Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre.

Von *J. v. Neumann* in Berlin.

Einleitung.

1. In zwei Arbeiten [1]) habe ich ein Axiomensystem der allgemeinen Mengenlehre angegeben, und daraus die Haupttatsachen der Mengenlehre hergeleitet. Dieses Axiomensystem ging dabei an zwei Punkten wesentlich über die *Zermelo-Fraenkel*sche Axiomatisierung hinaus.

A. Während *Zermelo-Fraenkel* das Aufstellen von Mengen nur dann gestatteten, wenn der Umfang derselben nicht „zu groß" war, dürfen hier die Mengen ruhig „zu groß" sein — aber sie sind nur dann als Elemente bei der Bildung anderer Mengen verwendbar, wenn sie nicht „zu groß" sind. Zur Vermeidung der bekannten Antinomien (*Russell*, *Burali-Forti*) reichte dies nämlich auch aus, und es ist für gewisse Zwecke so angenehmer (vgl. §§ 2, 3. Kap. I loc. cit. I).

B. Während *Zermelo-Fraenkel* nicht genau definieren, wann der Umfang einer Menge „zu groß" ist, sondern nur durch einige Postulate untere Grenzen setzen [2]), geben wir für diesen Begriff eine genaue Definition: Eine Menge ist dann und nur dann „nicht zu groß", wenn sie von kleinerer Mächtigkeit ist als die Menge aller Dinge überhaupt (d. h. wenn sie nicht so abgebildet werden kann, daß diese vollkommen überdeckt wird). (Dies wird exakt formuliert im Axiom IV. 2. Seite 225 loc. cit. I oder Seite 675 loc. cit. II. Übrigens vgl. §§ 2, 3. Kap. I loc. cit. I).

Ein dritter, aber bloß technisch wesentlicher Unterschied ist, daß wir den Begriff der Funktion und nicht den der Menge (beide sind ja leicht aufeinander zurückzuführen[3])) zum Ausgangspunkte des Axiomatisierens wählen. Dies ist aber, wie bereits erwähnt, vom prinzipiellen Gesichtspunkte wenig wichtig.

---

[1]) „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", Journal f. Math. Bd. 154, Seite 219—240 (1923); „Die Axiomatisierung der Mengenlehre", Math. Zeitschr. Bd. 27, Seite 669—752 (1928). Diese Arbeiten sollen mit I bezw. II zitiert werden. — Ich möchte diese Gelegenheit noch benützen, darauf hinzuweisen, daß der loc. cit. II, Seite 736 verwendete Begriff der „Endlichkeit" von Herrn *A. Tarski* stammt (Fund. Math. Bd. 6, Seite 45—95 [1924]).

[2]) Etwa: Wenn eine Menge „nicht zu groß" ist, ist es auch ihre Potenzmenge nicht (Potenzmengen-Axiom), und ihre Vereinigungsmenge nicht (Vereinigungsmengen-Axiom).

[3]) Die Menge können wir als Funktion auffassen, die nur zweier Werte A, B fähig ist: sie nimmt den Wert A an, wenn das Argument nicht Element der Menge ist, und den Wert B, wenn es Element ist. Die Funktion $f(x)$ kann durch „graphische Darstellung" in eine Menge verwandelt werden: sie sei die Menge aller „Paare" $\langle x, f(x)\rangle$, wobei x alle möglichen Werte des Arguments durchläuft. (Das „Paar" ist dabei irgendeine Zuordnung, die zwei Dingen x, y ein drittes $z = \langle x, y\rangle$ auf ein-eindeutige Weise zuordnet; d. h. so daß aus $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ $x = x'$, $y = y'$ folgt; bei der gewöhnlichen, geometrischen, graphischen Darstellung, wo x, y die reellen Zahlen durchlaufen, ist z. B. $\langle x, y\rangle$ der Punkt der Ebene mit den kartesischen Koordinaten x, y. *Zermelo-Fraenkel* verwenden als „Paar" $\langle x, y\rangle$ die Menge mit den Elementen x, y, $\{x, y\}$. Wegen $\{x, y\} = \{y, x\}$ ist dies nicht ganz vollkommen [daher ihre Schwierigkeiten bei der Definition der Äquivalenz], einwandfrei wäre etwa das „Paar" $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ [vgl. Seite 239 unten loc. cit. I oder Seite 692 oben loc. cit. II]).

Es erhebt sich aber die Frage, ob unser System, dadurch daß es nach A, B wesentlich über die *Zermelo-Fraenkel*sche Mengenlehre hinausgeht, nicht an Zuverlässigkeit verliert: ob es der Gefahr von Widersprüchen nicht eher ausgesetzt ist, als diese.

Die absolute Frage der Widerspruchfreiheit, d. h. ob überhaupt eine gegebene Formalisierung der *allgemeinen* Mengenlehre mit *Gewißheit* [4]) zu keinen Widersprüchen führt, liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit: in ihr soll nur aus der vorauszusetzenden Widerspruchfreiheit eines Systems auf die des anderen geschlossen werden [5]). Die absolute Frage der Widerspruchfreiheit ist m. E. gegenwärtig überhaupt viel zu schwer, um in Angriff genommen zu werden, prinzipiell wäre hierzu wohl nur die *Hilbert*sche Beweistheorie geeignet, jedoch halte ich es für höchst unwahrscheinlich, daß die (ihrer Natur nach mathematisch-kombinatorischen) Schwierigkeiten dieser Aufgabe beim heutigen Stande der Wissenschaft überwunden werden können (wiewohl das Problem leicht formuliert werden kann). Die Hauptschwierigkeit sehe ich darin, daß wir heute keine Ahnung davon haben, warum das von *Russell* und *Zermelo* eingeführte Prinzip des „Verbietens von Mengen von zu großem Umfange", ohne welches kein allgemeiner Aufbau der Mengenlehre möglich ist [6]), *alle* Widersprüche auflöst, und daher mangels einer adäquaten Beweisidee keinen Widerspruchfreiheitsbeweis versuchen können [7]).

2. Mit A wollen wir uns nicht befassen, denn es ist eine recht harmlose Erweiterung, man übersieht wirklich leicht, daß die Antinomien nicht in dem Moment auftreten, in dem eine gewisse Menge vom bedenklichen Typus (die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, die Menge aller Ordnungszahlen usw.) gebildet wird, sondern erst wenn man untersucht, ob diese Menge Element einer anderen (die übrigens in der Regel wieder sie selbst ist) ist oder nicht. Daher ist die Erweiterung A nicht gefährlich.

Sehr wesentlich hingegen ist die Erweiterung durch B. Sie sieht auch gar nicht ungefährlich aus, dies merkt man z. B. ,wenn man sich die Methode, mit der der Wohlordnungssatz aus B (d. h. Axiom IV. 2.) gefolgert wird (vgl. Seite 223 loc. cit. I, sowie die exakte Herleitung loc. cit. II, Seite 721 [Satz 47] und Seite 726—729), vergegenwärtigt. Wir schließen dort im wesentlichen so [8]):

---

[4]) Natürlich sieht man sowohl im Zermelo-Fraenkelschen als auch in unserem System, daß die bekannten Antinomien der Mengenlehre vermieden werden, aber es könnte, so unwahrscheinlich es auch ist, noch andere, unbekannte Antinomien geben.

[5]) So wie etwa die Widerspruchfreiheit der Euklidischen Geometrie die der nicht-Euklidischen nach sich zieht.

[6]) In solchen Systemen der Mengenlehre, die die Antinomien durch andere Verbote vermeiden, sind die ganz großen Mächtigkeiten, wie $\aleph + 2^{\aleph} + 2^{2^{\aleph}} + \cdots$ u. ä. in der Regel unerreichbar.

[7]) Wenn man nicht über gewisse Mächtigkeiten hinaus will, so ist die Anwendung von Hilberts Beweistheorie wesentlich aussichtsvoller, m. E. darum, weil uns hier Russels Typentheorie den wesentlichen Grund der Widerspruchfreiheit verrät. Wie groß die Schwierigkeiten auch hier noch sind, möge man immerhin daran ermessen, daß der Widerspruchfreiheitsbeweis bis zur Mächtigkeit $\aleph$ (Kontinuum) noch immer nicht lückenlos geführt ist!

Zur Literatur der Beweistheorie vgl. *D. Hilbert*, Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 1., Seite 157—175 (1923); Math. Ann. Bd. 88, Seite 151—165 (1923); Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 65—85 (1928); *P. Bernays*, Math. Ann. Bd. 90, Seite 159—163 (1923), Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 89—92 (1928); *W. Ackermann*, Math. Ann. Bd. 92, Seite 1—35 (1926); *J. v. Neumann*, Math. Zeitschr. Bd. 26, Seite 1—46 (1927); *H. Weyl*, Handb. der Philosophie, Abt. II., A. I. (Mathematik), Seite 44—50 (1926); Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 86—88 (1928).

[8]) Der kürzeren Ausdrucksweise halber (und um nur die wesentliche Beweisidee auszudrücken) bedienen wir uns einer (im jetzigen Sinne unexakten) Terminologie, die an die der naiven Mengenlehre anlehnt — die exakte Durchführung des Gedankens steht loc. cit. II, vgl. das Zitat im Text.

