Ueber eine Stelle in *Jacobis* Aufsatz „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes".

(Von *L. Kronecker.*)

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn *Weierstrass.*)

Ich habe von Herrn *Cayley* eine Zuschrift erhalten, in welcher er darauf aufmerksam macht, dass an einer Stelle in *Jacobis* Aufsatz „*Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*" der Text augenscheinlich verdorben ist. Der erste Satz des Abschnittes, welcher die Ueberschrift trägt „*Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt*" lautet nämlich in dem Originalabdruck wie folgt*):

„*Sint elementa quinque proposita* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, *ac designemus per symbolum*

$$(1\,2\,3\,4\,5)$$

functionem elementorum rationalem, quae et immutata manet, si elementa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *eodem ordine, quo ea exhibemus, commutamus respective cum his*

$$x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_1,$$

et cum his

$$x_5,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4."$$

Hierzu bemerkt Herr *Cayley*, dass aus der Unveränderlichkeit der Function (1 2 3 4 5) bei der ersten Substitution offenbar die Unveränderlichkeit bei der zweiten Substitution von selbst folge, dass aber doch eine Verbesserung der Stelle nicht, wie es beim Abdruck im dritten Bande von *Jacobis* gesammelten Werken (S. 276) versucht worden, durch Weglassung der zweiten Substitution sondern dadurch zu erreichen sei, dass in der Angabe der zweiten Substitution anstatt x_5, x_1, x_2, x_3, x_4 vielmehr

$$x_1,\quad x_5,\quad x_4,\quad x_3,\quad x_2$$

gesetzt werde.

---

*) Dieses Journal, Bd. XIII, S. 345.

In ähnlicher Weise war, wie ich aus Ihren eigenen Mittheilungen weiss, für den Abdruck in *Jacobis* gesammelten Werken eine Veränderung in der Angabe der zweiten Substitution, nicht aber deren Weglassung, beabsichtigt. Doch ist es eben diese auf einem blossen Versehen beruhende Weglassung, durch welche bei Herrn *Runge* die Meinung entstanden ist*), *Jacobi* habe mit (1 2 3 4 5) „cyklische“ Functionen bezeichnet und nicht bemerkt, dass die Function:

$$x_5 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5$$

noch bei gewissen anderen als den cyklischen Substitutionen ungeändert bleibt. In der That geht aber, wie auch Herr *Cayley* in seiner Zuschrift erwähnt, aus den Entwickelungen in dem Abschnitt mit der Ueberschrift: *„Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt“* deutlich hervor, dass *Jacobi* die Functionen (1 2 3 4 5) als der *„hemimetacyklischen“* Gattung**) angehörige hat charakterisiren wollen, und zwar in ebenso natürlicher als einfacher Weise durch nur zwei Substitutionen, bei welchen die Functionen ungeändert bleiben. Solche zwei Substitutionen können, der Natur der Sache nach, in mannigfacher Weise gewählt werden; aber es liegt wohl am nächsten, die Functionen zuerst als cyklische zu charakterisiren und deshalb als die erste der beiden Substitutionen, so wie es *Jacobi* gethan hat, die cyklische:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_1 \end{pmatrix}$$

zu wählen. Alsdann konnte die zweite Substitution nur eine solche sein, bei welcher x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, respective in:

$$x_4, \quad x_3, \quad x_2, \quad x_1, \quad x_5$$

oder: $$x_3, \quad x_2, \quad x_1, \quad x_5, \quad x_4$$

oder: $$x_2, \quad x_1, \quad x_5, \quad x_4, \quad x_3$$

oder: $$x_1, \quad x_5, \quad x_4, \quad x_3, \quad x_2$$

oder: $$x_5, \quad x_4, \quad x_3, \quad x_2, \quad x_1$$

übergeht. Herr *Cayley* nimmt von diesen fünf Anordnungen die dritte; dabei müssen, ebenso wie bei *jeder* der fünf möglichen Anordnungen, *vier* von den Indices in der Anordnung des *Jacobi*schen Textes:

$$x_5, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

abgeändert werden. Aber es ist doch kaum wahrscheinlich, dass der Text in der einen Reihe von nur 5 Indices durch 4 Indexfehler entstellt sein sollte, und ich möchte Ihnen daher eine ganz andere Art der Textverbesserung vorschlagen, nämlich nur die Einschaltung der Worte *„inverso ordine“* zwischen *et* und *cum his*. Dann können die Indices der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 überall im *Jacobi*schen Text ungeändert bleiben, und die Stelle lautet sonach:

