Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.

Von *J. v. Neumann* in Budapest.

Inhaltsverzeichnis:

I. Das Axiomensystem.

§ 1. Prinzipielles zur Axiomatisierung der Mengenlehre.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, eine logisch einwandfreie axiomatische Darstellung der Mengenlehre zu geben. Ich möchte dabei einleitend einiges über die Schwierigkeiten sagen, die einen derartigen Aufbau der Mengenlehre erwünscht gemacht haben.

Die Mengenlehre hat bekanntlich in ihrer ersten, „naiven" Fassung, die ihr *Cantor* gab, zu Widersprüchen geführt. Es sind die bekannten Antinomien von der Menge aller Mengen, die sich nicht enthalten (*Russell*), von der Menge aller transfiniten Ordnungszahlen (*Burali-Forti*), von der Menge aller endlich definierbaren reellen Zahlen (*Richard*) [1]. Da die naive Mengenlehre unleugbar zu diesen Widersprüchen führte, aber andererseits ein umgrenzter Teil ihrer Sätze exakt-zuverlässig zu sein schien, und da obendrein die moderne Formulierung der Mathematik auch unbedingt ein mengentheoretisches Fundament benötigte, so hat es an Versuchen zur „Rehabilitation" der Mengenlehre nicht gefehlt.

Dabei sind grundsätzlich zwei verschiedene Richtungen zu unterscheiden. Eine Reihe von Autoren sah sich durch die Antinomien der Mengenlehre veranlaßt,

[1]) Siehe z. B. *Poincaré*, Wissenschaft und Methode, deutsch von *F.* und *L. Lindemann*, Leipzig-Berlin, 1914.

das gesamte logische Fundament der exakten Wissenschaften einer Kritik zu unterziehen. Sie setzten sich das Ziel, die ganze exakte Wissenschaft auf eine allgemein einleuchtende neue Basis zu stellen, von der das „richtige" in Mathematik und Mengenlehre wieder erreicht werden konnte, aber das Widerspruchvolle vermöge der unmittelbar-anschaulichen Fundierung a priori ausgeschlossen sein mußte. Es sind hier die Herren *Russell*, *J. König*, *Weyl*, *Brouwer* zu nennen [1]). Sie gelangten zu ganz verschiedenen Resultaten, aber der Gesamteindruck ihrer Tätigkeit ist ein geradezu vernichtender. Schon bei *Russell* erscheint die ganze Mathematik und Mengenlehre als auf dem höchst problematischen „Reduzibilitäts-Axiom" beruhend, und *Weyl* und *Brouwer* lehnen konsequent den größten Teil von Mathematik und Mengenlehre als vollkommen sinnlos ab. Es hat sich hier überhaupt keine Rehabilitation der Mengenlehre ergeben, wohl aber eine sehr scharfe Kritik der bisher gebrauchten elementar-logischen Schlußweisen, insbesondere der Prinzipien „vom ausgeschlossenen Dritten", „alle", und „es gibt".

Die andere Gruppe, die Herren *Zermelo*, *Fraenkel* und *Schönflies*, hat von einer so radikalen Revision abgesehen [2]). Die logische Methode wird nicht weiter kritisiert, sondern beibehalten; nur der (zweifellos unbrauchbare) naive Begriff der Menge wird verpönt. Man wendet, um diesen Begriff zu ersetzen, die axiomatische Methode an; d. h. man konstruiert eine Reihe von Postulaten, in denen das Wort „Menge" zwar vorkommt, aber ohne jede Bedeutung. Unter „Menge" wird hier (im Sinne der axiomatischen Methode) nur ein Ding verstanden, von dem man nicht mehr weiß und nicht mehr wissen will, als aus den Postulaten über es folgt. Die Postulate sind so zu formulieren, daß aus ihnen alle erwünschten Sätze der *Cantor*schen Mengenlehre folgen, die Antinomien aber nicht. Das letztere weiß man allerdings bei diesen Axiomatiken nie ganz gewiß. Man sieht nur, daß die bekannten Schlußweisen, die zu ihnen führen, versagen, aber wer weiß, ob es nicht andere gibt? Ein regelrechter Widerspruchsfreiheitsbeweis ist in diesem Zusammenhange offenbar überhaupt undenkbar. Denn die Methode, mit der *Hilbert* die Widerspruchsfreiheit der verschiedenen Geometrien nachwies [3]): Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und Analysis versagt hier. Ein direkter Widerspruchsfreiheitsbeweis (ohne Verschiebung des Problems) würde aber, da noch vieles in der Logik selbst zu klären bleibt, offenbar in den Bereich der oben-

---

[1]) *Russel-Whitehead*, Principia Mathematica, Cambridge 1910—13; *J. König*, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Leipzig 1914 (posthum); *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 28, 1920, S. 203—208); *Weyl*, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik (Math. Zeitschrift 10, 1921, S. 39—79).

[2]) *Zermelo*, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I (Math. Analen 65, 1908, S. 261—281, ohne Fortsetzung geblieben); *Fraenkel*, Über den Begriff ‚definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms (Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften 1922, Math.-Phys. Klasse, S. 253—257); Die Axiome der Mengenlehre (Scripta Univ. atque Bibl. Hierosol., Math. et phys., Vol. I.); Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1923 (2. Auflage, S. 184 ff.); Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre (Math. Zeitschrift 22, 1924, S. 250—273); *Schönflies*, Zur Axiomatik der Mengenlehre (Math. Annalen 83, 1921, S. 173—200; Bemerkung zur Axiomatik der Größen u. Mengen (ebenda 85, 1922, 60—64).

[3]) *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig (mehrere Auflagen seit 1899).

erwähnten ersten Gruppe gehören. Die angekündigten Arbeiten von Herrn *Hilbert* haben ihn zum Ziel [1]).

Diese zweite Gruppe will also unter peinlicher Vermeidung des naiven (*Cantor*schen) Mengenbegriffes ein Axiomensystem angeben, aus dem die Mengenlehre (ohne ihre Antinomien) folgt. Ihre Untersuchungen können das eigentliche Problem zwar niemals so vollständig erledigen, wie die der ersten Gruppe, aber ihr Ziel ist viel klarer und näherliegend. Es kann zwar niemals auf diesem Wege gezeigt werden, daß die Antinomien wirklich ausgeschaltet sind; auch haftet den Axiomen immer viel Willkür an [2]). Aber eines kann hier sicher erreicht werden: Es wird genau angegeben, was der rehabilitierbare Teil der Mengenlehre ist, und worum es sich handelt, wenn in Zukunft von der vollständigen „formalistischen Mengenlehre" gesprochen werden wird.

Die vorliegende Arbeit gehört der zweiten Gruppe an. Im folgenden soll ein System von Postulaten angegeben werden, aus dem die ganze bekannte Mengenlehre logisch einwandfrei folgt. Allerdings ist „logisch einwandfrei" in dem Sinne zu verstehen, in dem dies in der Mathematik bisher verstanden wurde. Es wird nicht versucht werden auch im Sinne des *Brouwer-Weyl*schen Intuitionismus einwandfreie Herleitungen zu machen. Ich möchte indessen bemerken, daß auch das ziemlich leicht (mit einigen unbedeutenden Modifikationen) erreichbar wäre, worauf ich aber prinzipiell verzichte: widerspricht doch die axiomatische Methode an sich dem Wesen des Intuitionismus. (Intuitionistisch hätte höchstens ein Axiomensystem einigen Sinn, für das auch der Widerspruchsfreiheitsbeweis intuitionistisch-korrekt geführt ist. Nach einer Äußerung *Brouwers* zu schließen nicht einmal das [3]). —

Eine Reihe wesentlicher prinzipieller Fragen werden noch im Teile II behandelt werden, da sie die Kenntnis des Axiomensystems voraussetzen.

§ 2. Allgemeines über die Axiomatik.

Die Aufgabe unserer Axiomatik ist offenbar, alle erwünschten Mengenbildungen durch eine endliche Anzahl rein formaler Operationen (deren Ausführbarkeit eben durch die Postulate garantiert ist) herzustellen. Vermeiden muß man aber die Mengenbildungen durch Zusammenfassung oder Aussonderung von Elementen usw., sowie das bei *Zermelo* noch auftretende unklare Prinzip der „Definität".

Wir ziehen aber vor, nicht die „Menge", sondern die „Funktion" zu axiomatisieren. Der letztere Begriff umfaßt ja gewiß den ersteren. (Genauer: beide

---

[1]) *Hilbert*, Neubegründung der Mathematik I. (Abh. des Math. Seminars der Hamburgschen Univ. 1, 1923, S. 157—175); Die logischen Grundlagen der Mathematik (Math. Annalen 88, 1923, S. 151—165).

[2]) Eine gewisse Rechtfertigung der Axiome ist es freilich, daß sie, wenn man das axiomatisch-sinnlose Wort „Menge" in ihnen im *Cantor*schen Sinne nimmt, in evidente Aussagen der naiven Mengenlehre übergehen. Aber was man aus der naiven Mengenlehre fortläßt — und gerade das ist das Wesentliche zum Umgehen der Antinomien — ist unbedingt willkürlich).

[3]) *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (s. o. S. 220, Fußnote 2). Vgl. *Fraenkel*, Die neuen Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., 33, 1924, S. 98).

Begriffe sind vollkommen gleichwertig, da die Funktion als Menge von Paaren und die Menge als Funktion mit 2 Werten aufgefaßt werden kann.). Der Grund dieser Abweichung vom gewohnten Vorgehen ist der, daß jede Axiomatisierung der Mengenlehre den Begriff der Funktion benützt (Aussonderungsaxiom, Ersetzungsaxiom, siehe Seite 7 und 11), und dabei ist es formal einfacher, den Begriff der Menge auf den der Funktion zu stützen als umgekehrt. — Das anschauliche Bild des axiomatisierten Systems ist das folgende:

Wir betrachten zwei Bereiche von Dingen, den der „Argumente" und den der „Funktionen". (Beide Worte sind natürlich rein formal ohne jede Bedeutung zu verstehen.) Die beiden Bereiche sind nicht identisch, indessen überdecken sie sich teilweise. (Es gibt „Argument-Funktionen", die beiden Bereichen angehören.)