Die Menge aller Ordnungszahlen ist paradox, denn sie führt zur *Burali-Forti*schen Antinomie, also ist sie „zu groß", also der Menge aller (als Elemente von Mengen zulässiger) Dinge (in der Terminologie von loc. cit. II dem Bereiche aller I-Dinge, Ω) äquivalent (eben nach B, d. h. Axiom IV. 2.). Diese Menge aller Dinge ist somit einer wohlgeordneten Menge (der Menge aller Ordnungszahlen) äquivalent, also selbst wohlordenbar; jede andere Menge ist Teilmenge von ihr, also gleichfalls wohlordenbar [9]).

Man sieht: dieser Beweisgang geht mitten durch die *Burali-Forti*sche Antinomie hindurch. Daß keine Antinomie auftritt, ist eigentlich ein Wunder, dieses „Wunder" ist eben die Möglichkeit, sich aus dem Widerspruch in den Wohlordnungssatz zu retten [10]). Die Verhältnisse liegen ganz anders, wie bei der *Russell*schen Antinomie, die durch IV. 2. systematisch ausgeschaltet wurde, und wo die durch IV. 2. verlangte Abbildung der antinomischen Menge auf die Menge aller Dinge unschwer direkt angegeben werden kann [11]). Das Ganze ist aber recht unheimlich, denn wenn uns aus der *Burali-Forti*schen Antinomie bloß eine so grundverschiedene Sache wie der Wohlordnungssatz heraushilft, so bestehen hier offenbar unvermutete Zusammenhänge, mit denen man sich unbedingt auseinandersetzen muß, ehe man zu glauben geneigt sein wird, daß das Prinzip B, d. h. das Axiom IV. 2., wirklich zu keinen neuen Antinomien Veranlassung gibt.

Das Axiom IV. 2. leistet eben sehr viel, eigentlich zu viel: enthält es doch (in der *Zermelo-Fraenkel*schen Terminologie) die Axiome von den Elementarmengen, der Aussonderung, der Ersetzung und der Multiplikation (= Auswahlprinzip = Wohlordnungssatz); und dabei geht es über die eigentliche Mengenlehre hinaus (da es verlangt, daß alle Mengen, deren Mächtigkeit kleiner ist, als die der Gesamtheit aller Dinge überhaupt, noch als legitime Bildungen angesehen werden dürfen). Wir müssen also erörtern, ob seine Widerspruchfreiheit nicht noch problematischer ist, als die einer nicht wesentlich über den notwendigen *Cantor*schen Rahmen hinausgehenden Axiomatisierung der Mengenlehre.

3. Der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit ist, folgendes zu zeigen: wenn die axiomatische Mengenlehre in dem Umfange, wie er dem *Cantor*schen Aufbau der

[9]) Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß dieses (an und für sich recht anfechtbare) Räsonnement nicht als Beweis, sondern als Skizze der Idee eines (a. a. O. durchgeführten) Beweises anzusehen ist.

[10]) D. h.: bei der Herleitung des *Burali-Forti*schen Widerspruches (die Menge aller Ordnungszahlen ist „zu groß") bleibt eine Möglichkeit des Entschlüpfens offen (Äquivalenz der Menge aller Ordnungszahlen mit der Menge aller Dinge); aber dann kann das ganze Räsonnement offenbar als Beweis per absurdum für das Eintreten dieser Möglichkeit angesehen werden.

[11]) Nämlich so: Sei 0 die leere Menge, $\{x\}$, $\{x, y\}$ die Menge mit dem einzigen Element x bzw. den zwei Elementen x, y. Die Menge $\{\{x, y\}\}$ enthält sich selbst gewiß nicht (es sei $x \neq y$), da sie genau ein Element hat, ihr einziges Element $\{x, y\}$ aber zwei. Ferner ist $\{x\}$ gewiß von 0 verschieden (da $\{x\}$ ein Element hat, und 0 keins). Somit ist

$$M_x = \{\{0, \{x\}\}\}$$

für jedes x eine Menge, die sich nicht selbst enthält. Weiter folgt aus $M_x = M_y$ $x = y$, denn die Vereinigungsmenge der Vereinigungsmenge von M_x ist $\{x\}$ („Vereinigungsmenge von M" heißt: Summe aller Elemente von M), also bestimmt M_x $\{x\}$, und somit auch x. Daher ist bereits ein Teil der Gesamtheit (in der Terminologie von loc. cit. II: des Bereiches) aller Mengen (d. h. aller „nicht zu großen" Mengen), die sich nicht selbst enthalten, mit der Gesamtheit aller x überhaupt äquivalent. (Nämlich die aller M_x).

Man entschuldige unser ständiges Operieren mit der dem Paradoxen nah verwandten „Gesamtheit aller Mengen, die sich nicht enthalten", u. a. (direkt paradox ist sie allerdings nicht, solange sie nicht selbst als Menge und Element anderer Mengen angesehen wird); daß dies nicht ernstlich gefährlich ist, sieht man daran, daß es mühelos z. B. in unserer axiomatischen Mengenlehre ebenso ausgeführt werden kann. Wir benutzen die Terminologie der naiven Mengenlehre eben nur zur Abkürzung.

Mengenlehre entspricht (der im wesentlichen dadurch charakterisiert werden kann, daß es zu jeder [nicht „zu großen"] Menge von Mächtigkeiten [nicht „zu großer" Mengen] eine noch größere Mächtigkeit [die noch immer zu einer nicht „zu großen" Menge gehört] gibt) widerspruchfrei ist, so ist auch unser Axiomensystem widerspruchfrei — insbesondere also sein, über die *Cantor*sche Mengenlehre hinausgehender Bestandteil B (Axiom IV. 2.). Um aber mit dieser Aussage einen exakten Sinn verbinden zu können (bisher waren ja unsere Erörterungen reichlich qualitativ), müssen wir auch die Mengenlehre vom „genau *Cantor*schen Umfange" formalisieren — axiomatisieren.

Als Rahmen dieser Axiomatisierung benützen wir (schon aus dem Grunde, nachher leichter Vergleiche anstellen zu können) unser Axiomensystem, d. h. natürlich mit gewissen Abänderungen: wir müssen gerade das näher zu untersuchende Axiom IV. 2. dahin abschwächen, daß unser derart modifiziertes Axiomensystem nicht mehr über den „*Cantor*schen Umfang" der naiven Mengenlehre hinausgeht. (An allen übrigen Punkten des Axiomensystems [12]) wird ja nicht wesentlich darüber hinausgegangen — viel mehr sind dort die zur Vermeidung der Antinomien notwendigen Verbote erkennbar.) Es erhebt sich also die Frage: wie muß zu diesem Zwecke Axiom IV. 2. modifiziert (d. h. abgeschwächt) werden?

Um das festzustellen, müssen wir uns vergegenwärtigen: zu welchen Zwecken verwenden wir das Axiom IV. 2.? Es sind ihrer im wesentlichen drei: IV. 2. ersetzt uns erstens das Aussonderungsaxiom, zweitens das Ersetzungsaxiom und drittens den Wohlordnungssatz (= Auswahlprinzip = Multiplikationsaxiom). Wir müssen daher diese drei Postulate für sich formulieren, unter Weglassung des darüber (und damit über den „*Cantor*schen Umfang" der Mengenlehre) hinausgehenden Teiles von Axiom IV. 2.

Die zwei ersten kann man wohl am einfachsten so zusammenfassen:

IV. 2*. Wenn f ein I II-Ding, f' ein II-Ding, und g ein II-Ding ist, und wenn zu jedem I-Ding x mit $[f', x] \neq A$ ein I-Ding y mit $[f, y] \neq A, [g, y] = x$ existiert, so ist auch f' ein I II-Ding [13]).

Den Wohlordnungssatz dagegen sichert man sich am besten, indem man das Auswahlprinzip in der folgenden (dem Begriff des *Hilbert*schen τ entsprechenden, vgl. loc. cit. II, Seite 728, Anm. 28 und 29) Form aufstellt: das Axiom III. 3. wird zu

III. 3*. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß für jedes x, bei dem mindestens ein y (I-Ding) mit $[f, \langle x, y\rangle] \neq A$ existiert, $[g, x]$ einem solchen y gleich ist.

verschärft [14]). Das unveränderte Axiomensystem (so wie es loc. cit. I und II verwendet

[12]) Das Axiomensystem ist auf Seite 224—226 loc. cit. I oder Seite 674—675 loc. cit. II angegeben.

[13]) D. h. wenn der durch f bestimmte Bereich (d. i. seine Basis, vgl. loc. cit. II, Seite 630) „nicht zu groß" ist (also in unserer Terminologie eine Menge ist), und der durch f' bestimmte Bereich in einem (durch $x = [g, y]$ vermittelten) Bilde desselben enthalten ist, so ist auch dieser durch f' bestimmte Bereich nicht zu groß. Man sieht, daß hierin sowohl das Aussonderungs-, als auch das Ersetzungsaxiom enthalten ist.

[14]) Zum Wohlordnungssatz ist noch dieses zu sagen: In unserem unveränderten Axiomensystem ist er in der folgenden, weitestgehenden Form beweisbar: Der Bereich aller I-Dinge Ω (in der naiv-mengentheoretischen Terminologie: die Menge aller Dinge) kann wohlgeordnet worden (loc. cit. II, S. 726). Im modifizierten System (III. 3*., IV. 2*. statt III. 3., IV. 2.) können wir nur zeigen (vgl. § 2, Kap. I): jede Menge (d. h. jede „nicht zu große" Menge) ist wohlordenbar.