---

*) Acta Mathematica, Bd. VII, S. 176.

**) Von der Bezeichnung „hemimetacyklisch“ oder „halbmetacyklisch“ mache ich seit vielen Jahren in meinen algebraischen Vorlesungen Gebrauch. (Vergl. auch Herrn *Netto*s Substitutionentheorie.)

„Sint elementa quinque proposita x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, *ac designemus per symbolum*

$$(1\,2\,3\,4\,5)$$

functionem elementorum rationalem, quae et immutata manet, si elementa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *eodem ordine, quo ea exhibemus, commutamus respective cum his*

$$x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_1$$

et inverso ordine cum his

$$x_5,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4.\text{“}$$

Nach diesem Wortlaut soll die Function (1 2 3 4 5) bei den zwei Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_5, & x_4, & x_3, & x_2, & x_1 \\ x_5, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{-k} \end{pmatrix} \qquad (k \equiv 0,\,1,\,2,\,3,\,4\ (\mathrm{mod.}\,5))$$

ungeändert bleiben, und hierdurch wird die „Gattung“ der Functionen (1 2 3 4 5) als „hemimetacyklische“ vollkommen definirt, genau übereinstimmend mit der Stelle, wo *Jacobi* die Function:

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1$$

als eine die Gattung (1 2 3 4 5) repräsentirende bezeichnet*). Ueberdies sind jene zwei Substitutionen die ihrer Form nach einfachsten, durch deren Zusammensetzung sich *alle* herstellen lassen, bei welchen eine hemimetacyklische Function (1 2 3 4 5) ungeändert bleibt, d. h. eine solche Function wird am einfachsten durch die beiden Gleichungen:

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (2\,3\,4\,5\,1) = (4\,3\,2\,1\,5)$$

charakterisirt, und eben weil ich von dieser Bestimmungsweise der hemimetacyklischen Functionen schon bei meinen ersten Arbeiten über Gleichungen fünften Grades Gebrauch gemacht hatte, lag mir der Gedanke nahe, den *Jacobi*schen Text in der obigen Weise richtig zu stellen.

Die vorgeschlagene Einschaltung der Worte *„inverso ordine“* bei der Angabe der zweiten Substitution empfiehlt sich übrigens auch insofern, als dadurch erst die Worte *„eodem ordine, quo ea exhibemus“* bei der Angabe der ersten Substitution eine wirkliche Bedeutung erhalten.

In Beziehung auf das Geschichtliche des Inhalts des *Jacobi*schen Aufsatzes bemerkt Herr *Cayley* am Schlusse seiner Zuschrift: *The history of the sextic equation in question is rather curious; originally discovered by Malfatti in 1771 (See Brioschi, Math. Ann. T. XIII, p. 151), it was independently rediscovered by Jacobi in 1835, and by Cockle and Harley (1858—59), see my Memoir „On a new auxiliary equation in the theory of equations of the fifth order“ (Phil. Trans. T. CLII. 1861.).*

---

*) Dieses Journal, Bd. XIII, S. 346 und *Jacobis* Werke, Bd. III, S. 277.