Nun ist in diesen Bereichen eine 2-Variablen-Operation $[x, y]$ definiert (lies „Wert der Funktion x für das Argument y"), deren erste Variable x stets „Funktion" und deren zweite Variable y stets „Argument" zu sein hat. Durch sie wird stets ein „Argument" $[x, y]$ gebildet.

Diese Operation $[x, y]$ entspricht einem Verfahren, das in der Mathematik überall anzutreffen ist: aus einer Funktion f (die von ihren Werten $f(x)$ wohl zu unterscheiden ist!) und einem Argumente x den Wert $f(x)$ der Funktion f für das Argument x zu bilden. Statt $f(x)$ schreiben wir $[f\,x]$, um anzudeuten, daß bei diesem Verfahren auch f (ebenso wie x) als Variable zu betrachten ist. Wir ersetzen mit $[x\,y]$ sozusagen sämtliche 1-Variablen Funktionen durch eine einzige 2-Variablen Funktion. Dabei stehen die Elemente des Bereiches der „Funktionen" in Analogie zu den (naiv gedachten) Funktionen, die für die „Argumente" definiert sind und deren Werte „Argumente" sind. (Als „Mengen" werden später unter diesen „Funktionen" x diejenigen ausgezeichnet werden, für die $[x\,y]$ nur 2 gegebene Werte annimmt, wenn y alle „Argumente" durchläuft; vgl. auch § 3 und § 4.)

Für $[x, y]$ gilt übrigens das „Bestimmtheitsaxiom" im folgenden Sinne:

Wenn a, b „Funktionen" sind, und für jedes „Argument" x $[a\,x] = [b\,x]$ ist, so ist $a = b$. (Siehe Axiom I. 4.)

Eine „Funktion" a ist also durch ihre „Werte" $[a\,x]$ ganz eindeutig bestimmt, aber es ist gar nicht gesagt, daß man ihr diese „Werte" beliebig vorschreiben kann. (Damit würden wir ja wieder in die naive Mengenlehre zurückfallen.) Es erhebt sich vielmehr die Frage: welche Operationen sind zur Herstellung von Funktionen vorhanden? Sie wird in den Axiomengruppen II—III. beantwortet.

Es tritt aber noch eine Frage auf: Welche „Funktionen" sind gleichzeitig „Argumente"? Offenbar würde es das angenehmste sein, zu antworten: alle. Das würde uns aber bei den in den Axiomengruppen II—III. angeführten Herstellungsarten von „Funktionen" wieder in die Antinomien der naiven Mengenlehre verwickeln: in erster Linie in die *Russell*sche.) Und da wir die genannten Herstellungsmöglichkeiten alle brauchen, so müssen wir auf den Argumentcharakter gewisser Funktionen verzichten.

Diese unvermeidliche Beschränkung erfolgt in der von *Zermelo* gezeigten Richtung:

Wir wählen willkürlich ein „Argument“ A aus, und erklären im wesentlichen, daß die und nur die Funktionen a gleichzeitig Argumente sind, die *nicht zu oft, d. h. für zuviele Argumente* x von A verschiedene „Werte“ $[a\,x]$ annehmen. (Die „Menge“ wird nämlich als 2-wertige Funktion definiert werden, von der der eine Wert A ist. Also ist das die sinngemäße Übertragung des *Zermelo*schen Standpunktes.)

Dabei präzisieren wir dieses „zu oft“ folgendermaßen:

Die „Funktion“ a wird dann und nur dann nicht „Argument“ sein, wenn die Gesamtheit der Argumente x, für die $[a\,x] \neq A$ ist, auf die Gesamtheit aller Argumente überhaupt abgebildet werden kann. (Die Abbildung muß aber durch eine unserer „Funktionen“ erfolgen, d. h. sie muß die Form $y = [b\,y]$ haben. Eindeutig muß sie sein, eindeutig-umkehrbar zu sein braucht sie nicht.) (Siehe Axiom IV. 2.)

Diese Definition hat den Vorteil, daß sie den „Argument“-Charakter aller „Funktionen“ a garantiert, die seltener $\neq A$ sind als eine bereits als „Argument“ erkannte „Funktion“ b. „Seltener“ bedeutet: daß die Gesamtheit aller x, für die $[a\,x] \neq A$ ist, Bild der Gesamtheit aller x, für die $[b\,x] \neq A$ ist, (oder eines Teiles davon) ist. Sie enthält also das sog. Aussonderungsaxiom *Zermelo*s und das Ersetzungsaxiom *Fraenkels* [1]). Aber sie leistet mehr: Sie enthält auch den Wohlordnungssatz und macht dadurch das Auswahlprinzip überflüssig.

Daß der Wohlordnungssatz in diesem neuen Zusammenhange auftritt, beruht auf folgendem: Wir können eine einwandfreie Theorie der Ordnungszahlen aufstellen. Die Gesamtheit aller Ordnungszahlen führt „naiv“ zur *Burali-Forti*schen Antinomie: in unserem System hat das die Konsequenz, daß eine Funktion, die für alle Ordnungszahlen Werte $\neq A$ hat, kein Argument ist. Folglich muß die Gesamtheit aller Ordnungszahlen auf die Gesamtheit aller „Argumente“ abgebildet werden können, und das ergibt natürlich eine Wohlordnung für die Gesamtheit aller „Argumente“. (Diese Schlußweise muß und kann natürlich streng durchgeführt werden).

Ich möchte noch bemerken:

Es mag befremdend wirken, daß bei einer Axiomatisierung der Mengenlehre (entgegen den Ausführungen in § 1) Begriffe wie „Gesamtheit“, „Funktion“ naiv benützt werden. Aber das geschieht nur hier im § 2 zur Veranschaulichung des Systems; im § 3, bei der genauen Formulierung wird natürlich nichts derartiges geschehen.

§ 3. Die Axiome und ihre Bedeutung.

Zum Vorhergehenden ist noch folgendes zu bemerken:

Außer der bereits eingeführten universellen 2-Variablen-Operation $[x, y]$

---

[1]) Das „Ersetzungsaxiom“ läßt sich so ausdrücken: $\mathfrak{M}$ sei eine Menge, $f(x)$ eine (in $\mathfrak{M}$ definierte) Funktion. Dann gibt es eine Menge $\mathfrak{N}$, die alle $f(x)$ für alle Elemente x von $\mathfrak{M}$ enthält. Dieses Axiom stammt von *Fraenkel* (zu den Grundlagen der *Cantor-Zermelo*schen Mengenlehre; Math. Annalen 86, 1922, S. 230—237). Er wies zuerst darauf hin, daß ohne dieses Axiom in der *Zermelo*schen Axiomatik die Existenz von Mengen der Mächtigkeit $\aleph_\omega$ unbeweisbar ist. (In seinen neueren Arbeiten versucht er, allerdings mit einem schwächeren Axiom auszukommen.) Ich glaube sogar, daß ohne dieses Axiom überhaupt keine Ordnungszahlen-Theorie möglich ist.

müssen wir noch eine 2-Variablen-Operation (x, y) einführen (lies: Paar von x und y), deren Variable x, y beide „Argumente" zu sein haben, und die selbst ein „Argument" (x, y) herstellt. Ihre wichtigste Eigenschaft ist, daß aus $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ folgt (das kommt unter den Axiomen nicht direkt vor, denn es folgt aus den Axiomen II, 3—4). Diese Operation hat garnicht den fundamentalen Charakter von $[x, y]$; sie ist nur notwendig, weil der Begriff des „Paares" eingeführt werden muß.

Ferner wird von Anfang an außer dem bereits erwähnten „Argumente" A noch ein willkürliches „Argument" B eingeführt werden. (A, B werden nämlich die beiden Werte derjenigen Funktionen sein, die die „Mengen" vertreten.)

Und schließlich werden wir statt von „Argumenten", „Funktionen" und „Argument-Funktionen" stets von „I. Dingen", „II. Dingen" und „I. II. Dingen" sprechen.

Das Axiomensystem lautet so:

Wir beschäftigen uns mit *I. Dingen*, *II. Dingen*, den beiden von einander verschiedenen Dingen A, B, und den beiden Operationen $[x, y]$, (x, y).

Es gelten die Axiomen:

(Einleitende Axiome)

I. 1. A, B sind I. Dinge.

2. $[x, y]$ hat dann und nur dann Sinn, wenn x ein II. Ding und y ein I. Ding ist. Es ist selbst stets ein I. Ding.

3. (x, y) hat dann und nur dann einen Sinn, wenn x, y I. Dinge Es ist selbst stets ein I. Ding.

4. a, b seien II. Dinge. Wenn für alle I. Dinge x: $[a\, x] = [b\, x]$ ist, so ist $a = b$.

Zu diesen Axiomen ist kein weiterer Kommentar nötig: es war schon von allen im § 2 die Rede.

(Arithmetische Konstruktionsaxiome.)

II. 1. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\, x] = x$ ist.

2. u sei ein I. Ding. Es gibt dann ein II. Ding a, so daß stets $[a\, x] = u$ ist.

3. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\,(x\, y)] = x$ ist.

4. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\,(x\, y)] = y$ ist.

5. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets (wenn x I. II. Ding ist) $[a(x\, y)] = [x\, y]$ ist.

6. a, b seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding c, so daß stets $[c\, x] = ([a\, x], [b\, x])$ ist.

7. a, b seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding c, so daß stets $[c\, x] = [a\,[b\, x]]$ ist.