Man sieht also, daß im modifizierten System auch die Gültigkeit des Wohlordnungssatzes wesentlich eingeengt ist (wohl auf das von der Mengenlehre in der Regel erwartete Maß) — dies ist erwähnenswert, da wir trotzdem aus der Widerspruchfreiheit desselben die des ursprünglichen Axiomensystems schließen werden.

wurde) wollen wir mit S bezeichnen; das durch Ersetzung von III. 3., IV. 2. durch III. 3*., IV. 2.* modifizierte aber mit S*.

Das Hauptziel unserer Überlegungen ist, wie bereits angedeutet wurde, der Nachweis, daß die Widerspruchfreiheit von S* die von S nach sich zieht [15]).

4. Im § 5 des Kap. II von loc. cit. I wurde bei Untersuchung der Kategorizitätsfrage [16]) des Axiomensystems S die folgende Feststellung gemacht: Da über die Werte von A, B und den Wertverlauf von $\langle x, y\rangle$ nichts bekannt ist, und auch darüber nichts, ob alle I-Dinge auch I II-Dinge sind, muß S, um kategorisch zu werden, jedenfalls eine diese Dinge normierende Erweiterung erfahren. Diese „Normierung" erfolgte mittels der folgenden Axiome:

VI. 1. Alle I-Dinge sind I II-Dinge. (IV. 1. wird hierdurch überflüssig.)

2. Es ist $A = 0$, $B = \{0\}$.

3. Es ist $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \langle x, y\rangle\}\}$ [17]).

Ferner wurde erörtert, daß die „absteigenden Mengenfolgen" im Interesse der Kategorizität gleichfalls verboten werden müssen. Hierzu diente dort ein Axiom VI. 4., das wir hier in etwas erweiterter (verschärfter!) Form übernehmen.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst:

Als Vorgänger eines II-Dinges f bezeichnen wir alle I-Dinge x und $[f, x]$ mit $[f, x] \neq A$. In Zeichen: $x \eta f$.

(Also in der Terminologie von loc. cit. II: Die Vorgänger bilden den Bereich $B(f) + |\,[f, B(f)]\,|$. Sie sind offenbar diejenigen I-Dinge, die man zur direkten Konstruktion von f (d. h. zu seiner „naiven" Definition durch Angabe aller seiner Werte) wirklich braucht). Nunmehr lautet unser Axiom:

VI. 4. Es gibt kein II-Ding $f \neq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $x \varepsilon f$ existiert ein $y \varepsilon f$ mit $y \eta x$ und $y \neq B$ [18]).

---

[15]) Die Umkehrung ist trivial, da S* aus S folgt. Denn III. 3*. ist loc. cit. II als Satz 56 (Seite 728) bewiesen; und IV. 2*. besagt in der dortigen Terminologie (wir ersetzen f, f' durch $H = B(f)$, $H' = B(f')$, die Mengen sind, wenn f, f' I II-Dinge sind): wenn $H' \lesssim |[g, H]|$ ist, so ist mit H auch H' eine Menge, und dies folgt aus der Schlußbehauptung von § 2 in Kap. II sowie Satz 10 b (Seite 685 und 695).

[16]) Ein Axiomensystem heißt kategorisch, wenn es vollständig ist, d. h. wenn jede weitere Aussage über das System aus ihm folgt oder mit ihm im Widerspruch steht. Vgl. hierüber loc. cit. I Seite 238.

[17]) Über $0, \{x\}, \{x, y\}$ vgl. Anm. [11]); $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ hat die für den „Paarbegriff" $\langle x, y\rangle$ unbedingt erforderliche Eigenschaft, daß es für x, y und x', y' nur dann übereinstimmt, wenn $x = x'$, $y = y'$ ist (vgl. Anm. [8])).

[18]) Die wesentliche Verschärfung gegenüber der Fassung loc. cit. I (Seite 239) ist, daß dort ε statt η stand. Die Vorgänger von x durch $y \varepsilon x$ (und nicht durch $y \eta x$) zu definieren, ist für Mengen und nicht für Funktionen sinngemäß (da die ersteren durch Angabe ihrer Elemente bestimmt sind, die letzteren aber nur durch den vollen Wertverlauf). Ein unerheblicher Unterschied dagegen ist, daß das genaue Analogon von VI. 4. loc. cit. I so gelautet hätte:

Es gibt kein II-Ding a mit der folgenden Eigenschaft:

Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) n

$$[a, n + 1]\, \eta\, [a, n],\ [a, n] \neq B$$

($n + 1$ unmittelbar auf n folgend heißt loc. cit. II $n \dotplus 1$, vgl. dort Seite 741—743). Wir zogen die Formulierung des Textes vor, weil in ihr der (erst mit Hilfe eines großen Apparates aus den Axiomen S* herleitbare) Begriff der endlichen Ordnungszahl nicht benutzt wird. Man kann zeigen, daß beide Formulierungen gleichwertig sind, sie drücken beide aus, daß, wenn man von irgendeinem II-Ding f ausgehend einen Vorgänger wählt, dann einen Vorgänger des Vorgängers usw. — das Verfahren einmal stehen bleiben muß (freilich muß diese Folge von Wahlakten durch ein II-Ding erfaßt werden können, vgl. loc. cit. I, Seite 239.) — Die Notwendigkeit der Ausnahme mit B in IV. 4. ergibt sich aus der Tatsache, daß $B \eta B$ ist. Denn wegen VI. 2. ist $[B, A] = B \neq A$.

Es wurde bereits a. a. O. gesagt, daß die Hinzunahme dieser Axiome zu S keine neuen Widersprüche erzeugt.

Die Frage der Kategorizität (zu der dies nicht das letzte Wort ist, vgl. a. a. O.) soll uns hier nicht näher beschäftigen. Zum Nachweise aber, daß die Widerspruchfreiheit von S* auch die von S nach sich zieht, wird die Axiomengruppe VI. eine wichtige Rolle spielen. Wir werden nämlich die genannte Behauptung beweisen, indem wir zeigen:

α) Wenn S* widerspruchsfrei ist, so ist es auch das System S* + VI.

β) Aus S* + VI. folgt S.

Somit hat die Widerspruchfreiheit von S* auch die von S zur Folge.

(Da übrigens offenbar aus S S* folgt, vgl. Anm. [15]), folgert man leicht weiter: wenn eines der drei Axiomensysteme S*, S, S + VI. widerspruchsfrei ist, sind es alle drei — vgl. § 2 des Kap. II dieser Arbeit —, und wie man sich leicht überzeugt, ist jedes von ihnen eine wesentliche Verschärfung des vorhergehenden.)

5. Es sei noch einiges darüber hinzugefügt, wieweit im nachfolgenden die Kenntnis der citierten Arbeiten I und II vorausgesetzt wird. I ist zwar insofern von Bedeutung für diese Überlegungen, als wir immer wieder an die dort entwickelten Gedanken über das Axiomatisieren der Mengenlehre anknüpfen mußten; immerhin ist in den nun folgenden sachlichen Ausführungen ihre Kenntnis nicht notwendig. Von II werden wir dagegen häufigen Gebrauch machen, aber stets unter genauem Hinweis auf die Stelle, die gerade benötigt wird. Eine gewisse Vertrautheit mit den Methoden von II werden wir freilich bei einigen Beweisen voraussetzen müssen.

Die Widerspruchfreiheitsbeweise.

I. Beweis von α.

1. Wir müssen zuerst erörtern, welche Resultate von loc. cit. II unverändert erhalten bleiben, wenn an Stelle von S das Axiomensystem S* zugrunde gelegt wird; d. h. welche Rolle dort die Ersetzung von III. 3., IV, 2., durch III. 3.*, IV. 2.* spielt. Dazu müssen die Kap. II—IX der genannten Arbeit nacheinander betrachtet werden.

Im Kap. II wird IV. 2. nur an den drei folgenden Stellen benützt (auf III. 3. kommt es nicht an, da III. 3.* mehr verlangt): bei der Schlußbehauptung von § 2, beim Beweise von Satz 1 b, und beim Beweise von Satz 4 b. Die Schlußbehauptung von § 2 folgt aber auch aus IV. 2., wenn darin g mit $[g, x] = x$ (Axiom II. 1.) gewählt wird (sie besagt: wenn ψ I II-Ding und $\varphi \lesssim \psi$ ist, so ist auch φ I II-Ding). Bei den Sätzen 1 b, 4 b ist zu zeigen: $\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & A \end{matrix}\right\}$ ist I II-Ding; wenn H, J I II-Dinge sind, so ist es auch $H + J$. Wegen $\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & A \end{matrix}\right\} \lesssim \{u\}, H + J = \mathfrak{S}(\{H, J\})$ genügt es daher, zu zeigen, daß $\{x, y\}$ stets I II-Ding ist; die Anwendung der Schlußbehauptung von § 2 bzw. von Satz 8 b (der, wie wir sehen werden, nicht von IV. 2. abhängt) ergibt dann die Behauptung. Wenn für ein Paar x', y' mit $x' \neq y'$ $\{x', y'\}$ I II-Ding ist, so ist es jedes $\{x, y\}$ wegen $\{x, y\} = |\,[f, \{x', y'\}]\,|$, falls

$$[f, x'] = x, \; [f, y'] = y$$

ist, was offenbar durch $f = \left\{\begin{matrix} x', & - \\ x', & y \end{matrix}\right\}$ geleistet wird — wir brauchen nur Satz 10 b anzuwenden (der, wie wir sehen werden, nicht wesentlich von IV. 2. abhängt). Ein Paar

x', y' wie gewünscht zu finden ist aber leicht: für das I II-Ding f aus Axiom V. 1. existieren offenbar zwei verschiedene x', y' mit $x' \varepsilon f$, $y' \varepsilon f$, daher ist $\{x' \; y'\} \lesssim f$, also I II-Ding[19]).