In Beziehung auf das Sachliche der *Jacobi*schen Deduction möchte ich hinzubemerken, dass dieselbe an Durchsichtigkeit gewinnt, wenn man statt der Zahl 5 eine beliebige ungerade Primzahl n nimmt und also rationale Functionen der n Elemente $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ betrachtet. Dann wird nämlich eine rationale Function $\mathfrak{H}(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$, welche der hemimetacyklischen Gattung angehört, durch die zwei Gleichungen:

$$\mathfrak{H}(\ldots x_k, \ldots) = \mathfrak{H}(\ldots x_{k+1}, \ldots) = \mathfrak{H}(\ldots x_{g^2k}, \ldots) \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

vollständig charakterisirt, wobei in üblicher Weise $x_k = x_{k+n}$ und für g eine primitive Congruenzwurzel von n zu nehmen ist. Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Permutationen der hemimetacyklischen Gattung werden demgemäss durch die folgende repräsentirt:

$$(x_r, x_{g^{2\nu}+r}, \ldots x_{g^{2\nu}k+r}, \ldots x_{g^{2\nu}(n-1)+r}),$$

wenn man darin den Buchstaben ν, r die Werthe:

$$\nu = 1, 2, \ldots n-1; \quad r = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

beilegt. Hiernach ist ersichtlich, dass auch die Differenz:

$$\mathfrak{H}(\ldots x_k, \ldots) - \mathfrak{H}(\ldots x_{gk}, \ldots) \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

eine Function der hemimetacyklischen Gattung ist, und wenn dieselbe zur Abkürzung mit $H(\ldots x_k, \ldots)$ und das Product der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzen der Grössen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ mit $\Delta(\ldots x_k, \ldots)$ bezeichnet wird, so bestehen die Relationen:

$$H(\ldots x_k, \ldots) = -H(\ldots x_{gk}, \ldots), \quad \Delta(\ldots x_k, \ldots) = -\Delta(\ldots x_{gk}, \ldots).$$

Der Quotient:

$$\frac{H(\ldots x_k, \ldots)}{\Delta(\ldots x_k, \ldots)} \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

ist also eine Function der ***metacyklischen*** Gattung und genügt daher einer Gleichung vom Grade $(n-2)!$, deren Coefficienten symmetrische Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sind. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die ***hemimetacyklische*** Function $H(\ldots x_k, \ldots)$ einer Gleichung desselben Grades genügt, in welcher die Coefficienten der ***geraden*** Potenzen von H ***symmetrische,*** die der ungeraden Potenzen ***alternirende*** Functionen der Grössen x sind.

Dass endlich jede beliebige hemimetacyklische Function $\mathfrak{H}(\ldots x_k, \ldots)$ Wurzel einer Gleichung des Grades $(n-2)!$ ist, deren Coefficienten zweiwerthige Functionen der Grössen x sind, geht einfach daraus hervor, dass die Permutationen der hemimetacyklischen Gattung unter denen der zweiwerthigen enthalten sind, und dass demnach umgekehrt die Gattung der zweiwerthigen Functionen selbst unter der hemimetacyklischen Gattung enthalten ist.

Berlin, 22. October 1890.

Fig. 1 (XY)

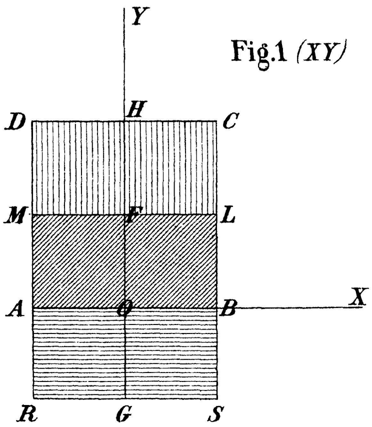
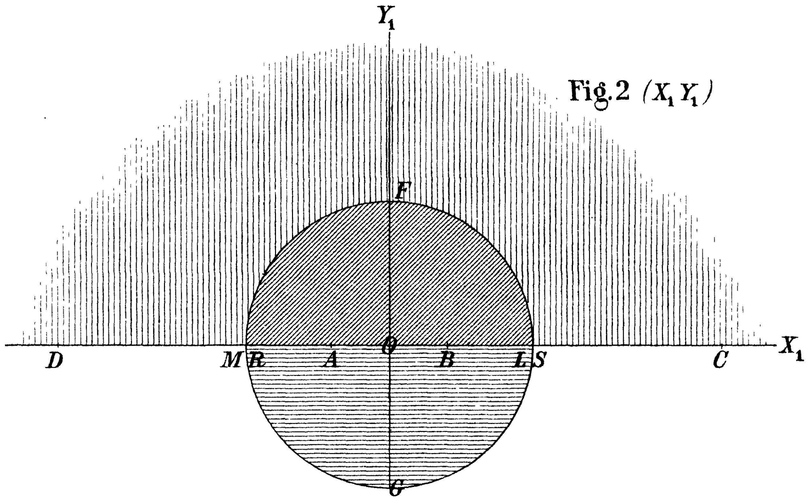