Dies sind alles Herstellungsweisen für Funktionen. Sie sind so zusammengestellt worden, daß die Funktionen in einem gewissen Sinne eine Gruppe bilden. Sie haben nämlich den folgenden Satz zur Folge (auf dessen ganz einfachen Beweis wir nicht eingehen):

Reduktion. $\mathfrak{A}(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Ausdruck der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und irgendwelchen konstanten $a_1, a_2, \ldots$ (I. oder II. Dingen) mit Hilfe der Operationen $[x, y]$ und (x, y) aufgebaut ist. Ein solcher Ausdruck braucht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ I. Dinge sind, nicht immer Sinn zu haben (z. B. $[x_1, x_2]$ nur wenn x_1 I. II. Ding ist), aber wenn er Sinn hat, so sei vorausgesetzt, daß er ein I. Ding ist. (Damit wird der Fall ausgeschlossen, daß $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einfach eine Konstante a ist, die II. Ding aber nicht I. Ding ist.)

Dann gibt es ein II. Ding a, so daß für alle I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sinn hat $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= [a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots) x_n)] \text{ ist.}$$

Damit haben wir in $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots) x_n)]$ eine Normalform für die n-Variablen-Ausdrücke gewonnen: es ist die allgemeine n-Variablen Funktion, so wie $[a x]$ die allgemeine 1-Variablen Funktion ist.

(Logische Konstruktionsaxiome).

III. 1. Es gibt ein II. Ding a, so daß $x = y$ mit $[a(x y)] \neq A$ gleichbedeutend ist.

2. a sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding b, so daß dann und nur dann $[b x] \neq A$ ist, wenn für alle y $[a(x y)] = A$ ist.

3. a sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding b, so daß immer, wenn für ein einziges y $[a(x y)] \neq A$ wird, $[b x] =$ diesem y ist.

Diese Herstellungsweisen für Funktionen ergänzen diejenigen der Gruppe II. Sie ermöglichen, daß jede logische Bedingung für die I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf die Normalform $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots x_n)] \neq A$ gebracht werden könne; und daß jedes I. Ding y, das logisch eindeutig durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt ist, auch auf die Normalform $[a((\ldots((x_1 x_2) x_3)\ldots) x_n)]$ gebracht werde. Denn III. 1. ermöglicht das „auf die Normalform bringen" für die Identitätsrelation $x = y$; III. 2. für die Begriffe „alle" und „es gibt". III. 3. erlaubt schließlich die explizite Darstellung $y = [b x]$ des durch eine eindeutige implizite Bedingung $[a(x y)] \neq A$ bestimmten y.

Übrigens sind die Axiome der Gruppe II. zwar voneinander unabhängig, aber sie sind es nach Hinzunahme der Gruppe III. nicht mehr: So folgt z. B. aus III. 1. und III. 3. das Axiom II. 1.

(I. II. Dinge).

IV. 1. Es gibt ein II. Ding a, so daß ein I. Ding x dann und nur dann ein I. II. Ding ist, wenn $[a x] \neq A$ ist

2. Ein II. Ding a, ist dann und nur dann kein I. II. Ding, wenn es ein II. Ding b gibt, so daß zu jedem I. Dinge x ein y mit $[ay \neq A, [by] = x$ existiert.

Wir haben hier zwei formal analoge Axiome: IV. 1. gibt an, wann ein I. Ding, und IV. 2. wann ein II. Ding I. II. Ding ist. Dem Inhalte nach sind aber IV. 1. und IV. 2. grundverschieden.

In IV. 1. hätten wir einfacher verlangen können, daß jedes I. Ding I. II.

Ding sei. (D. h. daß alle betrachteten Dinge Funktionen sind. *Zermelo* macht keine solche Einschränkung, wohl aber *Fraenkel*; davon wird noch im Teile II. die Rede sein.) Wir halten aber zunächst die Axiome möglichst allgemein; auf diese und weitere Restriktionen gehen wir noch im Teile II. ein. IV. 1. verlangt aber nichts Meritorisches, nur daß die Eigenschaft des I. Dinges, „I. II. Ding zu sein", wie jede andere Eigenschaft, auf die Normalform gebracht werden könne.

Demgegenüber ist IV. 2. ein sehr wesentliches und folgenreiches Axiom. Es war von ihm schon in § 2. die Rede; aus ihm folgen das Aussonderungsaxiom *Zermelos*, das Ersetzungsaxiom *Fraenkels* und der Wohlordnungssatz. Bei *Zermelo* und *Fraenkel* wird kein solches allgemeines Kriterium zur Entscheidung dessen, wann eine Menge „zu groß" ist, benützt. Auch wird, von ihnen abweichend, der Wohlordnungssatz hieraus und nicht aus dem Auswahlprinzip (Multiplikationsaxiom bei *Zermelo*) gewonnen.

Für die folgende Gruppe von Axiomen ist es praktisch (aber keineswegs notwendig) die folgenden Zeichen zu definieren:

a sei ein II. Ding. Für $[a\,x] \neq A$ schreiben wir auch $x \varepsilon a$.

a, b seien II. Dinge. Wenn aus $x \varepsilon a$ $x \varepsilon b$ folgt, so ist $a \lesssim b$. Für $b \lesssim a$ schreiben wir auch $a \gtrsim b$.

Wenn $a \lesssim b$ und $a \gtrsim b$ ist, so schreiben wir $a \sim b$. Wenn $a \lesssim b$, aber nicht $a \gtrsim b$ ist, so schreiben wir $a < b$; wenn nicht $a \lesssim b$, aber $a \gtrsim b$, so schreiben wir $a > b$. (Vgl. auch § 4.)

(Unendlichkeitsaxiome)

V. 1. Es gibt ein I. II. Ding a mit den folgenden Eigenschaften:
Es gibt I. II. Dinge x mit $x \varepsilon a$. Wenn für ein I. II. Ding x $x \varepsilon a$ ist, so gibt es I. II. Dinge $y \varepsilon a$, für die $x < y$ ist.

2. a sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding b, für welches aus $x \varepsilon y$, $y \varepsilon a$ (y also I. II. Ding.) $x \varepsilon b$ folgt.

3. a sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding b mit der folgenden Eigenschaft:
Wenn für ein I. II. Ding x $x \lesssim a$ ist, so gibt es ein I. II. Ding y, für welches $x \sim y$, $y \varepsilon b$ ist.

Diese drei verhältnismäßig komplizierten Axiomen treten bei *Zermelo* und *Fraenkel* auch auf und zwar als „Axiom des Unendlichen" (V. 1.), „der Vereinigung" (V. 2.), und „der Potenzmenge" (V. 3.). Wir nennen aber alle drei Unendlichkeitsaxiome, weil sie nur bei der spezifischen Theorie der unendlichen Mächtigkeiten notwendig sind. Nicht nur die Theorie der endlichen Mengen und Ordnungszahlen (d. h. der nichtnegativen ganzen Zahlen) sondern sogar teilweise die des Kontinuums können ohne sie, allein auf Grund der Axiome der Gruppen I.—IV. aufgebaut werden.

Es sind Herstellungsweisen für I. II. Dinge (analog zu den Gruppen II. III., die es für II. Dinge waren). Ihr Sinn ist (naiv formuliert) ungefähr der folgende:

Es gibt eine nicht zu große unendliche Menge a.

Wenn a eine nicht zu große Menge nicht zu großer Mengen ist, so ist auch die Menge b der Elemente der Elemente von a nicht zu groß.

Wenn a eine nicht zu große Menge ist, so ist **auch die Menge b aller** Teilmengen von a nicht zu groß.

Freilich wird die Formulierung dadurch, daß nicht von Mengen, sondern von Funktionen gesprochen wird, etwas kompliziert (besonders V. 3.); immerhin folgt mit Hilfe der Axiome der Gruppe V. leicht (sobald der Begriff „Menge" als Spezialfall von „Funktion" streng definiert ist) die Existenz unendlicher Mengen, sowie die der Vereinigungs- und Potenzmengen. Das Axiom V. 1. weicht übrigens von der Fassung von *Zermelo* (und *Fraenkel*) für die Unendlichkeit ab: Es wird in ihm die Existenz irgendeiner unendlichen Menge verlangt und nicht die einer speziellen, wie dort. Dieser Umstand ist aber belanglos.

Diese Axiome der Gruppen I.—V. bilden unser Axiomensystem. Die Gruppierung und Formulierung weicht äußerlich von *Zermelo* und *Fraenkel* weitgehend ab; trotzdem sind viele Analogien vorhanden. Besonders beim Vergleiche mit den *Fraenkel*schen Axiomen und Definitionen sieht man, daß die meisten unserer Axiome Analoga bei ihm haben. Indessen sind ganz wesentliche Unterschiede auch vorhanden. Daß von „Funktionen" statt von „Mengen" geredet wird, ist wohl oberflächlich; wesentlich aber ist, daß auch „zu große" Mengen (bezw. „Funktionen") Gegenstand dieser Mengenlehre sind, nämlich diejenigen II. Dinge, die keine I. II. Dinge sind. Anstatt sie gänzlich zu verbieten, werden sie nur für unfähig erklärt Argumente zu sein (sie sind keine I. Dinge!). Zum Vermeiden der Antinomien reicht das aus und ihre Existenz ist für gewisse Schlußweisen notwendig. Ganz wesentlich von *Zermelo* und *Fraenkel* abweichend, ja direkt für unsere Axiomatik charakteristisch ist schließlich das Axiom IV. 2. Zwar steht es in einer gewissen Beziehung zum Aussonderungs- und zum Ersetzungsaxiom, aber es ist viel weitergehend. Einerseits garantiert es die Existenz der Teilmengen und Bildmengen, und ermöglicht überhaupt die Theorie der Ordnungszahlen und Alephs (die in einem Axiomensystem, in dem das Ersetzungsaxiom fehlt, kaum gelingen kann), doch das ist im wesentlichen nur die Leistung des Ersetzungsaxioms. Aber darüber hinausgehend nimmt es eine ganz zentrale Stellung im Axiomensystem ein; es ermöglicht in mehreren Fällen den Nachweis dafür, daß eine Menge „nicht zu groß" ist, und schließlich ergibt es den Wohlordnungssatz.

