Zur algebraischen Theorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler.

Von *Otto F. G. Schilling*, z. Zt. in Princeton.

Die folgenden Entwicklungen, die sich an eine Arbeit von Herrn F. K. Schmidt anschließen [1]), beschäftigen sich mit dem formalen Aufbau einer Art Klassenkörpertheorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler. Dabei wird mehr Gewicht gelegt auf eine Herausstellung der Voraussetzungen und Methoden, die den Aufbau ermöglichen, als auf die Einzelausführung der Beweise.

Der Hauptinhalt der Klassenkörpertheorie kann in der Charakterisierung der relativ-abelschen Körper durch Strahlklasseneinteilungen und in der genaueren Beschreibung des Zusammenhangs dieser Charakterisierung mit der Erzeugung auf Kummerscher Grundlage gesehen werden.

Aus mehrfachen Gründen ist nicht zu erwarten, daß ein Analogon in allgemeinen Körpern gefunden werden kann. Dies legen schon die Dimensionsaussage beim Riemann-Rochschen Satz für Funktionen zweier Variabler [2]) und die Nichtendlichkeit der Restklassenzahl nach einem Primdivisor nahe.

Eine Analyse der oben erwähnten Arbeit von F. K. Schmidt und einer Arbeit von M. Deuring [3]) zeigt, daß sich alle diejenigen Ergebnisse übertragen lassen müssen, die von der Kummerschen Theorie und der Eingliedrigkeit [4]) der Wertemenge einer Stelle Gebrauch machen. Setzt man noch die Theorie der quasiganzen Teilkarkeit von Idealen in ganz-abgeschlossenen Integritätsbereichen [5]) voraus, so bietet die Ausführung der algebraischen Theorie keine Schwierigkeiten mehr.

1. Vorbemerkungen.

Sei Ω ein vollkommener Körper; k ein Körper vom Transzendenzgrade m, der über einem rationalen Funktionenkörper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ von endlichem Grade sei. Unter einem *Primdivisor* (oder einer *Stelle*) $\mathfrak{p}$ von k verstehen wir einen *Homomorphismus* von k auf einen Körper vom Transzendenzgrade $m - 1$, bei dem gewissen Elementen auch das Symbol ∞ zugeordnet sein kann [6]).

---

[1]) F. K. Schmidt, Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich, dieses Jounal **171** (1934), S. 162—169. Ich schließe mich an die Bezeichnungen dieser Arbeit an.

[2]) H. E. W. Jung, Der Riemann-Rochsche Satz für algebraische Funktionen zweier Veränderlicher, Jahresbericht der D. M. V. **18** (1909), S. 267—339.

[3]) M. Deuring, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Annalen **106** (1932), S. 77—102.

[4]) W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, dieses Journal **167** (1931), S. 160—196.

[5]) B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 105—109; ferner: Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1929), S. 293—308. Zur Idealtheorie der ganz abgeschlossenen Ringe, Math. Annalen **101** (1929), S. 309—311.

[6]) Vgl. Anm. 5.

In der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen kann man bekanntlich alle Stellen aus den Primidealen $\mathfrak{p}'$ von zwei ganz-abgeschlossenen Ringen erhalten [7]). Dabei ergibt sich noch, daß die so erhaltene Menge von Stellen birational invariant ist, und daß jedes Element α (bis auf Einheiten, d. h. Elemente aus dem in k algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper) eine eindeutige Darstellung $\mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_s^{a_s}$ als endlicher Divisor der Ordnung Null hat. Der Begriff der Ordnung eines Divisors ist birational invariant.

Bei Funktionen mehrerer Variabler ist dies keineswegs der Fall. Z. B. braucht ein Element durchaus nicht mehr ein endliches Divisorenprodukt jener allgemeinen Stellen zu sein. Außerdem ist der Begriff der Ordnung nicht mehr birational invariant. Wenn man sich aber nur für algebraische Eigenschaften von Relativkörpern interessiert und Singularitätsuntersuchungen beiseite läßt, kann man mit einer engeren Menge von Stellen auskommen. Leider muß man dann auf birational invariante Definitionen verzichten. Der Begriff der Stelle wird also im folgenden von vornherein auf ein festes System transzendenter Elemente $x_1, \ldots, x_m$ bezogen.