Im Kap. III wird IV. 2. nur beim Beweise von Satz 10 b benutzt (wonach mit H auch $|[f, H]|$ I II-Ding ist); dies folgt aber, wie man sofort sieht, ebensogut aus IV. 2*.

In den Kap. IV und V (Theorie der wohlgeordneten Mengen und der Ordnungszahlen!) wird IV. 2. überhaupt nicht benützt.

Im Kap. VI wird IV. 2. erst in den §§ 3, 4. (Beweis des Wohlordnungssatzes!) benützt, deren Inhalt mit IV. 2. fällt. Immerhin behält Satz 56 (da er mit III. 3. gleichbedeutend ist) und der daraus folgende Satz 57 (das Auswahlprinzip!) Gültigkeit; wir werden weiter unten sehen, wie daraus (etwa mit der *Zermelo*schen Methode) der Wohlordnungssatz gefolgert werden kann.

Im Kap. VII geht IV. 2. in die §§ 2, 3 (Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten) ein, und zwar indirekt, weil hier der Wohlordnungssatz (Satz 55) benützt wird. Immerhin sind die Sätze 62 a, b, 63, 67 von diesem ohne weiteres unabhängig. Da wir weiter unten (wie bereits erwähnt), den Wohlordnungssatz für Mengen (aber nicht für Bereiche, d. h. „zu große" Mengen) aus dem gültigen Satz 56 (Auswahlprinzip!) herleiten werden, behält Satz 64 a wenigstens für Mengen seine Gültigkeit, und $\mathbf{KZ}(H)$ bleibt für Mengen sinnvoll. Infolgedessen wird 64 b gegenstandslos, 64 c bleibt richtig, und mit ihm 65, 66. Der Satz 68 gilt für Mengen H, H' unverändert, ebenso 69 und die „Trichotomie" auf Seite 735. Die Schlußbemerkung des § 3 wird aber gegenstandslos bzw. hinfällig.

In den Kap. VIII und IX schließlich wird IV. 2. überhaupt nicht benützt, hier bleibt also alles gültig, mit einer einzigen Ausnahme: beim Beweise von Satz 88 (Kap. VIII, § 4) wird $\mathbf{KZ}(H)$ gebildet, also gilt er zunächst nur für Mengen H. Die auszufüllende Lücke wäre, zu zeigen: wenn H ein Bereich, aber keine Menge (kein I II-Ding) ist, so ist es einer echten Teilmenge von sich selbst äquivalent. Hierzu genügt es (vgl. den Beweis von 88) eine mit ω äquivalente Teilmenge von H anzugeben, was ohne weiteres geht[20]).

Zusammenfassend können wir also sagen: Aus S* folgen, ebensogut wie aus S, alle Resultate der Arbeit II, mit den folgenden Ausnahmen: Der Wohlordnungssatz gilt nicht in der Form von Satz 54, 55, sondern es gilt nur der auf Mengen bezügliche Teil von 55 (56, 57 behalten ihre Gültigkeit bei). Bei der Äquivalenz kann die Mächtigkeit (die Kardinalzahl von H, $\mathbf{KZ}(H)$) nur für Mengen H definiert werden, so daß Satz 64 a nur für Mengen gilt, 64 b fortfällt, und 65—69, sowie die Trichotomie (allgemeine Vergleichbarkeit) auf Seite 735 nur für Mengen gültig sind. Die Schlußbemerkung von § 3 im Kap. VII fällt aus dem gleichen Grunde fort.

Wir müssen aber noch den Beweis des Wohlordnungssatzes im genannten Umfange nachholen.

2. Es soll gezeigt werden: wenn H eine Menge ist, so gibt es eine Wohlordnung W von H. Da uns der Satz 57 zur Verfügung steht, oder noch besser die II-Dinge g, h aus Anm. [20]) (die wir freilich jetzt, wo H eine Menge ist, auf echte Teilmengen von

[19]) f hat ja unendlich viele Elemente, und wir brauchen ein I II-Ding mit zwei Elementen!

[20]) H sei Bereich, aber keine Menge. Wenn K eine Menge $\lesssim H$ so ist $K \neq H$, $H - K \neq 0$, also gibt es ein x mit $[H - K, x] \neq A$, d. h. $[H, x] \neq A$, $[K, x] = A$. Wenn wir dies auf die Form $[f, \langle H, x\rangle] \neq A$ bringen, und III. 3.* anwenden, so gewinnen wir ein g, so daß für jede Menge $K \lesssim H$ $[g, K]$ zu H aber nicht zu K gehört. Wenn wir also ein h mit $[h, K] = K + \{[g \; K]\}$ konstruieren, so haben wir stets

$$K < [h, K] \lesssim H$$

und $[h, K]$ ist wieder Menge und hat genau ein Element mehr als K, $[g, K]$.

Wir wenden nunmehr den (von IV. 2. unabhängigen) Satz 92 a an (Möglichkeit der Definition

H beschränken müssen), können wir den Wohlordnungssatz mit einer der *Zermelo*schen Methoden ohne weiteres beweisen. g, h haben nämlich die folgenden Eigenschaften: Wenn $K < H$ ist, so ist $K < [h, K] \lesssim H$, und $[h, K]$ hat genau ein Element mehr als K, und zwar ist dieses $[g, K]$. Am allerbequemsten kommen wir aber unter Benützung des Definierens durch transfinite Induktion ans Ziel, da der die Möglichkeit desselben gewährleistende Satz 90 (loc. cit. II) von IV. 2. unabhängig ist. Diese Beweismethode zeigt übrigens auch am klarsten, warum der Beweis für Nicht-Mengen H nicht gelingt.

Wir wählen das II-Ding φ aus Satz 90 so, daß für alle **OZ** (Ordnungszahlen) x (die gleichzeitig I II-Dinge sind) und alle I II-Dinge ν

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = [g, |[\nu, x]|]$$

gilt, was offenbar ohne weiteres geht. Insbesondere haben wir dann für jedes II-Ding ψ

$$\left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi|0}{x}\right)\right\rangle\right] = \left[g, \left|\left[\left(\frac{\psi|0}{x}\right), x\right]\right|\right] = [g, |[\psi, x]|];$$

und Satz 90 behauptet daher die Existenz eines II-Dinges, für welches für alle **OZ** x

$$[\psi, x] = [g, |[\psi, x]|]$$

gilt. Es soll gezeigt werden, daß dieses ψ eine gewisse **OZ** P ein-eindeutig auf H abbildet, womit dann die Wohlordenbarkeit von H dargetan ist (es genügt $W = [\psi]\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ zu setzen[21])).

Diejenigen **OZ** x, (die gleichzeitig I II-Dinge sind), für die $|[\psi, x]| < H$ ist, nennen wir normal; die Normalität von x kann auf die Form $[j, x] \neq A$ gebracht werden[22]), und wenn wir $\mathfrak{B}(j) = P$ setzen, so ist P ein Bereich, der die normalen **OZ** und nur diese umfaßt. Wenn x normal ist, und $y \varepsilon x$, so ist auch y normal, denn es ist y **OZ**, $y < x$, also $|[\psi, y]| \lesssim |[\psi, x]| < H$; somit folgt aus $x \varepsilon P$ $x \lesssim P$. Nach Satz 46 (loc. cit. II) ist daher P **OZ**. Wir werden zeigen, daß P die gewünschte Eigenschaft hat.

Seien x, y normal. Wenn $x < y$ ist, also $x \varepsilon y$, so haben wir: $[\psi, x] \varepsilon |[\psi, y]|$ und $|[\psi, y]| < H$, also ist $[\psi, y] = [g, |[\psi, y]|]$ nicht Element von $|[\psi, y]|$. Daher ist $[\psi, x] \neq [\psi, y]$; da hier x, y dieselbe Rolle haben, folgt dies auch aus $x > y$, also allgemein aus $x \neq y$. Weiter ist für normale x $|[\psi, x]| < H$ also $[\psi, x] = [g, |[\psi, x]|]$ Element von H. Somit bildet ψ die Menge P ein-eindeutig auf $|[\psi, P]| \lesssim H$ ab.

Da H eine Menge ist, ist es auch $|[\psi, P]|$, sowie das ihm äquivalente P; wäre nun $|[\psi, P]| \neq H$, so wäre P **OZ** und I II-Ding und $|[\psi, P]| < H$, also wäre es normal, d. h. $P \varepsilon P$, was mit P **OZ** unverträglich ist.