Freilich verlangt dieses Axiom IV. 2. etwas mehr als bisher für den Begriff „nicht zu groß" für selbstverständlich und billig erachtet wurde. Man könnte sagen, daß es dem Bogen etwas überspannt. Aber bei der Verworrenheit des landläufigen Begriffes „nicht zu groß" einerseits und bei der außergewöhnlichen Leistungsfähigkeit dieses Axioms andererseits glaube ich mit seiner Einführung keinen zu krassen Willkürakt begangen zu haben. Umso mehr, als es den Bereich der Mengenlehre eher erweitert als einschränkt, und trotzdem kaum eine Quelle von Antinomien werden kann. (Auf diesen letzten Punkt gehen wir im Teile II. näher ein.)

§ 4. Über die Herleitung der Mengenlehre.

In den §§ 2—3 wurde eine Axiomatisierung der Mengenlehre beschrieben, unter Hervorhebung der prinzipiellen Gesichtspunkte, die bei ihrer Aufstellung maßgebend waren. Im folgenden soll einiges über die Herleitung der Mengenlehre aus diesen Axiomen gesagt werden.

Eine solche Herleitung der Mengenlehre würde sich folgendermaßen gliedern:

1. Allgemeine Mengenlehre.

Hier sind diejenigen allgemeinen Sätze und Definitionen zu erledigen, die mehr aus dem Wesen der Axiomatik als dem der Mengenlehre fließen, solche, die in der naiven Mengenlehre ganz trivial sind. Es sind Sätze wie die Existenz der Vereinigungsmenge und des Durchschnittes von Mengen, die Existenz der Potenzmenge usw. Es ist hier weder von Ordnung noch von Mächtigkeiten die Rede.

2. Ordnung und Wohlordnung.

Es wird definiert, was unter diesen Begriffen, ferner unter gewissen Hilfsbegriffen, wie Ähnlichkeit, Abschnitt (Anfangsstück) usw. zu verstehen ist. Einige ganz triviale Sätze über Ordnung und Wohlordnung folgen, z. B.: Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich; ist von zwei ähnlichen geordneten Mengen die eine wohlgeordnet, so ist auch es die andere; usw.

3. Ordnungszahlen.

Hier fängt die eigentliche Theorie an. Eine strenge Definition der Ordnungszahlen wird angegeben und anschließend werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Ordnungszahlen entwickelt; u. a. die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen und die Zulässigkeit der Definition durch transfinite Induktion [1]).

4. Wohlordnungssatz.

Mit Hilfe der Ordnungszahlen und des Axioms IV. 2. wird (ohne Auswahlprinzip) der Wohlordnungssatz bewiesen.

5. Mächtigkeiten.

Nachdem die Theorie der Ordnungszahlen und der Wohlordnungssatz vorliegen, kann auch die Theorie der Alephs (Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten) leicht entwickelt werden. (Diese Gruppierung der Mächtigkeiten erst nach der Wohlordnung ist von der allgemein üblichen abweichend. Sie führt aber schneller zum Ziele.)

6. Unendlichkeit.

Schließlich folgt die Definition der Endlichkeit und Unendlichkeit von Mengen. Die einfachsten Eigenschaften von Endlichkeit und Unendlichkeit werden entwickelt und die Existenz unendlicher Mengen nachgewiesen. Die kleinste unendliche Ordnungszahl ω wird definiert.

Wir wollen im folgenden diese (bereits fertig vorliegende) Herleitung nicht durchführen. Sie würde mit allen Beweisen sehr viel Raum einnehmen und den Rahmen dieser Darstellung übersteigen. Sie soll in einer anderen Arbeit detailliert auseinandergesetzt werden.

Hier seien nur die wichtigsten Bezeichnungen angeführt.

---

[1]) Vgl. *J. Neumann*, Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen. (Acta Litterarum ac Scientiarum regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scient Math. Tom. I Fasc. IV, 1923. S. 199—208.) Szeged.

Die genaue Definition von „Menge" (als Spezialfall von „Funktion") lautet so:

Ein II. Ding a heißt ein *Bereich*, wenn stets $[a\,x] = A$ oder $= B$ ist.

Ein I. II. Ding heißt in diesem Falle eine *Menge*.

D. h. „Menge" heißen (in der früheren Terminologie) die „nicht zu großen" Mengen, und „Bereiche" sind alle Gesamtheiten ohne Rücksicht auf ihre „Größe". Ein Bereich ist dann und nur dann „argumentfähig" (d. h. I. II. Ding), wenn er Menge ist.

Die Definitionen der Relationen $x \varepsilon a$ (x gehört zu a, x ist Element von a, a enthält x), $a \lesssim b$ (a ist Teil von b), $a < b$ (a ist echter Teil von b), $a \sim b$ (a, b sind gleich groß) sind schon im § 3 angegeben worden. (Wenn a und b Bereiche sind, so folgt aus $a \sim b$ wegen I. 4 natürlich $a = b$; für allgemeine II. Dinge ist diese Folgerung hingegen nicht notwendig.

Wenn a, b Bereiche sind, so sind $a + b$, $a \,.\, b$, $a - b$ deren Summen-, Durchschnitts-, bzw. Differenzbereiche (in demselben Sinne, wie dies in der naiven Mengenlehre verstanden wird; natürlich müssen für alle diese Bereiche zuerst die Existenzbeweise gebracht werden; das gilt auch im folgenden). Wenn a ein Bereich ist und seine Elemente Mengen sind, so sind $S(a)$, $D(a)$ der Vereinigungs-, bzw. Durchschnittsbereich (der Elemente) von a. Ist a ein Bereich und c ein II. Ding, so ist $[c, a]$ das durch c vermittelte Bild von a. Ist schließlich a ein Bereich, so ist $P(a)$ der Potenzbereich von a (der alle Teil*mengen* von a enthält; Bereiche die keine Mengen sind, sind ja „argumentunfähig"). Übrigens ist, wenn a, b Mengen sind, auch $a + b$ eine Menge, wenn a oder b eine Menge ist, auch $a \cdot b$ eine Menge, und wenn a eine Menge ist, auch $S(a)$, $D(a)$, $P(a)$ Mengen.

Wenn a ein Bereich ist, so nennen wir alle Bereiche b *Ordnungen* von a, die die folgende Eigenschaft haben:

Jedes x Element von b hat die Form $x = (u\,v)$, $u \varepsilon a$, $v \varepsilon a$, $u \neq v$.

Wenn u, v zwei voneinander verschiedene Elemente von a sind, so gehört (uv) oder (vu) zu a.

Wenn (uv), (vw) zu b gehören, so gehört auch (uw) zu b.

Wenn (uv) zu b gehört, so schreiben wir auch $u \overset{(b)}{<} v$ oder $v \overset{(b)}{>} u$ (u liegt bei der Ordnung b vor v, v liegt bei der Ordnung b nach u).

Wenn a sogar eine Menge ist, so sind alle seine Ordnungen Mengen und sie bilden auch eine Menge $O(a)$.

Die übrigen Definitionen (Ähnlichkeit, Wohlordnung, Ordnungszahl, Mächtigkeit, Äquivalenz, Endlichkeit und Unendlichkeit) führen wir hier nicht mehr an, sie liegen teilweise auf der Hand. Die Theorie der Ordnungszahlen, die hier in Frage kommt, habe ich bereits in einer anderen Arbeit auseinandergesetzt (siehe Fußnote[1]) auf S. 228). (Allerdings in der Terminologie der naiven Mengenlehre; aber die Übertragung in diese Axiomatik bereitet weiter keine Schwierigkeiten.)

II. Untersuchung der Axiome.

§ 1. Die Fragestellung, Prinzipielles.

Aus den Axiomen, wie sie im Teile I. auseinandergesetzt wurden, folgen die bekannten Sätze der Mengenlehre restlos; andererseits sind aber diese Axiome (insofern sie nicht einschränkender Art sind) nichts als triviale Tatsachen der naiven Mengenlehre. In diesem Sinne könnten wir also sagen, daß durch unsere Axiome weder zuviel noch zu wenig gefordert wurde.

Indessen wäre eine solche Feststellnug aus mehreren Gründen nicht stichhaltig. Der erste Grund ist der folgende:

Unsere Axiome ermöglichen zwar die bekannten Mengenbildungen $a + b$, $S(a)$, $P(a)$, $[c, a]$ und die „Aussonderung" (wobei die endlichen und die abzählbaren Mengen den Ausgangspunkt bilden), aber sie garantieren nicht, daß es außer den so gewonnenen Mengen nicht noch weitere gibt, die auf diesem Wege unerreichbar sind. Es könnten a priori auch sehr gut Mengen von dieser Art existieren. Z. B. wenn eine Menge a ein einziges Element hat und dieses sie selbst ist: $a = (a)$; oder eine „absteigende Mengenfolge": $a_1 = (a_2)$, $a_2 = (a_3)$, ... ((a) bedeutet die Menge mit dem einzigen Elemente a) [1]). Es wäre nun erwünscht, alle diese überflüssigen Mengenbildungen zu beseitigen, und das leisten unsere bisherigen Axiome sicherlich nicht.

Um diese Lücke zu füllen, hält *Fraenkel* die Einführung eines weiteren, noch nicht genau formulierten Axioms für wünschenswert (Beschränktheitsaxiom), zu dem unsere Axiome kein Analogon bieten und das etwa so lauten würde:

> Außer den Mengen (bezw. I. und II. Dingen), die auf Grund der Axiome unbedingt existieren müssen, gibt es keine weiteren Mengen.

