Rechnung, dass man hat:

$$(S_1.)\qquad -\frac{a_{12}}{a}k,\quad \frac{a_{11}}{a}k,$$

$$(S_2.)\qquad -\frac{a_{22}}{a}k,\quad \frac{a_{12}}{a}k,$$

wobei k das Krümmungsmaass der quadratischen Differentialform

$$a_{11}dp_1^2+2a_{12}dp_1\,dp_2+a_{22}dp_2^2$$

bedeutet. Der Rang dieser beiden Systeme ist im allgemeinen gleich 1. Gleich Null kann er nur werden, wenn k verschwindet. Dann darf man aber von vorn herein voraussetzen, dass die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} Constanten sind. Die allgemeinste Lösung der Gleichungen $(A.)$ erhält man dann, wenn man w_{11}, w_{12}, w_{22} ebenfalls gleich (willkürlichen) Constanten setzt. Mithin hat die zweite quadratische Differentialform

$$w_{11}dp_1^2+2w_{12}dp_1\,dp_2+w_{22}dp_2^2$$

ebenfalls das Krümmungsmaass Null. Da nun alle Flächen vom Krümmungsmaasse Null auf einander abwickelbar sind, so bleibt der Schluss von der Uebereinstimmung der Differentialgleichungen der Bewegung auf die Abwickelbarkeit der Flächen richtig. Allein dieser Schluss beruht in dem regulären Falle darauf, dass, wenn die Differentialgleichungen der Bewegung identisch sind, auch die Linienelemente, welche diese Gleichungen liefern (bis auf die Constante der mechanischen Aehnlichkeit) identisch sein müssen, während er in dem singulären Fall nur dadurch ermöglicht wird, dass die an sich verschiedenen Linienelemente durch Transformation der Variabeln in einander übergeführt werden können.

Zum Schluss soll noch ein Beispiel für ein System von unendlich vielen materiellen Punkten gegeben werden, dessen Bewegung analytisch äquivalent ist der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, ein Beispiel. das ich im Winter 1887/88, angeregt durch eine Mittheilung meines verehrten Lehrers Herrn *Kronecker,* mit dem ich damals in lebhaftem Verkehr stand, untersucht habe.

Die Bewegung einer starren mit Masse belegten Geraden im Raume lässt sich zerlegen in die Bewegung der geometrischen Geraden, welche die starre Gerade enthält, und die Verschiebung dieser in jener, ist daher eine Aufgabe *fünfter* Ordnung. Die Ordnungszahl kann sich aber erniedrigen, indem Bedingungen hinzutreten. Da von vorn herein bei dieser Untersuchung Bedingungen, welche die Zeit enthalten, ausgeschlossen worden sind, so bleiben nur zwei Möglichkeiten. Entweder gestattet man die Verschiebung der starren Geraden in der geometrischen Geraden, oder verzichtet darauf. Will man eine Aufgabe *zweiter* Ordnung erhalten, so muss man daher entweder annehmen, dass die starre Gerade stets Mitglied eines *Strahlensystems* bleibt, und dass dabei ihre Lage im Strahl durch Angabe des Strahls bestimmt ist, oder dass die starre Gerade gezwungen ist, auf einer *geradlinigen Fläche* zu bleiben. Eine genauere Untersuchung wird aber zeigen, dass der zweite Fall schon im ersten enthalten und als Ausartung desselben anzusehen ist. Vorausgesetzt, dass die wirkenden Kräfte nur von den beiden Bestimmungsstücken p_1, p_2 der *starren Geraden* abhängen, sind die beiden eben angegebenen Bewegungen analytisch äquivalent der Bewegung *eines Punktes* auf gewissen Flächen. Es wird daher vor allem darauf ankommen, das Linienelement dieser Flächen herzustellen.

Handelt es sich um die Bewegung einer starren Geraden in einem Strahlensystem, so lege man der Untersuchung die Fläche zu Grunde, welche alle möglichen Lagen des Schwerpunktes der Geraden in sich begreift, und ordne jedem Punkte p_1, p_2 dieser Fläche vermöge des durch ihn gehenden Strahles einen Punkt p_1, p_2 auf der *Gauss*schen Einheitskugel zu. Das Linienelement der Schwerpunktsfläche sei ds, das zugehörige der *Gauss*schen Kugel $d\sigma$.