Damit ist $|[\psi, P]| = H$, d. h. die Äquivalenz von H und der **OZ** P — also der Wohlordnungssatz bewiesen.

Wenn H keine Menge ist, so gehen alle Schlüsse ebenso, bis auf den, nach dem P I II-Ding ist. Da schließen wir vielmehr so: Wäre P I II-Ding, so wäre es auch $|[\psi, P]|$, also $[\psi, P] \neq H$, woraus wie oben eine Unmöglichkeit folgt. Somit ist P kein I II-Ding,

---

durch vollständige, finite Induktion), u. zw. setzen wir

$$u = 0, [\varphi, \langle x, J\rangle] = [h, J]$$

(es ist leicht, ein solches φ zu h zu finden). Dann wird $[\chi, 0] = u$, $[\chi, x \dotplus 1] = [h, [\chi, x]]$ (x eine endliche Ordnungszahl).

Es ist leichter einzusehen, dass stets $[g, [\chi, x]] \varepsilon H$ ist, und daß aus $x \neq y$ $[g, [\chi, x]] \neq [g, [\chi, y]]$ folgt (x, y aus ω), was hier nicht weiter erörtert werde. Daher ist $|[g, |[\chi, \omega]|]|$ eine mit ω äquivalente Teilmenge von H. (Einen anderen Beweis hierfür geben wir im § 2 von Kap. I, vgl. Anm. [23])).

[21]) Zu den Bezeichnungen vgl. deren Zusammstellung loc. cit. II, Seite 671—673.

[22]) Wir müssen ausdrücken: „$|[\psi, x]| \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $|[\psi, x]| \neq H$“, was mit den Methoden der Arbeit II mühelos geht.

als **OZ** muß es also gleich Ω^{**} sein (Satz 47, loc. cit. II). Somit hat H eine zu Ω^{**} äquivalente Teilmenge $(|[\psi, P]|, P = \Omega^{**})$, und weiter kommen wir nicht[23]. Auch die anderen Beweismethoden des Wohlordnungssatzes erlauben es uns nicht, diese wohlgeordnete Teilmenge von H noch wesentlich zu vergrößern.

3. Nunmehr gehen wir daran, die Behauptung α des § 4 der Einleitung zu beweisen. Als erste Etappe hierzu zeigen wir: wenn S* widerspruchfrei ist, so ist es auch S* + VI. 2. Sei also Φ ein System (d. h. zwei Dinge A, B zwei Klassen I und II von Dingen, und zwei Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$), das S* erfüllt; es gilt dann, ein neues System Φ' zu konstruieren (d. h. zwei Dinge A', B', zwei Klassen I′, II′, und zwei Operationen $[f, x]'$, $\langle x, y\rangle'$), das S* + VI. 2. genügt.

Über S* hinausgehend muß also in Φ' gelten: $A' = 0'$, $B' = \{0'\}'$[24], d. h. $[A', x]' = A$ (für jedes I-Ding x), $[B', A']' = B'$, $[B', x]' = A'$ (für jedes I-Ding $x \neq A'$).

Dies erreichen wir folgendermaßen. A', B' setzen wir gleich $0, \{0\}$[25], die I′- und II′-Dinge seien bezw. die I- und II-Dinge: $\langle x, y\rangle' = \langle x, y\rangle$. Die Definition von $[f, x]'$ aber ist diese: es gibt gewiß ein II-Ding φ, für welches zu jedem I-Ding x genau ein I-Ding y mit $x = [\varphi, y]$ existiert, und $[\varphi, A] = 0$, $[\varphi, B] = \{0\}$ ist; sowie ein II-Ding ψ, so daß $x = [\varphi, y]$ mit $y = [\psi, x]$ gleichbedeutend ist (φ, ψ sind zueinander invers[26]), dann sei $[f, x]' = [\varphi, [f, x]]$.

Daß für jedes I-Ding (d. h. I′-Ding) y $[f, y]' = [\bar{f}, y]$ gilt, bedeutet $[\bar{f}, y] = [\varphi, [f, y]]$ oder auch $[f, y] = [\psi, [\bar{f}, y]]$. Daher kann zu jedem f ein $\bar{f}$ und zu jedem $\bar{f}$ ein f gefunden werden (diese sind II-Dinge, d. h. II′-Dinge), so daß die obige Relation gilt. Außerdem bestimmen sich f, $\bar{f}$ gegenseitig eindeutig (nach Axiom I. 4.).

Aus diesen Bemerkungen folgert man ohne besondere Schwierigkeiten, daß Φ' (ebenso wie Φ) allen Axiomen von S* genügt. Aber auch die darüber hinausgehenden Bedingungen sind erfüllt:

$$\begin{aligned}
[A', x]' &= [0, x]' = [\varphi, [0, x]] = [\varphi, A] = 0 = A', \\
[B', A']' &= [\{0\}, 0]' = [\varphi, [\{0\}, 0]] = [\varphi, B] = \{0\} = B', \\
[B', x]' &= [\{0\}, x]' = [\varphi, [\{0\}, x]] = [\varphi, A] = 0 = A'
\end{aligned}$$

(das letztere für $x \neq 0$, d. h. $\neq A'$).

---

[23]) Hiermit gewinnen wir noch einmal das Resultat von Anm.[20]): wenn H keine Menge ist, so hat es eine mit Ω^{**}, und um so mehr eine mit ω äquivalente Teilmenge.

[24]) Man beachte, daß $0'$ in Φ' von 0 in Φ verschieden sein kann, und ebenso die Operationen $\{x\}'$, $\{x, y\}'$ in Φ' von den Operationen $\{x\}$, $\{x, y\}$ in Φ; können doch alle wesentlichen Bestandteile von Φ' anders definiert sein als die von Φ. Dies gilt auch noch, wenn I′- und II′-Dinge sowie I- und II-Dinge dasselbe sind.

[25]) $0, \{0\}$ aus Φ, nicht etwa aus dem erst zu definierenden Φ'.

[26]) φ ist, wie man sich leicht überlegt, gewiß vorhanden, wenn man einem II-Dinge an vier Stellen vier Werte vorschreiben kann, und sonst $[\varphi, x] = x$ gilt. Seien die vier Stellen a, b, c, d, die Werte a', b' c', d'. Dann bilden wir:

$$\varphi' = \left\{\begin{matrix} a, - \\ a', b' \end{matrix}\right\}, \quad \varphi'' = \left\{\begin{matrix} c, - \\ c', d' \end{matrix}\right\}, \quad \varphi''' = \left(\frac{\varphi' \mid \varphi''}{\{a, b\}}\right)$$

φ''' hat bereits an den Stellen a, b, c, d die Werte a', b', c', d'. Sodann sei $[\varphi^{\mathrm{IV}}, x] = x$ (nach Axiom II. 1.), dann leistet

$$\varphi = \left(\frac{\varphi''' \mid \varphi^{\mathrm{IV}}}{\{a, b\} + \{c, d\}}\right)$$

alles Gewünschte. Die Existenz des ψ folgt aus der von φ sofort: es genügt a, b, c, d und a', b', c', d' miteinander zu vertauschen.

Wir zeigen weiter, daß auch $S^* + VI.\ 2.,\ 3.$ widerspruchfrei ist, d. h. wir konstruieren ein System Φ'' (bestehend aus A'', B'' den Klassen I'', II'', und den Operationen $[f, x]''$, $\langle x, y\rangle''$), das $S^* + VI.\ 2.,\ 3.$ genügt.

Es seien A'', B'', I'', II'', $[f, x]''$ mit A', B', I', II', $[f, x]'$ übereinstimmend, dagegen $\langle x, y\rangle'' = \{\{x\}', \{x, y\}'\}'$. Auf Grund der Überlegungen von loc. cit. II, Seite 698 (die auf Φ', das ja S^* genügt, anwendbar sind) gibt es zwei II'-Dinge f, g, so daß

$$[f, \langle x, y\rangle']' = \{\{x\}', \{x, y\}'\}', [g, \{\{x\}', \{x, y\}'\}']' = \langle x, y\rangle'$$

gilt, d. h.

$$[f, \langle x, y\rangle']' = \langle x, y\rangle'', [g, \langle x, y\rangle'']' = \langle x, y\rangle'.$$

Hieraus folgt sofort, daß auch Φ'' dem S^* genügt.

Da ferner die Definition von A'', B'', $[f, x]''$ dieselbe ist, wie die von A', B', $[f, x]'$, genügt Φ'', ebenso wie Φ' VI. 2. Aus dem gleichen Grunde stimmt insbesondere $\{\{x\}'', \{x, y\}''\}''$ mit $\{\{x\}', \{x, y\}'\}'$ überein, also gilt

$$\langle x, y\rangle'' = \{\{x\}'', \{x, y\}''\}''.$$

Somit erfüllt Φ'' auch VI. 3., womit alles bewiesen ist,

4. Es bleibt übrig, die Widerspruchfreiheit von $S^* + VI.$ zu beweisen; sei also Φ ein $S^* + VI.\ 2,\ 3.$ genügendes System, (bestehend aus A, B, I, II, $[f, x], \langle x, y\rangle$), es gilt ein Φ' (bestehend aus A', B', I', II', $[f, x]'$, $\langle x, y\rangle'$) zu konstruieren, das außer $S^* + VI.\ 2.,\ 3.$ auch noch VI. 1., 4. befriedigt. Wir werden dabei $A' = A, B' = B$, $[f, x]' = [f, x], \langle x, y\rangle' = \langle x, y\rangle$ belassen, und nur den Begriff der I- und II-Dinge wesentlich einengen, um bzw. die I'- und II'-Dinge zu gewinnen.