Wir wollen dieses Axiom in unserem Formalismus präzis fassen. Hierzu definieren wir:

> Das System der I. und II. Dinge sei Σ. Σ' sei ein Teilsystem von Σ. $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, oder $\mathrm{II}_{\Sigma'}$, Dinge seien alle I. bzw. II. Dinge aus Σ'. $(x, y)_{\Sigma'}$ (x ein $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, y ein $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Ding) bedeute $[x, y]$, $(x, y)_{\Sigma'}$ (x, y $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ Dinge) bedeute (x, y), $A_{\Sigma'}$, sei A, $B_{\Sigma'}$, sei B.
>
> Wenn nun diese $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge, die Operationen $[x, y]_{\Sigma'}$, (x, y), und die Dinge $A_{\Sigma'}$, $B_{\Sigma'}$ unseren Axiomen auch genügen, so sagen wir kurz, daß Σ' unseren Axiomen genügt.

Das erwähnte Beschränktheitsaxiom verlangt nun einfach:

> Außer Σ selbst soll kein anderes Teilsystem Σ' von Σ den Axiomen I.—V. genügen.

In dieser Formulierung wird es nun klar, daß gegen ein derartiges Axiom (das gilt natürlich ebenso in dem *Fraenkel*schen Systeme) sofort zwei ernste Einwände geltend gemacht werden können.

Erstens ist dieses Axiom von einem ganz anderen Typus als die früheren, da es im Gegensatze zum bisherigen Prinzip die naiv mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht vermeidet. Denn was sollen wir unter „Teilsystemen" von Σ verstehen? Mengen oder Bereiche im Sinne der früheren Axiome keinesfalls, denn die können nur I. Dinge als Elemente haben, während Σ' und Σ I. und II. Dinge enthalten. Was bleibt aber dann übrig, da doch der naive Mengenbegriff streng

---

[1]) *Mirimanoff*, Les Antinomies de *Russell* et *Burali-Forti* (L'Enseigment Mathématique XIX-e année 1917, Seite 42).

verboten sein sollte? Solch ein Axiom würde das ganze Axiomatisieren zu einem Zirkel machen!

Diese Schwierigkeit wäre indes zu beheben, indem wir etwa annehmen würden, es läge ein größeres System P (von I_P, II_P Dingen, mit Operationen $[xy]_P$, $(xy)_P$, und zwei Dingen A_P, B_P, welches unseren Axiomen I.—V. auch genügte) vor, derart, daß alle I. und II. Dinge I_P Dinge sind, und $[xy]$, (xy) in P beide auf die dortige Normalform $[a(xy)_P]_P$ (a ein II_P Ding) gebracht werden können. Dann ist Σ ein Bereich in P und seine „Teilsysteme" Σ' sind einfach als seine Teilbereiche (in P) aufzufassen. Wir hätten eine „höhere Mengenlehre" P über Σ gelagert, in der auch Dinge, die in Σ argumentunfähig sind, Argumente sind. Das ist an sich nicht absurd: Wenn wir die „zu großen" argumentunfähigen Mengen in einem neuen Systeme P argumentfähig machen, so können wir die Antinomien noch immer umgehen, wenn wir die aus diesen allen gebildeten „noch größeren" (d. h. in P zu großen) Mengen ihrerseits zulassen, aber als argumentunfähig erklären. Die Idee ist teilweise dieselbe wie die, die der *Russel*schen „Stufenbildung" zu Grunde liegt.

In einer solchen „höheren Mengenlehre" P hätte es also einen Sinn zu fragen, ob das erwähnte Bestimmtheitsaxiom (für die „niedrigere Mengenlehre" Σ) erfüllt ist. Im folgenden werden wir der Einfachheit halber zwar die Terminologie der naiven Mengenlehre anwenden, aber man wird dabei stets sich vergegenwärtigen müssen, daß die Existenz eines „höheren" Systems P angenommen ist. Ohne eine solche Hypothese (die noch etwas problematischer ist als die von der Widerspruchfreiheit der Mengenlehre) kann man eben keine Untersuchung der den Axiomen genügenden Systeme Σ' vornehmen, es sei denn, daß man sich kritiklos in die Terminologie der (widerspruchvollen) naiven Mengenlehre finden will.

Und nun tritt die zweite Schwierigkeit auf. Daß ein System, welches den Axiomen I.—V. genügt, das Beschränktheitsaxiom nicht zu erfüllen braucht, ist leicht nachweisbar (vgl. oben). Man müßte daher etwa das folgende wissen:

> Wenn das System Σ den Axiomen I.—V. genügt, so kommt unter seinen Teilsystemen Σ', die denselben auch genügen, mindestens ein kleinstes vor, d. h. eines mit der folgenden Eigenschaft: Außer Σ' selbst genügt kein Teilsystem von Σ' den Axiomen I.—V.

Dieses Teilsystem würde also dem Beschränktheitsaxiom genügen. Ein solches kleinstes Teilsystem könnte z. B. der gemeinsame Teil (Durchschnitt) aller den Axiomen I.—V. genügenden Teilsysteme Σ' von Σ sein (nämlich falls dieser den Axiomen I.—V. wieder genügen sollte). Allerdings braucht er es nicht zu sein. Nun zeigt aber eine nähere Untersuchung, daß der einzige bekannte Weg zur Herstellung eines solchen Teilsystems versagt. Wir werden später den Umstand nennen, an dem das liegt. Aus diesen Gründen glauben wir folgern zu müssen, daß erstens das Beschränktheitsaxiom unbedingt zu verwerfen ist, und daß es zweitens überhaupt nicht gelingen kann, ein Axiom mit demselben Effekte zu formulieren. Dies hängt übrigens auch mit der fehlenden „Kategorizität" des Axiomensystems I.—V. zusammen, von der noch in § 5 die Rede sein wird.

Aber wenn es auch nicht gelingen kann, ein kleinstes den Axiomen I.—V. genügendes Teilsystem von Σ zu finden, so wollen wir doch sehen, welche den Axiomen I.—V. genügende Teilsysteme von Σ existieren können. Wir stoßen dabei auf eine höchst eigentümliche Erscheinung, die zuerst von *Löwenheim* und *Skolem* [1]) bemerkt wurde.

§ 2. Über Teilsysteme.

Es liege ein Teilsystem Σ' vor. Wir wollen nun die Bedingung, daß Σ' den Axiomen genügt, genau formulieren.

Für die Axiome I. 1, 2, 3, ist dies ganz leicht. Sie lauten seinfach so:

1. A, B gehören zu Σ'.
2. Wenn x, y zu Σ' gehören, so gehört auch $[x, y]$ und (x, y) zu Σ'.

Für II. 1—7, III. 1., IV,. 1. besteht eine gewisse Schwierigkeit. II. 1. verlangt z. B.:

Ein II. Ding a gehöre zu Σ', für welches für alle II. Dinge x von Σ' $[ax] = x$ ist.

Analog bei II. 2.—IV. 1. Um das zu vermeiden, verlangen wir aber einfach stets etwas mehr, nämlich:

3. Ein II. Ding a, für das stets (d. h. für alle I. Dinge aus Σ, ebenso in folgenden): $[ax] = x$ ist, gehört zu Σ'.
4. Das I. Ding u gehöre zu Σ'. Dann gehört ein II. Ding a, für das stets $[ax] = u$ ist, zu Σ'.
5. Ein II. Ding a, für das stets $[a(xy)] = x$ ist, gehört zu Σ'.
6. Ein II. Ding a, für das stets $[a(xy)] = y$ ist, gehört zu Σ'.
7. Ein II. Ding a, für das stets $[a(xy)] = [xy]$ ist, gehört zu Σ'.
8. Wenn die II. Dinge a, b zu Σ' gehören, so gehört ein II. Ding c, für das stets $[cx] = ([ax]\,[b\,x])$ ist, zu Σ'.
9. Wenn die II. Dinge a, b zu Σ' gehören, so gehört ein II. Ding c, für das stets $[cx] = [a[bx]]$ ist, zu Σ'.
10. Ein II. Ding a, für das $[a(xy)] \neq A$ mit $x = y$ gleichbedeutend ist, gehört zu Σ'.
11. Ein II. Ding a, für das $[ax] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß x ein I. II. Ding ist, gehört zu Σ'.

(Daß solche II. Dinge überhaupt vorhanden sind, garantieren die entsprechenden Axiome II. 1.—IV. 1.) Von hier an haben wir also hinreichende, aber nicht mehr notwendige Bedingungen. Und damit schwindet die Möglichkeit, ein kleinstes

---

[1]) *Löwenheim*, Über Möglichkeiten im Relativkalkül (Mathemat. Annalen 76, 1915, *S.* 447—470); *Skolem*, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweiskraft mathematischer Sätze ...); Didenskapsselskapets Skrifter 1. Mat. Naturv. Klasse 1920. No. 4. Christiania; Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Mathematiker Kongressen i Helsingfors, Helsingfors 1923, Seite 217—232); Vgl. hierzu *Fraenkel*, Zitat von Fußnote 6.

In den beiden ersten Arbeiten wird der Satz allgemein bewiesen, dessen Spezialfall für die Mengenlehre den Gegenstand des folgenden § 2 bildet: Jedes überhaupt erfüllbare Axiomensystem ist bereits durch abzählbare Systeme erfüllbar. In der letzten Arbeit zieht *Skolem* hieraus die (ungünstigen) Konsequenzen für die Mengenlehre.

Trotzdem also der Inhalt der §§ 2 und 3 nicht neu ist, glauben wir, daß es nicht unnütz ist, auf diesen interessanten Umstand wieder eingehend hinzuweisen.

Teilsystem zu finden, daß den Axiomen genügt: Denn die zu formulierenden Bedingungen gehen alle zu weit.