Jetzt hat man die lebendige Kraft T der starren Geraden zur Zeit t zu bilden. Die Schwerpunktscoordinaten zur Zeit t, bezogen auf ein rechtwinkliges im Raume festes Coordinatensystem, seien a, b, c; die Richtungscosinus der starren Geraden zu derselben Zeit α, β, γ. Bezeichnet dann

λ die Entfernung eines Punktes x, y, z der starren Geraden von ihrem Schwerpunkte, so ist:

$$x = a+\lambda\alpha, \quad y = b+\lambda\beta, \quad z = c+\lambda\gamma.$$

Die Bewegung der starren Geraden im Zeitelemente $(t \ldots t+dt)$ setzt sich zusammen aus einer Parallelverschiebung derselben, bei welcher α, β, γ ungeändert bleiben, und a, b, c sich so ändern, dass

$$da^2+db^2+dc^2 = ds^2$$

ist, und einer Drehung der starren Geraden um den Schwerpunkt, bei welcher sich nur α, β, γ und zwar so ändern, dass

$$d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2 = d\sigma^2$$

ist. Wird die Masse im Punkte x, y, z mit $\mu(\lambda)d\lambda$ bezeichnet, so ist die Masse der schweren Geraden gleich

$$\int \mu(\lambda)\,d\lambda,$$

dieses Integral darf daher gleich 1 gesetzt werden. Da $\lambda = 0$ der Schwerpunkt der Geraden ist, so muss

$$\int \lambda\mu(\lambda)\,d\lambda = 0$$

sein. Endlich wird das Trägheitsmoment der starren Geraden in Bezug auf ihren Schwerpunkt durch:

$$\int \lambda^2\mu(\lambda)\,d\lambda = \varkappa^2$$

gegeben.

Nach diesen Vorbereitungen hat man:

$$\begin{aligned} 2T &= \int \mu(\lambda)\,d\lambda \left\{ \left(\frac{da}{dt}+\lambda\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}+\lambda\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}+\lambda\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \varkappa^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

woraus folgt:

Die Bewegung der starren Geraden in dem Strahlensysteme ist analytisch äquivalent der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, deren Linienelement dS durch

$$dS^2 = ds^2+\varkappa^2 d\sigma^2$$

gegeben wird.

Lässt man nunmehr das Strahlensystem degeneriren in eine geradlinige Fläche und gleichzeitig die Schwerpunktsfläche in dieselbe geradlinige Fläche übergehen, so kommt man genau zu dem Fall der Bewegung einer starren Geraden auf einer geradlinigen Fläche. Die Strahlen ergeben aber auf der *Gauss*schen Kugel nur eine *Curve*, für einen Cylinder sogar nur einen *Punkt*. Beim Cylinder ist also $d\sigma = 0$, und mithin $dS = ds$, d. h.:

Die Bewegung einer starren Geraden auf einem Cylinder ist gegeben durch die Bewegung ihres Schwerpunktes auf dem Cylinder, wenn in diesem alle Masse der starren Geraden vereinigt wird.

Im allgemeinen Falle kann man die Bogenlänge jener Curve auf der *Gauss*schen Kugel als Variable p_2 wählen. Dann erhält man dS aus der Formel:

$$dS^2 = ds^2 + \varkappa^2 dp_2^2.$$

Die Variable p_2 hat die einfache geometrische Bedeutung, dass die Linien $p_2 = \text{const.}$ die erzeugenden Geraden der betrachteten Fläche sind. Als Variable p_1 darf man dann wählen die Länge einer solchen Geraden, gemessen von einer festen Curve auf der Fläche. Dann wird die geradlinige Fläche dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p_2) + \alpha(p_2).p_1, \\ y &= \psi(p_2) + \beta(p_2).p_1, \\ z &= \chi(p_2) + \gamma(p_2).p_1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1, \\ d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2 &= dp_2^2. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \alpha\, d\varphi + \beta\, d\psi + \gamma\, d\chi &= f dp_2, \\ d\varphi^2 + d\psi^2 + d\chi^2 &= g dp_2^2, \\ d\alpha\, d\varphi + d\beta\, d\psi + d\gamma\, d\chi &= h dp_2^2, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus diesen Gleichungen der Fläche:

$$ds^2 = dp_1^2 + 2 f dp_1 dp_2 + (g + 2 h p_1 + p_1^2) dp_2^2,$$

und es ist daher:

$$dS^2 = dp_1^2 + 2 f dp_1 dp_2 + (g + \varkappa^2 + 2 h p_1 + p_1^2) dp_2^2.$$

Betrachtet man umgekehrt die geradlinige Fläche (vergl. *Minding*, dieses Journal Bd. 18 (1836) S. 297):

$$X = \int (\cos p_2 . f - \sin p_2 . h) dp_2 + \cos p_2 . p_1,$$
$$Y = \int (\sin p_2 . f + \cos p_2 . h) dp_2 + \sin p_2 . p_1,$$
$$Z = \int \sqrt{g + \varkappa^2 - f^2 - h^2}\, dp_2,$$

so erkennt man leicht, dass das Quadrat des Linienelementes dieser Fläche genau gleich dS^2 ist, d. h.:

> Die Bewegung einer starren Geraden auf einer geradlinigen Fläche ist analytisch äquivalent der Bewegung eines Punktes auf einer zugeordneten ebenfalls geradlinigen Fläche.

Statt dieser zweiten geradlinigen Fläche darf man aber auch irgend eine durch Biegung aus ihr entstandene wählen, welche letztere keineswegs geradlinig zu sein braucht.