Zuerst müssen wir aber die Struktur von Φ etwas näher untersuchen. —

Wir wählen ein festes I II-Ding f, so daß für alle Mengen H $[f, H] = H^H$ (Satz 13 b loc. cit. II) gilt; und definieren dann durch transfinite Induktion (Satz 90 loc. cit. II) eine Funktion ψ, wobei die Funktion φ des Satzes 90 so zu wählen ist, daß für alle I II-Dinge x und ν

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = \mathfrak{S}(|[f, |[\nu, x]|) + \{0, \{0\}\}$$

gilt [27]). Insbesondere wird dann für jedes II-Ding ψ

$$\left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi|0}{x}\right)\right\rangle\right] = \mathfrak{S}\left(\left|\left[f, \left|\left[\left(\frac{\psi|0}{x}\right), x\right]\right|\right]\right|\right) + \{0, \{0\}\} = \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\},$$

für das ψ von Satz 90 gilt also (x eine beliebige **OZ**)

$$[\psi, x] = \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$$

(vgl. die Bemerkung in Anm. [27])).

Wir beweisen nun nacheinander:

Satz 1. Alle $[\psi, x]$, x **OZ**, sind Mengen.

Beweis: Daß $[\psi, x]$, x **OZ**, keine Menge ist, bedeutet $x \varepsilon \Omega^{**}$, $[\Omega^*, [\psi, x]] = A$, was ohne weiteres auf die Form $[h, x] \neq A$ gebracht werden kann. $H = \mathfrak{B}(h)$ ist daher der Bereich aller dieser x. Es ist $H \lesssim \Omega^{**}$, und wenn es solche x gibt, $H \neq 0$. Dann

---

[27]) Da $\mathfrak{S}(|[f, |[\nu, x]|)|$ nur dann Sinn hat, wenn alle Elemente von $|[f, |[\nu, x]|]|$ Mengen sind, d. h. also wenn alle $y \varepsilon |[\nu, x]|$ es sind (denn dann sind es ja die $z = [f, y] = y^y$ von selber), müssen wir eigentlich so vorgehen: sei g ein II-Ding, so daß für alle Mengen von Mengen H $[g, H] = \mathfrak{S}(H)$ ist (Satz 8 b loc. cit. II), dann verlangen wir

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = [g, |[f, |[\nu, x]|]|] + \{0, \{0\}\},$$

(das Zeichen + sollte ebenso behandelt werden, ferner gilt dasselbe für x^x).

hat das nach $\left(\frac{H}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete H ein erstes Element, es heiße x; dann gehört x zu H, aber keine **O Z** $y < x$, d. h. $y \varepsilon x$.

Somit sind alle Elemente u von $|[\psi, x]|$ gleich $[\psi, y]$, $y \varepsilon x$, also Mengen, und $[f, u] = u^u$, also ebenfalls eine Menge. Alle Elemente von $|[f, |[\psi, u]|]|$ sind also Mengen, und folglich

$$[\psi, x] = \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$$

(vgl. Anm. [27])); also ist $[\psi, x]$ eine Menge, x gehört auch nicht zu H, was ein Widerspruch ist.

Satz 2. Es sei x, y **O Z**, $x < y$, dann ist

$$[\psi, x]^{[\psi, x]} \lesssim [\psi, y], \quad \text{und} \quad [\psi, x] \lesssim [\psi, y].$$

Beweis: Es ist $x \varepsilon y$, $[\psi, x] \varepsilon |[\psi, y]|$, $[\psi, x]^{[\psi, x]} = [f, [\psi, x]]$ Element von $|[f, |[\psi, y]|]|$, und somit $\lesssim \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, y]|]|) < [\psi, y]$.

Ferner hat $x \lesssim y$ offenbar $\mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\} \lesssim \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, y]|]|) + \{0, \{0\}\}$, d. h. $[\psi, x] \lesssim [\psi, y]$ zur Folge.

Definition. Wir bilden den Bereich $\Pi = \mathfrak{S}[|[\psi, \Omega^{**}]|]$, dessen Elemente somit alle Elemente aller $[\psi, x]$, x **O Z**, sind.

Satz 3. Es ist

$$\Pi^\Pi \lesssim \Pi \; ^{28)}.$$

Beweis: Es ist zu zeigen: wenn f zu Π^Π gehört, d. h. wenn es ein I II-Ding ist und alle x, $[f, x]$ mit $[f, x] \neq A$ zu Π gehören, so gehört auch f zu Π. Oder auch (vgl. die Definition im § 4 der Einleitung): wenn alle Vorgänger des I II-Dinges f zu Π gehören, so gehört es selbst zu Π. In einer dritten Formulierung (vgl. ebendort): wenn f I II-Ding und $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim \Pi$ ist, so ist $f \varepsilon \Pi$.

Wenn für irgendeine **O Z** x $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim [\psi, x]$ ist, so ist (wie man sich leicht überlegt) $f \varepsilon [\psi, x]^{[\psi, x]}$, also $f \varepsilon [\psi, x \dotplus 1]$ (wegen $x < x \dotplus 1$ und Satz 2), und daher $f \varepsilon \Pi$, wie behauptet wurde. Es genügt somit, $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim [\psi, x]$ zu beweisen.

Nun ist mit f auch $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]|$ ein I II-Ding, also ist es eine Menge, ferner nach Annahme $\lesssim \Pi$; wir werden allgemeiner beweisen: wenn für eine Menge $H \lesssim \Pi$ gilt, so ist auch $H \lesssim [\psi, x]$ (für eine geeignete **O Z** x).

Jedes $u \varepsilon H$ gehört ja zu Π, also zu einem $[\psi, x]$, x **O Z**; wir können x **O Z**, $u \varepsilon [\psi, x]$ unschwer auf die Form $[j, \langle u, x \rangle] \neq A$ bringen, dann gibt es zu jedem $u \varepsilon H$ ein x, so daß diese Relation besteht. Wenn wir hierauf III. 3.* anwenden, so haben wir also: für jedes $u \varepsilon H$ ist $[k, u]$ **O Z**, $u \varepsilon [\psi, [k, u]]$. Sei nunmehr $\mathfrak{H} = |[k, H]|$, dann ist $\mathfrak{H}$ eine Menge (weil H eine ist), $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $H \lesssim |[\psi, \mathfrak{H}]|$.

Da H eine Menge von **O Z** ist, ist $x = \mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ eine **O Z** und I II-Ding (Satz 81c loc. cit. II); für jedes $y \varepsilon \mathfrak{H}$ haben wir $y \lesssim \mathfrak{S}(\mathfrak{H}) = x$, $[\psi, y] \lesssim [\psi, x]$ (Satz 2). Daher ist $|[\psi, \mathfrak{H}]| \lesssim [\psi, x]$, $H \lesssim [\psi, x]$, womit alles bewiesen ist.

Zusatz. Auch $A = 0$ und $B = \{0\}$ gehören zu Π, darum ist $\mathfrak{P}(\Pi) \lesssim \Pi$ (vgl. Anm. [28])).

---

[28]) Für Mengen H (die mehr als ein Element enthalten) ist $H^H \lesssim H$ auf Grund des bekannten Mächtigkeitssatzes ausgeschlossen; wohl aber kann für Bereiche, die keine Mengen sind, diese Relation gelten, so ist z. B. $\Omega^\Omega \lesssim \Omega$. Satz 3 hat also die Konsequenz, daß Π keine Menge sein kann.

Beweis: Jedes $[\psi, x]$ enthält 0 und $\{0\}$ (nach der definierenden Relation des ψ), also auch Π. Folglich ist

$$P(\Pi) = \{A, B\}^{\Pi} \lesssim \Pi^{\Pi} \lesssim \Pi.$$

5. Wir fahren mit der Untersuchung von Π fort.

Wenn u zu Π gehört, so gehört es einem $[\psi, x]$, $x\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$ an; wir können $x\,\mathbf{0Z}$, $u\varepsilon[\psi, x]$ auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen (f hängt von u ab) und $\mathcal{H} = \mathcal{B}(f)$ setzen, dann ist H der Bereich aller $x\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$ mit $u\varepsilon[\psi, x]$. Daher ist $\mathcal{H} < \Omega^{**}$, $\mathcal{H} \neq 0$, und das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$ hat ein erstes Element. Dieses heiße x, dann gehört x zu $\mathcal{H}$, und für jedes y von $\mathcal{H}$ gilt $x < y$; also: $x\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$, $u\,\varepsilon[\psi, x]$, und aus $y\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$, $u\,\varepsilon[\psi, y]$ folgt $x \lesssim y$.

Es ist nicht schwer, diese, x offenbar eindeutig festlegende Relation zwischen u und x auf die Form $[f, \langle u, x\rangle] \neq A$ zu bringen; nach III. 3. (um so mehr nach III. 3.*!) gibt es somit ein II-Ding g, so daß für jedes u dieses x gleich $[g, u]$ ist.