Eine weitere Schwierigkeit tritt bei den Axiomen III. 2, 3. auf. Betrachten wir z. B. II. 2; es lautet so:

> Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Es gibt dann ein II. Ding b in Σ', so daß für alle I. Dinge x in Σ' $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß für alle I. Dinge y in Σ' $[a(xy)] = A$ ist.

Wieder geht Σ' in die Definition des b ein, das zu ihn gehören soll; denn um zu wissen, ob etwas „für alle I. Dinge y in Σ'" gilt, muß man ja ganz Σ' kennen. Indessen kann man diese Schwierigkeit überwinden, indem man erzwingt, daß in den in Betracht kommenden Fällen „für alle I. Dinge y in Σ'" dasselbe bedeutet wie „für alle I. Dinge y". Und das erreicht man einfach folgendermaßen:

(Vorbereitende Bedingung.)

12. Das II. Ding a und das I. Ding x sollen beide zu Σ' gehören. Wenn es überhaupt ein I. Ding y mit $[a(xy)] \neq A$ gibt, so soll auch mindestens ein derartiges y zu Σ' gehören.

Und nun können wir für III. 2. verlangen (und zwar wieder wie bei II. 1.—IV. 1. etwas zu viel):

(Hauptbedingung.)

13. Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Ein II. Ding b, für das stets $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß stets $[a(xy)] = A$ ist, gehört dann zu Σ'.

Bei III. 3. ist die Lage dieselbe. Damit hier die „Einzigkeit" des y gefaßt werde, muß zur „vorbereitenden Bedingung" 12. noch die folgende hinzugenommen werden.

14. Das II. Ding a und die I. Dinge x, y mögen zu Σ' gehören. Wenn $[a(xy)] \neq A$ ist und wenn ein y' mit $[a(xy')] \neq A$, $y' \neq y$ existiert, so gehört auch ein solches y' zu Σ'.

Und nun lautet die Hauptbedingung:

15. Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Dann gehört ein II. Ding b zu Σ', für welches immer, wenn für ein einziges y $[a(xy)] \neq A$ ist, $[bx] = y$ ist.

Bei Axiom I. 4. brauchen wir wieder eine „vorbereitende Bedingung":

16. Die II. Dinge a, b gehören zu Σ',. Wenn es ein x mit $[ax] \neq [bx]$ gibt, so gehört auch ein solches x zu Σ'.

Eine Hauptbedingung ist hier nicht nötig, da keine Existenz verlangt wird. (Alle diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.)

Schließlich bleiben die Axiome IV. 2., V. 1.—3. übrig. Hier müssen auch entsprechende vorbereitende Bedingungen 17.—19. (für IV. 2., da 3 mal „alles" und „es gibt" superponiert sind), 20.—21. (für V. 1.), 22 (für V. 2.), 23 (für V. 3.) formuliert werden, die wir nicht einzeln anführen wollen.

Was die Hauptbedingungen betrifft, so ist für die eine Hälfte von IV. 2. (wenn a kein I. II. Ding ist, so gibt es ein b, so daß usw.) eine notwendig. Sie lautet so

24. a sei ein II. Ding, das kein I. II. Ding ist, und gehöre zu Σ'. Dann gehört ein II. Ding b zu Σ', für welches zu jedem x ein y mit $[ay] \neq A$, $[by] = x$ existiert.

Für die andere Hälfte von IV. 2. (wenn es ein b gibt, für welches usw. so ist a kein I. II. Ding), ist aber gar keine Hauptbedingung nötig. Der Grund ist derselbe wie bei Axiom I. 4.: Es wird ja keine Existenz gefordert.

Bei den Axiomen V. 1.—3. schließlich brauchen wir auch keine Hauptbedingungen. Denn hier werden zwar Existenzen gefordert, aber Existenzen von I. II. Dingen. Daß nun $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge von den geforderten Eigenschaften existieren, folgt bereits aus den Axiomen der Gruppen I.—IV., d. h. für Σ' aus den Bedingungen 1.—19, 24. Da aber diese $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge in Σ sicherlich I. II. Dinge sind (Σ erfüllt ja die Axiome der Gruppe V.), so müssen sie auch $\mathrm{I.\,II.}_{\Sigma'}$ Dinge sein. ($\mathrm{I.\,II.}_{\Sigma'}$ Dinge sind ja definiert, als zu Σ' gehörende I. II. Dinge.)

Zusammenfassend können wir also sagen:

Dazu, daß Σ' den Axiomen genüge, ist es jedenfalls hinreichend, daß die Bedingungen 1.—24. erfüllt seien. Jede der Bedingungen 1.—24. hat die folgende Form:

> Die I. oder II. Dinge $u_1, u_2 \ldots u_n$ sollen zu Σ' gehören. Wenn sie der Bedingung $A(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ genügen und wenn es I. oder II. Dinge v gibt, die der Bedingung $B(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$ genügen, so gehört auch ein solches v zu Σ'.

In die Bedingungen A, B gehen dabei (außer $u_1, u_2, \ldots, u_n$, bzw. $u_1, u_2, \ldots u_n, v$) bloß Eigenschaften von Σ ein, Σ' kommt in ihnen nicht vor. Für gewisse Bedingungen 1, 3, 5—7, 10—11) ist dabei $n = 0$ zu setzen, d. h. es wird verlangt: Wenn ein v mit der Eigenschaft $B(v)$ existiert, so gehöre ein solches v zu Σ'.

Solchen Bedingungen kann man aber leicht genügen. Es gibt offenbar ein kleinstes Σ', das diesen Bedingungen genügt (welche aber weitergehend sind, als die ursprüngliche Forderung, daß Σ' den Axiomen genüge). Man hat nur das folgende Verfahren anzuwenden:

> Man nehme alle Bedingungen 1.—24., in denen $n = 0$ ist (siehe oben), und bilde die durch dieselbe postulierten I. oder II. Dinge $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$. — Sodann nehme man alle Bedingungen 1.—24., in denen $n \geqq 1$ ist (d. h. die wirklich variable $u_1, u_2, \ldots, u_n$ enthalten). Man setze sie in alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ ein, und bilde die dann postulierten I. oder II. Dinge $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\mu'}$. Man setze in sie dann alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots v_\mu; v'_1, v'_2 \ldots, v'_{\mu'}$ ein, und bilde dann die postulierten I. und II. Dinge $v''_1\, v''_2, \ldots, v''_{\mu''}$. — usw., usw.

Wenn wir nun Σ' als das System der Dinge $v_1, v_2, \ldots, v_\mu; v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\mu'}; v''_1, v''_2, \ldots v''_{\mu''}; \ldots$ wählen, so haben wir ein System, das unseren Axiomen genügt.

§ 3. Die Abzählbarkeit.

Das Σ', das wir im § 21 gewonnen haben, hat eine höchst überraschende Eigenschaft: Es ist offenbar abzählbar. Dabei ist auf den Sinn des Wortes „abzählbar" zu achten. Σ' ist nicht abzählbar in dem Sinne, daß es als Bereich im Systeme Σ (oder Σ') die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, d. h. auf die erste unendliche Ordnungszahl ω durch ein II. Ding aus Σ ein-eindeutig abgebildet werden kann[1]).

[1]) Dies ist in der Tat gleichbedeutend mit „abzählbar", weil nach unserer Definition der Ordnungszahl ω eine abzählbare Menge darstellt. (Vgl. das Zitat von Fußnote [1]) S. 223.)

Davon kann natürlich keine Rede sein, denn Σ' ist ja überhaupt kein Bereich, es enthält auch II. Dinge (siehe Kapitel 1). Außerdem sind Teile von ihm (nämlich alle unabzählbaren Teilbereiche von Σ') „unabzählbar" in dem Sinne, den dieser Begriff im System Σ' hat. Aber es ist „abzählbar", wenn wir es als Bereich in dem „höheren" Systeme P betrachten (und die vorhin erwähnten Teilbereiche alle mit ihm), oder mit den Worten der naiven Mengenlehre: Seine Elemente können *de facto* in eine Reihe geschrieben werden.

Es ist wesentlich, hier alle Mißverständnisse auszuschalten. Im System Σ' liegen eine Reihe von Mengen und von Abbildungen vor. Diese genügen den formalen Anforderungen der Mengenlehre. Die Mengen haben alle möglichen Mächtigkeiten. Aber alle diese Mächtigkeiten sind scheinbar, sind nur Mächtigkeiten relativ zur Gruppe der Abbildungen des Systems. Denn das System Σ' umfaßt (trotz seiner formalen Vollständigkeit) noch lange nicht alle denkbaren Abbildungen: Ein „höheres" System P muß bereits neue Abbildungen enthalten, so z. B. solche, die alle (unendlichen) Mengen in Σ' auf einander abbilden. Denn als Teile des (in P) abzählbaren Σ' sind ja alle abzählbar, also (in P) gleichmächtig. Man könnte vielleicht glauben, es bestände hier ein Widerspruch zum Axiom IV. 2.: Kann doch das II. Ding ω (oder irgendein unendliches I. II. Ding) auf den Bereich aller I. Dinge abgebildet werden, und es ist trotzdem ein I. II. Ding! Aber es ist was die Antwort sein muß: Die fragliche Abbildung gehört zu P (ist II_P Ding) und nicht zu Σ', und nur auf II. Dinge aus Σ' bezog sich naturgemäß das Axiom IV.2.

Diese Relativität der Mächtigkeiten ist ein sehr krasses Zeugnis dafür, wie weit die abstrakt-formalistische Mengenlehre von allem, was anschaulich ist, liegt. Man kann wohl Systeme Σ' herstellen, die durch Erfüllen gewisser formaler Axiome die Mengenlehre bis in alle Details treu repräsentieren, die also eigentlich die formale Mengenlehre selbst sind. Es treten in ihnen alle bekannten Mächtigkeiten auf in ihrer unendlich großen Anzahl, die größer als jede Mächtigkeit ist. Aber sobald man feinere Untersuchungsinstrumente ansetzt („höhere" Systeme P) löst sich das alles in nichts auf. Von allen Mächtigkeiten bleibt nichts als die endlichen und die abzählbare übrig. Nur diese haben realen Sinn, alles andere ist formalistische Fiktion.