Setzt man im besonderen:

$$f = 0, \quad g = \text{const.}, \quad h = 0,$$

so wird:

$$ds^2 = dp_1^2 + (g + p_1^2) dp_2^2, \quad dS^2 = dp_1^2 + (g + \varkappa^2 + p_1^2) dp_2^2,$$

und es können ds und dS angesehen werden als Linienelemente der Schraubenflächen (hélicoïdes gauches):

$$x = \cos p_2 . p_1, \quad y = \sin p_2 . p_1, \quad z = \sqrt{g} . p_2$$

und:

$$X = \cos p_2 . p_1, \quad Y = \sin p_2 . p_1, \quad Z = \sqrt{g + \varkappa^2} . p_2.$$

Bekanntlich (vergl. *Minding* a. a. O. S. 365) lässt sich jede solche *Schraubenfläche* in die *Rotationsfläche einer Kettenlinie* verbiegen, wobei die erzeugenden Geraden in die Meridiane übergehen. Als zugeordnete Fläche mit dem Linienelemente ds kann man also auch wählen das Catenoid:

$$\mathfrak{X} = \sqrt{g + \varkappa^2 + p_1^2} . \cos p_2, \quad \mathfrak{Y} = \sqrt{g + \varkappa^2 + p_1^2} . \sin p_2, \quad \mathfrak{Z} = \int \frac{\sqrt{g + \varkappa^2} . dp_1}{\sqrt{g + \varkappa^2 + p_1^2}} .$$

Nun habe ich das *Jacobi*sche Problem der Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche, wenn die Kräftefunction in den Parallelkreisen constant ist, in meiner oben erwähnten Inauguraldissertation in voller Allgemeinheit gelöst*). Damit ist aber nach dem Principe der Biegungen auch die Bewegung eines

---

*) Im dritten Abschnitt findet man eine Zusammenstellung der zahlreichen Litteratur über diesen Gegenstand.

Punktes auf einer Schraubenfläche erledigt, wenn nur die Kräftefunction in den orthogonalen Trajectorien der erzeugenden Geraden constant, also in der hier angewandten Bezeichnung eine Function von p_2 allein ist. Folglich ist auch die Bewegung einer starren Geraden auf einer Schraubenfläche, wenn die Kräftefunction allein von p_2 abhängt, als bekannt anzusehen.

Herr *Fernbach* hat in seiner Inauguraldissertation (Ueber die Bewegung einer homogen mit Masse belegten starren Geraden auf einer geradlinigen Fläche. Halle 1887.) die Bewegung einer homogen mit Masse belegten starren Geraden auf einem *Kegel* untersucht, dessen Scheitel die starre Gerade anzieht. Diese Bewegung ist ein besonderer Fall der eben erwähnten Bewegung auf einer Schraubenfläche und konnte daher nur auf einen Specialfall der von mir allgemein discutirten Differentialgleichung führen; so erklärt es sich, dass Herr *Fernbach* den vierten Abschnitt meiner Inauguraldissertation fast wortgetreu in die seinige übernehmen konnte.

Auch die übrigen Fälle, in denen die Bewegung einer starren Geraden auf einer geradlinigen Fläche untersucht worden ist, lassen eine ähnliche Behandlung zu.

Die Bewegung einer schweren starren Geraden auf einem *parabolischen Cylinder,* welche Herr *Lüttich* (Inauguraldissertation. Jena 1883.) mit grossem Aufwand von Rechnung behandelt hat, führt man so unmittelbar auf die elementare parabolische Wurfbewegung zurück.

Herr *Tuphorn* (Inauguraldissertation. Halle 1883) untersucht die Bewegung einer schweren starren Geraden auf einem verticalen *einschaligen Rotationshyperboloid.* Ist die Gleichung dieser Fläche:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2(\lambda^2-1)} = 1 \qquad (\lambda > 1),$$

so darf man setzen:

$$x = -a\cos\lambda p_2+\frac{1}{\lambda}\sin\lambda p_2.p_1,$$

$$y = +a\sin\lambda p_2+\frac{1}{\lambda}\cos\lambda p_2.p_1,$$

$$z = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-1}.p_1.$$

Dann wird das Quadrat des Linienelementes dieser Fläche:

$$ds^2 = dp_1^2+2a\,dp_1dp_2+(a^2\lambda^2+p_1^2)dp_2^2,$$

und das Quadrat des Linienelementes der zugeordneten Fläche ist:

$$dS^2 = dp_1^2+2a\,dp_1dp_2+(a^2\lambda^2+\varkappa^2+p_1^2)dp_2^2;$$

als zugeordnete Fläche kann man also wählen ebenfalls ein einschaliges Rotationshyperboloid, nämlich dasjenige, in dem das λ^2 der ersten Fläche durch

$$\lambda^2 + \frac{\varkappa^2}{a^2}$$

ersetzt ist.

Die Bewegung eines schweren Punktes auf einem solchen verticalen Rotationshyperboloid fällt aber ebenfalls unter die in meiner Inauguraldissertation behandelten Bewegungen.