Definition. Zu jedem u von Π gehört nach dem soeben Gesagten ein und nur ein x mit den folgenden Eigenschaften:

$$x\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z},\ u\varepsilon[\psi, x],\ \text{ aus } y\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z},\ u\varepsilon[\psi, y] \text{ folgt } x \lesssim y.$$

Dieses x nennen wir den Grad von u, in Zeichen: $\mathrm{G}(u)$ [29]). Wie soeben gezeigt wurde, gibt es ein II-Ding g, so daß stets $\mathrm{G}(u) = [g, u]$ ist.

Satz 4. Wenn $u\eta v$ ist (u Vorgänger von v), u, v von Π, so ist entweder $u = A$, oder $u = B$, oder $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$.

Beweis: Es genügt, zu zeigen: wenn $u\eta v$, u, v von Π, $u \neq A$, $u \neq B$ ist, und $v\varepsilon[\psi, x]$, so gibt es ein $y < x$ ($x, y\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$) mit $u\varepsilon[\psi, y]$. Wir können dann $x = \mathrm{G}(v)$ setzen, es muß $\mathrm{G}(u) \lesssim y < x = \mathrm{G}(v)$ sein.

Sei also $v\varepsilon[\psi, x]$, d. h. $v\varepsilon\mathcal{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$. Dann ist entweder $v\varepsilon\{0, \{0\}\}$, oder $v\varepsilon\mathcal{S}(|[f, |[\psi, x]|]|)$. Im ersten Falle ist $v = 0$ oder $v = \{0\}$, 0 hat gar keine Vorgänger; $\{0\}$ nur 0 und $\{0\}$; d. h. A und B; also wäre dann $u = A$ oder $u = B$ entgegen der Annahme. Im zweiten Falle ist $v\varepsilon[f, [\psi, y]]$, $y\varepsilon x$, d. h. $v\varepsilon[\psi, y]^{[\psi, v]}$, $y\,\mathbf{0}\,\mathbf{Z}$, $y < x$. Daher gehört jeder Vorgänger von v zu $[\psi, y]$ (dies folgt aus der Definition des Vorgängers), also insbesondere $u\,\varepsilon[\psi, y]$. Damit ist alles bewiesen.

Satz 5. Es gibt kein II-Ding $f \lesssim \Pi$, $f \neq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $x\,\varepsilon\,f$ gibt es ein $y\,\varepsilon\,f$ mit $y\,\eta\,x$ und $y \neq B$ [30]).

Beweis: Wenn $A\varepsilon f$ ist, so sind wir sofort fertig: da $A = 0$ überhaupt keine Vorgänger hat, können wir $x = A$ setzen, schon $y\eta x$ ist dann unmöglich. Es sei also nicht $A\varepsilon f$. Wäre unser Satz falsch, so gäbe es zu jedem $x\varepsilon\,f$ ein $y\varepsilon\,f$ mit $y\eta x$ und $y \neq A$ (da $y\varepsilon f$ und nicht $A\varepsilon f$ ist), $y \neq B$; also nach Satz 4 mit $\mathrm{G}(y) < \mathrm{G}(x)$.

Wir wählen g nach der Definition von $\mathrm{G}(u)$ und setzen $\mathcal{H} = |[g, \mathcal{B}(f)]|$; es ist offenbar $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $\mathcal{H} \neq 0$ (wegen $f \neq 0$). Trotzdem gibt es zu jedem $R\,\varepsilon\,\mathcal{H}$ ein $S\,\varepsilon\,\mathcal{H}$ mit $s < r$ (weil $\mathcal{H}$ der Bereich aller $\mathrm{G}(u) = [g, u]$, $u\,\varepsilon\,f$ ist), und dies ist unmöglich, da das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)$ Σ geordnete $\mathcal{H}$ ein erstes Element haben muß.

Jetzt erst sind wir in der Lage, Φ' endgültig zu beschreiben, d. h. anzugeben, was I'-Ding und was II'-Ding sein soll. Wir definieren: I'-Dinge nennen wir die Elemente von Π (sie sind also auch I-Dinge), II'-Dinge alle II-Dinge f, für die alle Vorgänger

---

[29]) Dieser Begriff des „Grades" entspricht dem *Russell*schen Begriff der „Stufe", in einer konsequent aufgebauten und den „Cantorschen Umfang" erreichenden Mengenlehre kann man nicht vermeiden, alle (transfiniten!) Ordnungszahlen als „Grade" (= „Stufen") zuzulassen.

[30]) Das ist das Axiom VI. 4., aber vorläufig nur für II-Dinge $f \lesssim \Pi$ formuliert.

I'-Dinge sind (d. h. jedes x und $[f, x]$, $[f, x] \neq A$, zu Π gehört oder auch $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim \Pi$ gilt). Wir stellen fest: A, B sind I'-Dinge (vgl. Zusatz zu Satz 3); wenn f ein II'-Ding und x ein I'-Ding ist, so ist $[f, x]$ ein I'-Ding (für $[f, x] \neq A$ nach Definition der II'-Dinge, für $[f, x] = A$ nach der ersten Bemerkung); wenn x, y I'-Dinge sind, so ist auch $\langle x, y\rangle$ ein I'-Ding (denn es ist $= \{\{x\}, \{x, y\}\}$, also Element von $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{x, y\}))$, und wegen $\{x, y\} \lesssim \Pi$ ist auch die letztere Menge $\lesssim \Pi$, vgl. Zusatz zu Satz 3). Ferner zeigen wir: jedes II'-Ding, das gleichzeitig I-Ding ist, ist auch I' II'-Ding. Denn es ist I II-Ding, und alle seine Vorgänger gehören zu Π, also gehört es zu Π^{II}, d. h. nach Satz 3 zu Π, ist also auch I'-Ding. Und schließlich: alle I'-Dinge sind auch I' II'-Dinge. Denn zunächst folgt aus $u \varepsilon \Pi$ $u \varepsilon [\psi, x], x \mathbf{O} \mathbf{Z}$, also $u \varepsilon \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$, d. h. $u \varepsilon [\psi, y]^{[\psi, y]}$, $y \varepsilon x$ (also $y \mathbf{O} \mathbf{Z}$) oder $u = 0$ oder $u = \{0\}$, so daß u auf alle Fälle I II-Ding ist. Weiter gehören alle Vorgänger von u auch zu Π (je nach dem, welche der oben genannten drei Möglichkeiten eintritt, gehören sie alle zu $[\psi, y]$, bezw. gibt es keine, bezw. sind sie 0 und $\{0\}$, d. h. A und B — also ebenfalls Elemente von Π), also ist u ein II'-Ding, und daher auch I' II'-Ding.

Wenn wir noch beachten, daß $A, B, [f, x], \langle x, y\rangle$ in Φ' ebenso sind, wie in Φ, so kann man leicht verifizieren, daß Φ' ebenso wie Φ die Bedingungen von S* erfüllt —, und weil mit den obigen Begriffsbildungen auch 0, $\{x\}'$, $\{x, y\}'$ in Φ' und Φ übereinstimmen, gilt dasselbe für die Bedingungen VI. 2., 3. Wegen der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes kommt aber Φ' auch noch die Eigenschaft VI. 1. zu, und wegen Satz 5 auch VI. 4.

Damit ist die Widerspruchfreiheit von S* + VI. aus der von S* hergeleitet, d. h. die Behauptung α restlos bewiesen.

II. *Beweis von β.*

1. Es gilt β zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß ein System Φ (bestehend aus A, B, I, II, $[f, x]$, $\langle x, y\rangle$), das die Bedingungen S* + VI. erfüllt, auch S erfüllen muß. Da aber III. 3. weniger aussagt, als III. 3.*, handelt es sich bloß darum, IV. 2. zu beweisen. Da Φ insbesondere die Eigenschaften S* + VI. 2., 3. besitzt, werden wir von den Entwicklungen der §§ 4, 5 (beim letzteren natürlich nur bis zu Satz 5, einschließlich) von Kap. I Gebrauch machen.

Wir zeigen zuerst (dieser Satz gilt natürlich nur, weil auch VI. 1., 4. erfüllt sind):

Satz 6: Es ist $\Pi = \Omega$ [31]).

Beweis: Sonst wäre das II-Ding $f = \Omega - \Pi \neq 0$. Nach VI. 4. gibt es ein $x \varepsilon f$, d. h. $x \varepsilon \Omega - \Pi$, so daß für kein $y \varepsilon f$, d. h. $y \varepsilon \Omega - \Pi$, gilt $y \eta x, y \neq B$. Wegen $B \varepsilon \Pi$ können wir auch sagen: aus $y \eta x$ folgt $y \varepsilon \Pi$. Da x ein I II-Ding ist, bedeutet dies (wie man sich leicht überlegt) $x \varepsilon \Pi^{II}$ also (Satz 3) $x \varepsilon \Pi$. Dies widerspricht aber $x \varepsilon \Omega - \Pi$.