Dieser Umstand ist übrigens keineswegs etwa eine spezielle Eigenschaft unserer Axiomatik: Das im § 2 angewandte Verfahren könnte man fast genau so anwenden (vgl. die Arbeiten von *Löwenheim* und *Skolem*), wenn an Stelle unserer Axiome irgendwelche andere logische Bedingungen gesetzt würden. Die soeben ausgeführte Konstruktion drückt jeder axiomatischen Mengenlehre den Stempel der Irrealität (oder mit einem viel benützten Worte „Imprädikativität") auf.

§ 4. Mengenlehrenmodelle.

Wir wissen jetzt: wenn es überhaupt möglich ist ein System Σ zu finden, welches den Axiomen genügt, so kann man auch ein solches System finden, in dem es nur abzählbar viele I. Dinge und abzählbar viele II. Dinge gibt. Dies läßt es aber als möglich erscheinen, daß man rein arithmetisch ein Modell für die Mengenlehre findet. Man könnte etwa den folgenden Ansatz machen:

Die I. Dinge seien die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots$.

Die II. Dinge seien alle Funktionen f aus einer Menge Φ von Funktionen (Φ ist selbstverständlich ebenfalls abzählbar), deren Definitionsbereich und Wertevorrat die ganzen Zahlen sind.

(x, y) sei eine gegebene Funktion $p\,(xy)$, definiert für $x, y = 1, 2, \ldots$.

$[xy]$ sei $f\,(y)$ wenn x die Funktion f aus Φ und $y = 1, 2, \ldots$ ist.

A sei 1, B sei 2.

Es ist aber noch eine Korrektion bezüglich der I. II. Dinge anzubringen; denn so wie der Ansatz zunächst lautet, sind die I. Dinge von den II. Dingen alle verschieden. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir nehmen an, daß alle I. Dinge auch I. II. Dinge sind. Dieser Erweiterung des Axioms IV. 1. ist unwesentlich; man kann zeigen: sind die Axiome widerspruchfrei, so sind sie es auch mit dieser Erweiterung. Dann müssen wir einfach zu jedem I. Dinge, d. h. zu jeder Zahl $1, 2, \ldots$ angeben, mit welchem II. Ding, d. h. mit welcher Funktion aus Φ es zu identifizieren ist. Zu diesem Zwecke brauchen wir eine weitere 2-Variablen-Funktion $\varphi(xy)$; dann werden wir der Zahl x die Funktionen $\varphi(xy)$ (als Funktion von y betrachtet) zuordnen, die also zu Φ gehören muß. Also:

Die Funktion $\varphi\,(xy)$ sei definiert für $x, y = 1, 2, \ldots$.

Für festes x ist $\varphi\,(xy)$ Funktion von y, als solche gehöre es für jedes x zu Φ.

Es fragt sich noch, welchen Bedingungen die beiden Funktionen p, φ und die Menge von Funktionen Φ (nur sie sind noch im Ansatze willkürlich) zu genügen haben, damit die Axiome erfüllt seien.

Man kann zunächst zeigen, daß man für $p(xy) = (xy)$ z. B. $2^{x-1}\,(2y-1)$ wählen darf (aus $p\,(x_1 y_1) = p\,(x_2 y_2)$ folgt $x_1 = x_2, y_1 = y_2$), denn diese Funktion spielt keine besonders tiefliegende Rolle. Wesentlich aber ist die Wahl von $\varphi\,(x\,y)$ und von Φ.

Nun kann man die Bedingungen für diese beiden formulieren. Wir wollen das hier nicht mehr im einzelnen durchführen, sondern nur einiges über ihre Form angeben.

Die Bedingungen werden (gegenüber denen im § 3) dadurch wesentlich verschärft und kompliziert, daß nun das System nicht mehr Teil eines größeren ist, welches die Axiome erfüllt (wie Σ' von Σ). Sie werden infolgedessen auch nicht mehr den einfach erfüllbaren Charakter haben. Besonders bedenklich wird das Axiom IV. 2. Denn es fordert, daß keine Funktion, die eine Menge $\varphi\,(x\,y) \neq 1$ (x fest, y das Element) auf die Menge aller Zahlen abbildet, zu Φ gehören darf. Während nun die meisten Bedingungen dem Φ eine untere Grenze vorschreiben (d. h. verlangen, daß gewisse Funktionen zu Φ gehören müssen) schreibt ihm dieses Axiom eine obere Grenze vor. Man hat zunächst gar keine Garantie dafür, ob die beiden Grenzen nicht kollidiren, was neue Antinomien bedeuten würde. Das ist indessen kein so schwerwiegendes Argument gegen die Wahl des Axioms IV. 2., als man zunächst denken möchte. Denn an Stelle von IV. 2. müßte man ja doch zu allermindest das *Zermelo*sche Aussonderungs-Axiom annehmen (und das wäre noch für viele Zwecke gar nicht hinreichend) etwa in folgender Form:

IV. 2. Wenn b ein I. II. Ding und a ein II. Ding ist, und wenn $a \lesssim b$ ist, so ist auch a ein I. II. Ding.

Dieses Axiom entspricht dem Aussonderungsaxiom. Denn daß a ein II. Ding ist, bedeutet dasselbe, was *Zermelo* als „durch eine definite Eigenschaft bestimmt" bezeichnet. Zusammen mit $a \lesssim b$, wo b ein I. II.-Ding ist, muß hieraus die Zulässigkeit von a folgen, d. h. daß a ein I. II. Ding ist.

Und dieses (absolut unvermeidliche) Axiom würde, wie man sich leicht überzeugt, genau dieselben Schwierigkeiten machen wie IV. 2. An der Stelle von IV. 2. muß eben unbedingt ein spezifiisch „imprädikatives" Axiom stehen; und ein derartiges Axiom muß bei der Konstruktion eines Modelles Schwierigkeiten machen.

Die Bedingungen, die in dieser Art gewonnen werden, sind so unübersichtlich und kompliziert, daß wir kein Modell angeben können, ja gar nicht feststellen können, ob sie überhaupt verträglich sind obgleich die Konstruktion durchführbar sein muß, falls die Mengenlehre auf nicht-intuitionistischer Basis überhaupt möglich ist.

Schließlich möchte ich noch eines bemerken. Wenn man die Axiome der Gruppe V. (Unendlichkeit) fortläßt, so reichen die übrig bleibenden Axiome zur Begründung der Theorie der endlichen Zahlen aus; ja selbst die Theorie der reellen Zahlen wird im reduziertem Umfange möglich: Sie sind unendliche Bereiche, also keine Mengen (I. II. Dinge). Man erhält eine Mathematik, in der die Theorie der reellen Zahlen auf Grund der Fundamentalfolgen möglich ist, die Konvergenzsätze für Folgen und Reihen gelten, die Theorie der stetigen Funktionen, die Algebra, Analysis, und das *Riemann*sche Integral möglich sind. Sinnlos hingegen wird der *Weierstraß*sche Satz von der oberen Grenze (für Zahlenmengen, nicht Folgen), da Mengen aus II. Dingen unmöglich sind, ferner der allgemeine Funktionsbegriff die Wohlordnung des Kontinuums, das *Lebesgue*sche Integral.

Da man es hierbei nur mit endlichen Mengen zu tun hat (alle I. II. Dinge sind ja endlich), so kann man hierfür ein Modell angeben. $\Phi(x\,y)$ muß so gewählt werden, daß man alle Funktionen, die nur für endlich viele Zahlen $\neq 1$ sind, darstellen kann, z. B.:

Die Primzahlen seien der Größe nach geordnet:

$$p_1, p_2, \ldots .$$

Wenn $x = \prod_{n=0}^{\infty} p_n^{a_n}$ ist (alle $a_n \geqq 0$, nur endlich viele > 0), so ist:

$$f(x\,y) = a_y + 1.$$

Die Wahl des Φ ist dann leicht, man hat nur konstruktive Bedingungen (in diesem Falle ist nämlich IV. 2. automatisch erfüllt, die Kollision der beiden, obenerwähnten Grenzen für Φ findet nicht statt), wie man ziemlich leicht einsehen kann.

Man erhält so, als weiteren Beleg dafür, was im § 3 von der Abzählbarkeit gesagt wurde, ein abzählbares Modell für eine Pseudo-Mathematik, die mit der „wirklichen" in einem großen Teile der wesentlichen Punkte übereinstimmt. Für die „große" Mengenlehre ist zwar das Modell unbekannt, aber es muß auch hier existieren, falls eine formalistische Mengenlehre überhaupt möglich ist.

§ 5. Kategorizität.

Wir müssen nun noch untersuchen, ob unser Axiomensystem kategorisch ist, d. h. ob es das von ihm beschriebene System eindeutig bestimmt [1]. Wir wollen diesen Begriff näher beschreiben.

Es ist bekannt, daß aus den euklidischen Axiomen ohne das fünfte Postulat noch nichts über dieses fünfte Postulat folgt. D. h.: Es kann zwei Systeme geben, die beide diesen Axiomen genügen, von denen aber das erste dem genannten Postulate genügt, das zweite nicht. Im Gegensatze hierzu kann in der regelrecht axiomatisierten Geometrie so etwas niemals geschehen; ein geometrischer Satz, der in einem den geometrischen Axiomen genügenden Systeme wahr ist, ist es auch in jedem anderen. (Daß die Axiome der Geometrie letzten Endes von denen der Mengenlehre abhängen — wegen der „Stetigkeit" —, davon wollen wir zunächst absehen.) Daß dies so ist, beruht auf dem folgenden Satze:

(Isomorphismus)

A_1, A_2 seien zwei Systeme, die den geometrischen Axiomen genügen. Es gibt dann eine ein-eindeutige Abbildung von A_1 auf A_2, bei der die den Axiomen zugrunde liegenden Beziehungen erhalten bleiben, d. h.: bei der ineinander liegende Punkte und Geraden, streckengleiche Strecken, kongruente Dreiecke usw. in ebensolche übergehen (d. i. der „Isomorphismus").