Wir betrachten dazu die Ringe

$$\Gamma = \Omega[x_1, \ldots, x_m], \quad \Gamma_i = \Omega[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m] \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Sie sind ganz-abgeschlossen in dem gemeinsamen Quotientenkörper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$. Die bezüglich Γ, Γ_i ganzen Ringe $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_i$ aus k sind auch ganz-abgeschlossen. Den Primidealen $\mathfrak{p}'$ der Höchstdimension [8]) von $\mathfrak{o}$ lassen wir Stellen $\mathfrak{p}$ entsprechen, nämlich die Quotientenkörper $Q(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}')$, nebst dem formalen Symbol ∞, zu den Restklassenringen $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$. Ebenso verfahren wir mit den Primidealen der Höchstdimension der Ringe $\mathfrak{o}_i$. Durch die letzteren Primideale kommen noch endlich viele neue Homomorphismen hinzu. Diese Menge von Stellen, die von der speziellen Wahl der $x_1, \ldots, x_m$ abhängt, werde im folgenden stets zugrunde gelegt. Es sind die „Primdivisoren erster Art" [6]).

Aus der allgemeinen Bewertungstheorie [9]) folgt sogleich, daß über $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ der Dedekindsche Diskriminantensatz (für inseparable $k/\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ seine naheliegende Verallgemeinerung) gilt. Jedem Körper kann eine endliche Diskriminante zugeordnet werden. Für separable endliche Relativkörper K/k gilt für die Erweiterung einer Stelle, wie zu erwarten, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_g^{e_g}$ mit $\Sigma e_i f_i = n$, wenn $(K:k) = n$ und $N_{K/k}\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}^{f_i}$ ist. Nun können wir den Begriff der Ordnung eines Divisors $\mathfrak{p}$ einführen. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ordnen wir folgendermaßen jeder Stelle $\mathfrak{p}$ ein Symbol $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$ zu: Die den $\mathfrak{p}$ entsprechenden Ideale $\mathfrak{p}'$ sind bekanntlich Hauptideale; wenn etwa $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}' = (p(x_1, \ldots, x_m))$ in Γ realisiert werden kann und w_i die maximalen Exponenten von x_i in $p(x_1, \ldots, x_m)$ sind, so sei $o(\mathfrak{p}) = (w_1, \ldots, w_m)$, entsprechend für die $\mathfrak{p}_i$. Für eine Stelle $\mathfrak{P}$, die in $\mathfrak{p}$ in einem Erweiterungskörper aufgeht, sei dann $o(\mathfrak{P})$ definiert als $(w_1 f, \ldots, w_m f)$, wenn $N\mathfrak{P} = \mathfrak{p}^f$ ist. Dieser Ordnungsbegriff ist für $m > 1$ ersichtlich nicht mehr birational invariant.

Jedes Element α aus k besitzt eine einzige Darstellung als endliches Divisorenprodukt $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_s^{a_s}$ und ist umgekehrt durch seinen Divisor bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt [10]).

---

7) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 1—32. E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen, Math. Annalen **110** (1934), S. 12—28.

8) B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, S. 66.

9) Vgl. Anm. 4.

10) Vgl. Anm. 5. Ich danke Herrn M. Deuring für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Jeder solche Elementdivisor hat die Ordnung $(0, \ldots, 0)$. Im Falle des rationalen Funktionenkörpers ist umgekehrt jeder Divisor von der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ äquivalent einem Hauptdivisor. Für nicht rationale Fuktionenkörper gilt das nicht mehr. Die Gruppe der Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ bildet eine echte Obergruppe der Gruppe der Hauptdivisoren $\mathfrak{H}_k$ [11]).

2. Charakterisierung der endlichen relativ-abelschen Körper K über einem Funktionenkörper k.

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß der Konstantenkörper Ω die n-ten Einheitswurzeln enthält und daß n prim zur Charakteristik von k ist. Nach einer Bemerkung von F. K. Schmidt ist die Einheitswurzelvoraussetzung *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der folgenden Sätze. Sie ergeben sich aus der Untersuchung der Kummerschen (oder Radikal-)Körper $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$ über k und der Aufdeckung des Zusammenhangs der Verzweigungen dieser Körper mit den Teilern von α [12]).