Satz 7. Es gibt eine Wohlordnung W von Φ, so daß alle $\mathfrak{Abs}\ (u;\ \Omega, W)$ (u ein I-Ding) Mengen sind,

Beweis: Sei $x \varepsilon \Omega^{**}$, wir können $x = \mathrm{G}(u)$ auf die Form $[f, u] \neq A$ bringen (f von x abhängig), und $H_x = \mathfrak{B}(f)$ setzen; dann ist H_x der Bereich aller u mit $\mathrm{G}(u) = x$. Daraus folgt $H_x \lesssim [\psi, x]$, also ist H_x eine Menge, es ist leicht, ein II-Ding h mit $[h, x] = H_x$ (für alle $x \varepsilon \Omega^{**}$, h unabhängig von x) ausfindig zu machen. Jedes I-Ding u gehört offenbar einem und nur einem H_x an ($x = \mathrm{G}(u)$).

---

[31]) Man beachte, daß im § 5 des Kap. I umgekehrt die Gültigkeit von VI. 4. durch Einengen von Ω (d. h der I-Dinge) auf den Umfang von Π erzwungen wurde.

Da H_x eine Menge ist, ist es wohlordenbar, wir können die Menge $\mathcal{WO}(H_x)$ bilden, und es ist $\mathcal{WO}(H_x) \neq 0$ (vgl. § 4 im Kap. VI loc. cit. II, sowie unsere Bemerkungen dazu, in den §§ 1, 2 des Kap. I dieser Arbeit). Wir können leicht ein II-Ding k mit $\mathcal{WO}(H_x) = [k, x]$ finden (Satz 28 loc. cit. II), und wenn wir j nach Satz 57 loc. cit. II (Auswahlprinzip!) wählen, so ist $W_x = [j, \mathcal{WO}(H_x)] = [j, [k, x] = [l, x]$ für jedes $x \varepsilon \Omega^{**}$ ein Element von $\mathcal{WO}(H_x)$), also eine Wohlordnung von H_x.

Wir werden eine Ordnung W von Ω konstruieren, bei der $u \dot{<} v \ldots (W)$ damit gleichbedeutend ist, daß entweder $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$ ist, oder $\mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v)$, also u, v demselben $H_x(x) = \mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v)$ angehörig), und $u \dot{<} v \ldots (W_x)$. Zuerst zeigen wir aber, daß dieses W die gewünschten Eigenschaften hat.

Da die $\mathrm{G}(u)$ zu Ω^{**} gehören, und $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \mathcal{WO} \Omega^{**}$ ist, sowie alle $W_x \mathcal{WO} H_x$, zeigt man auf die in der „naiven" Mengenlehre gewohnte Art, daß W eine Wohlordnung von Ω ist. Weiter ist für $\mathrm{G}(v) > \mathrm{G}(u)$ gewiß $v \dot{>} u \ldots (W)$, also folgt aus $v \dot{<} u \ldots (W)$ $\mathrm{G}(v) \lesssim \mathrm{G}(u)$, $\mathrm{G}(v) \varepsilon \mathrm{G}(u) \dot{+} 1$. Somit ist jedes $v \varepsilon \mathcal{Abs}(u; \Omega, W)$ Element eines $H_x = [h, x]$, $x \varepsilon \mathrm{G}(u) \dot{+} 1$, also $\mathcal{Abs}(u; \Omega, W) \lesssim |[h, \mathrm{G}(u) \dot{+} 1]|$. Wegen $\mathrm{G}(u) \varepsilon \Omega^{**}$ sind also $\mathrm{G}(u) \dot{+} 1$, $|[h, \mathrm{G}(u) \dot{+} 1)|$ und $\mathcal{Abs}(u; \Omega, W)$ lauter Mengen, womit alles bewiesen ist.

Es bleibt noch übrig, das gewünschte W wirklich herzustellen. Es muß erstens alle $\langle u, v \rangle$ mit $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$ enthalten, d. h. alle Elemente der Mengen $|\langle H_x, H_y \rangle|$, $x, y \varepsilon \Omega^{**}$, $x < y$ und zweitens alle $\langle u, v \rangle$ mit $\mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v) = x$, $u \dot{<} v \ldots (W_x)$, d. h. alle Elemente der Mengen W_x, $x \varepsilon \Omega^{**}$. Einen solchen Bereich können wir natürlich ohne weiteres konstruieren.

Satz 8. Es ist $\Omega \approxeq \Omega^{**}$.

Beweis: Wenn wir W nach Satz 7 wählen, so ist $W \mathcal{WO} \Omega$ und $\mathbf{Z} \Omega, W$ (Satz 41 loc. cit. II), wir können also $\mathbf{OZ}(\Omega, W) = P$ bilden. Es ist $\Omega, W \approx P$, $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$, also $\Omega \approxeq P$. Ω ist keine Menge (vgl. den Beweis loc. cit. II nach Anm. [17]) und [5]), wobei IV. 2. nicht benützt wird! — oder auch weil Ω^{**} keine Menge ist [Satz 47 loc. cit. II] und $\Omega^{**} \lesssim \Omega$ gilt), also auch P nicht; da aber $P\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$ ist, muß $P = \Omega^{**}$ sein (Satz 47 loc. cit. II). Also ist $\Omega \approxeq \Omega^{**}$, wie behauptet wurde. —

Der Satz 8 ermöglicht uns aber das Erfülltsein der Bedingung IV. 2. zu beweisen.

Sei erstens f ein II-Ding, aber kein I II-Ding. Es sei $H = \mathcal{B}(f)$ (H Bereich aber nicht Menge), und die äquivalente Abbildung von Ω auf Ω^{**} sei g, $\Phi \approxeq \Phi^{**} \ldots (g)$. Es sei $\mathcal{H} = |[g, H]|$, dann ist $H \approxeq \mathcal{H}$ und $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$. Aus $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $\mathbf{Z}\,\Omega^{**}, \left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ folgt (nach Satz 50 loc. cit. II) $\mathbf{Z}\,H, \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$, wir können daher $\mathbf{OZ}(\mathcal{H}, \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma) = P$ setzen. Dann ist $\mathcal{H}, \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma, \mathcal{H} \approxeq P$; also ist $H \approxeq P$. Da H keine Menge ist, ist auch P keine, wegen $P\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$ ist somit $P = \Omega^{**}$. Daher gilt $\mathcal{H} \approxeq \Omega^{**}$, und wegen $\Omega \approxeq \Omega^{**}$ $H \approxeq \Omega$; sei h die äquivalente Abbildung von H auf Ω, $H \approxeq \Omega \ldots (h)$. Dann gibt es, wie IV. 2. verlangt, zu jedem x (natürlich $x \varepsilon \Omega$) ein $y \varepsilon H$ (also $[f, y] \neq A$) mit $[g, y] = x$.

Zweitens sei f ein II-Ding, und es gebe (im Sinne von IV. 2.) ein II-Ding g, so daß zu jedem x ein y mit $[f, y] \neq A$, $[g, y] = x$ existiert. Dann ist $\Omega \lesssim |[g, \mathcal{B}(f)]|$, wäre also f ein I II-Ding, so wären es auch $\mathcal{B}(f)$, $|[g, \mathcal{B}(f)]|$, und Ω; das letztere ist aber (vgl. den Beweis von Satz 8) gewiß falsch. Also ist f kein I II-Ding.

Damit ist IV. 2. restlos bewiesen — und somit auch die Behauptung β.

2. Es bleibt übrig, die Schlußbemerkungen vom § 4 der Einleitung zu erörtern.

Aus S* + VI. folgt (nach β) S, und natürlich auch VI., also S + VI. Wenn S* widerspruchfrei ist, so ist es auch S* + VI (nach α), und nach dem soeben Gesagten auch S + VI. Weil aus S + VI. (ja schon aus S) S* folgt, hat umgekehrt die Widerspruchfreiheit von S + VI. die von S* zur Folge. Schließlich liegt S (in bezug auf den Umfang der Forderungen) zwischen S* und S + VI., daher ist die Widerspruchfreiheit eines jeden der drei Systeme S*, S, S + VI. mit der der zwei anderen gleichbedeutend. (Unsere Überlegungen zeigen übrigens, daß die Axiomensysteme S* + VI. und S + VI. sogar logisch gleichwertig sind.)

S + VI. ist übrigens auch vom Gesichtspunkte der Kategorizitätsfrage der Mengenlehre, die wir hier freilich nicht gebührend erörtern können, von Interesse (vgl. § 4 der Einleitung dieser Arbeit, sowie § 5 Kap. II loc. cit. I). Denn hier ist (im Gegensatze zu S) das Verhältnis von I und I II-Dingen, sowie von $[f, x]$, $\langle x, y\rangle$ und den wirklich mengentheoretischen Operationen genau festgelegt [32]). Es sei erwähnt, daß der Kategorizitätsbeweis trotzdem nicht gelingt, was es als fraglich erscheinen läßt, ob unendliche Systeme überhaupt kategorisch axiomatisiert werden können (vgl. § 5 Kap. II loc. cit. I).

S + VI. ist überhaupt bei Konstruktion von Beispielen bei Unabhängigkeitsfragen im Axiomensystem S von Bedeutung, wir hoffen hierauf noch bei anderer Gelegenheit eingehen zu können.

[32]) Um auf Kategorizität rechnen zu können, müßte man sich allerdings noch mit der (auch im § 5 Kap. II loc. cit. I gestreiften) Frage von der Existenz „regulärer Anfangszahlen mit Limesindex" auseinandersetzen, dies gelingt aber ohne besondere Schwierigkeiten. Wir gehen hierauf nicht näher ein.

Eingegangen 22. Oktober 1928.