Aus diesem leicht zu beweisendem Satze folgt offenbar: ist ein mit Hilfe dieser Grundbeziehungen formulierter Satz in A_1 erfüllt, so ist er es auch in A_2.

Ein Axiomensystem von dieser letzteren Art, in dem ein dem angegebenen Satze analoger Isomorphismus-Satz gilt, bestimmt also die logischen Eigenschaften der von ihm beschriebener Systeme ganz eindeutig, es heißt *kategorisch*. Ist nun das System unserer Axiome derart?

Dies ist höchst wichtig. Denn wir wissen ja bloß, daß die bereits erledigten Sätze der Mengenlehre aus ihm folgen. Die unerledigten aber, z. B. das Kontinuum-Problem, könnten (wenn die Kategorizität fehlt) in einem ihnen genügenden Systeme richtig, im anderen falsch sein. D. h. es wäre überhaupt unsicher, ob diese Axiome zur Erledigung z. B. des Kontinuum-Problems hinreichen.

Daß die Axiome in der jetzigen Form viel zu weit sind, um kategorisch zu sein, ist klar; wir wissen ja z. B. nicht, ob es I. Dinge gibt, die keine I. II. Dinge sind; ob A und B Mengen sind; ob $(A\ B) = A$ oder $\neq A$ ist; usw. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir verlangen (man kann zeigen, daß diese Axiome keine Widersprüche erzeugen, falls die früheren widerspruchsfrei waren):

VI. 1. Alle I. Dinge sind I. II. Dinge. (IV. 1. wird hierdurch überflüssig.)

2. Es ist $A = O$, $B = (O)$. (O ist die Menge ohne Elemente, (O) enthält nur O.)

3. Es ist $(u, v) = ((u, v), (u))$. $((\alpha, \beta)$ ist die Menge mit den Elementen α, β. Aus $((u_1, v_1), (u_1)) = ((u_2, v_2), (u_2))$ folgt, wie man leicht zeigt $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.)

[1]) Der Begriff der „Kategorizität" stammt von *O. Veblen* (Transactions of the American math. Society 5, 1914, S. 346).

Ein weiteres Hindernis, auf welches bereits im Kapitel 1. hingewiesen wurde, die Möglichkeit der Existenz „unerreichbarer" Mengen, wie z. B. die „absteigenden Mengenfolgen" (siehe § 1.) können wir auch ausschalten. Wir haben im § 1 die Motive auseinandergesetzt, die es unmöglich machen dies direkt durch ein „Beschränktheitsaxiom" zu erreichen. Es genügt aber formal auch das Ausschließen der „absteigenden Mengenfolgen" (auf den Beweis gehen wir hier hier nicht ein). Also:

4. Es gibt kein II. Ding a mit der folgenden Eigenschaft:

Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) n

$[a, n + 1] \varepsilon [a, n]$.

(Auch hier kann gezeigt werden, daß dieses Axiom VI. 4. keine neuen Widersprüche erzeugen kann. — Eigentlich wäre noch eine weitere Quelle der Nicht-Kategorizität auszuschalten, nämlich die vielleicht mögliche Existenz von sog. regulären Anfangszahlen mit Limes-Index. Dies führt aber zu sehr ins Gebiet der speziellen Mengenlehre, um hier behandelt zu werden; obendrein kann auch diese Schwierigkeit beseitigt werden.)

Nun ist aber unser Axiomensystem auch nach der Hinzunahme dieser Axiomengruppe VI. in Wirklichkeit höchstwahrscheinlich immer noch nicht kategorisch; die Konstruktion der erforderlichen isomorphen Abbildung zweier den Axiomen genügenden Systeme Σ_1, Σ_2 auf einander gelingt trotz alledem nicht. Sie scheitert im wesentlichen an dem Umstande, daß das Axiom VI. 4. nicht alle „absteigenden Mengenfolgen" ausschließt, sondern nur die, die die Normalform der Folgen im System Σ_1 (bzw. Σ_2) $[a\,1]$, $[a\,2]$, $[a\,3]$, ... (a ein II. Ding in Σ_1 bzw. Σ_2) haben. Dann können aber natürlich noch immer welche „außerhalb des Systems" übrigbleiben. Im Interesse der isomorphen Abbildung müßte man auch diese verbieten, d. h. wieder zu einem Systeme P, das „höher" als beide Systeme Σ_1, Σ_2 ist, greifen. Und das ist bei dem Axiome VI. 4., das sich auf Σ_1 bzw. Σ_2 *allein* zu beziehen hat, unmöglich.

Nach alledem scheint also überhaupt keine kategorische Axiomatisierung der Mengenlehre zu existieren; denn die Schwierigkeit mit dem Beschränktheitsaxiom und den „höheren" Systemen wird wohl keine Axiomatik vermeiden können. Und da es kein Axiomensystem für Mathematik, Geometrie, usw. gibt, das nicht die Mengenlehre voraussetzte, so wird es wohl überhaupt keine kategorisch axiomatisierten unendlichen Systeme geben. Dieser Umstand scheint mir ein Argument für den Intuitionismus zu sein.

Im Anschluß an die Kategorizitätsfrage sei noch das folgende erwähnt. Es seien zwei Systeme Σ_1, Σ_2 gegeben, a_1, a_2 seien Mengen in ihnen; und die Elemente von a_1 in Σ_1 seien genau dieselben wie die Elemente von a_2 in Σ_2. Wir wissen, daß es dann sehr wohl geschehen kann, daß a_1 in Σ_1 unabzählbar ist, aber a_2 in Σ_2 nicht (nämlich wenn Σ_2 „höher" als Σ_1 ist). Es ist aber vielleicht sogar auch mit der Endlichkeit so. Die Definition der Endlichkeit ist jedenfalls infolge des Auftretens des Begriffes „alle" und „es gibt" in bezug auf das ganze System (Σ_1 bzw. Σ_2) derartig, daß man nichts Bestimmtes sagen kann [1]). Ebenso steht es mit der Wohlord-

[1]) **Die Endlichkeit kann z. B. folgendermaßen definiert werden:**

nung. Man hat also die Relativität der Mächtigkeiten nicht nur nach oben (vom Abzählbaren) hin in Betracht zu ziehen, (siehe Kapitel 3), sondern auch nach unten hin (im Endlichen). Elementare Begriffe, wie Endlichkeit und Wohlordnung, hängen jedenfalls vom gewählten System ab (Σ_1 oder Σ_2) ab; und es ist nicht ausgeschlossen, daß dieses Abhängen von wesentlichem Charakter ist: daß eine Menge a im Systeme Σ_1 wohlgeordnet (bzw. endlich) zu sein scheint und sich im „feineren" Systeme Σ_2 als nicht wohlgeordnet (bzw. unendlich) herausstellt, bloß weil ein Teil b von ihm, der kein erstes Element hat, im Systeme Σ_1 keine Menge war, also dort nicht bemerkt wurde, es aber im Systeme Σ_2 ist. (Analog bei der Endlichkeit).

Ja letzten Endes wäre es denkbar, daß *ein jedes* System Σ_1 noch derart „verfeinert" werden kann, daß sich endliche (bzw. wohlgeordnete) Mengen als unendlich (bzw. nicht wohlgeordnet herausstellen. (Bei der Unabzählbarkeit ist ja das sicherlich der Fall.). Dann bliebe auch vom Begriffe der Endlichkeit (ebenso wie von dem der Unabzählbarkeit) nichts als die formale Einkleidung übrig. Es ist schwer zu sagen, gegen was das mehr sprechen würde; gegen den vom Intuitionismus verfochtenen anschaulichen Charakter der Endlichkeit oder gegen ihre durch die Mengenlehre gegebene Formalisierung.

Es ist eigentlich ein Einwand gegen beide: tritt doch hier eine neue Schwierigkeit auf, die von den durch *Russel* und *Brouwer* angedeuteten wesentlich verschieden ist. Das abzählbar Unendliche als solches ist unanfechtbar: es ist ja nichts weiter als der allgemeine Begriff der positiven ganzen Zahl, auf dem die Mathematik beruht und von dem selbst *Kronecker* und *Brouwer* zugeben, daß er von „Gott geschaffen" sei. Aber seine Grenzen scheinen sehr verschwommen und ohne anschaulich-inhaltliche Bedeutung zu sein. Nach oben hin, im „Unabzählbaren", ist dies nach *Löwenheims* und *Skolems* Untersuchungen ganz sicher; nach unten hin, im „endlichen", ist es zumindest sehr plausibel: fehlt doch die Kategorizität sowie jeder Anhaltspunkt für die Bestimmtheit der Definition des „Endlichen". Außerdem *sind hier auch die Hilbertschen Ansätze machtlos*: denn dieser Einwand betrifft nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die — Eindeutigkeit (Kategorizität) der Mengenlehre.

Wir können zunächst nicht mehr tun als feststellen, daß hier ein weiteres Bedenken gegen die Mengenlehre vorliegt und daß vorläufig kein Weg der Rehabilitation bekannt ist.

---

a sei ein Bereich. a heißt endlich, wenn es keinen Bereich b gibt, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

b hat Elemente die $\lesssim a$ sind. Wenn x ein Element $\lesssim a$ von b ist, so hat b auch Elemente, die $\lesssim a$ und dabei $< x$ sind.