Fig. 2 $(X_1 Y_1)$



Figures 1, 2, 4 are drawn on the same scale, with the value $k = 3 - 2\sqrt{2}$: Figures 3 and 5 on the double scale.
Figures 6 and 7 are on the same scale.

Fig. 3 $(X_2 Y_2)$

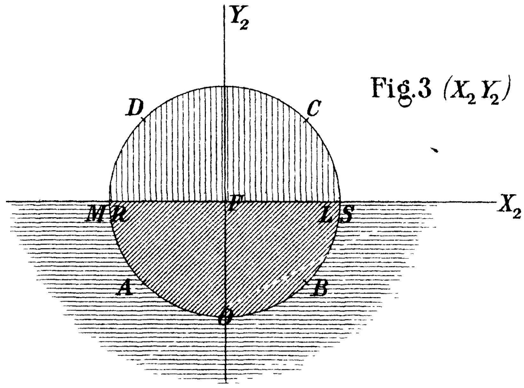


Fig. 4 (xy)

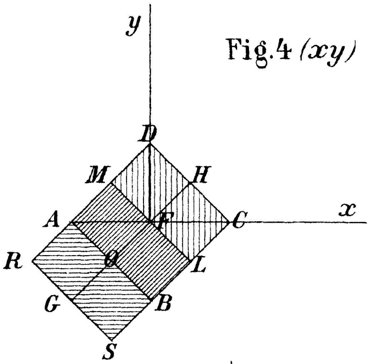


Fig. 5 $(x_1 y_1)$

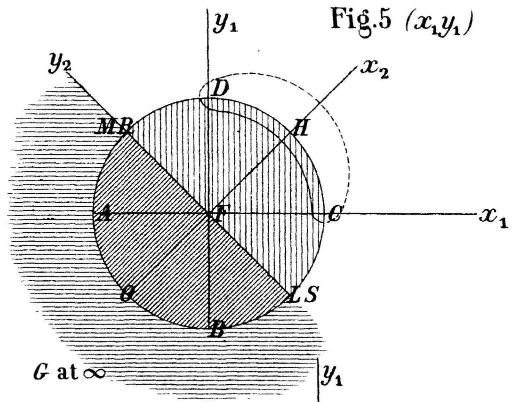


Fig. 6 (xy)

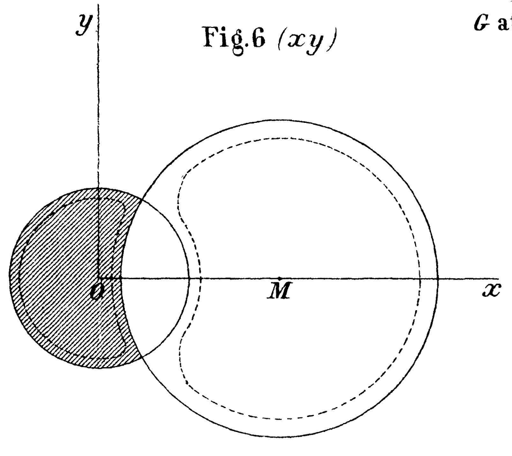


Fig. 7 $(x_1 y_1)$