Die Divisorengruppe $\mathfrak{G}_k$ von k ist das direkte Produkt der Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ zu den Stellen $\mathfrak{p}$ von k. Wie bei Deuring [12]) sei $\overline{\mathfrak{G}}_k$ eine Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{G}_k$; sie entsteht aus $\mathfrak{G}_k$, indem man endlich viele Pseudozyklen $\{\mathfrak{p}\}$ durch Zyklen $\{\overline{\mathfrak{p}}\}$ ersetzt, wo $\overline{\mathfrak{p}}^e = \mathfrak{p}$ ist und im Exponenten die Wertemenge $\mathfrak{w}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ erhalten bleibt.

Unter der Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ von K bezüglich k verstehen wir diejenige Untergruppe $\mathfrak{G}_{K/k}$ von $\mathfrak{G}_K$, deren Elemente bei relativen Automorphismen von K über k fest bleiben. Es ist $\mathfrak{G}_{K/k} \geqq \mathfrak{G}_k \geqq \mathfrak{H}_k$.

Die Gesamtheit $\mathfrak{K}$ aller Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ aus k, die in K Hauptdivisoren werden, ist eine Gruppe. Für gegebene abelsche Körper K/k wird dann

$$1. \quad \mathfrak{G}_{K/k} = \overline{\mathfrak{G}}_k,$$

$$2. \quad \overline{\mathfrak{G}}_k \geqq \mathfrak{K} \geqq \mathfrak{H}_k.$$

Ferner gelten die folgenden fünf Sätze, deren Beweise man mit geringfügigen Modifikationen wörtlich von M. Deuring übernehmen kann. Dabei muß man vorher feststellen, daß die Maximalitätseigenschaften des Zerlegungs- und Trägheitskörpers unter den gemachten Voraussetzungen erhalten bleiben. Wir setzen dazu voraus, daß k über einem Körper $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ endlich ist, und daß der Grad n von K/k zur Charakteristik von k prim ist.

Satz 1 (Isomorphiesatz). *Die galoissche Gruppe $\mathfrak{g}_{K/k}$ ist zu $\mathfrak{K}/\mathfrak{H}_k$ isomorph.*

Satz 2 (Hauptidealsatz). *$\mathfrak{K}$ besteht aus allen Divisoren von k, die in K Hauptdivisoren werden.*

Satz 3 (Führer- und Diskriminantensatz). *Die Gruppe der ambigen Divisoren $\mathfrak{G}_{K/k}$ ist gleich (oder abstrakt isomorph) einer wohl bestimmten Erweiterungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_k$ von $\mathfrak{G}_k$.*

Satz 4 (Eindeutigkeitssatz). *Wird $\mathfrak{K}$ in den Körpern K und $\overline{K}$ zu Hauptidealen und hat das Kompositum $\{K, \overline{K}\}$ den gleichen Konstantenkörper Ω, so ist $\overline{K} \leqq K$.*

Satz 5 (Existenzsatz). *Zu gegebener Gruppe $\mathfrak{K}$ existiert stets ein Körper K, der die Sätze 1—4 erfüllt.*

---

[11]) Hieraus folgt (vgl. die Ausführungen unter Abschnitt 2), daß über dem rationalen Funktionenkörper (abgesehen von Erweiterungen des Konstantenkörpers) keine unverzweigten Erweiterungen existieren, und daß über den nicht rationalen Körpern dann und nur dann unverzweigte abelsche Erweiterungen existieren, wenn es Divisoren der Ordnung $(0, \ldots, 0)$ gibt, die bezüglich $\mathfrak{H}_k$ endliche Ordnung haben.

[12]) M. Deuring, a. a. O. [3]), § 6 Satz 9.

Diese Sätze stellen ein Analogon zur Klassenkörpertheorie dar, soweit diese aus der Theorie der Kummerschen Körper und den arithmetischen Eigenschaften der Stellen abgeleitet werden kann. Die Zahlengruppen, die den relativ- abelschen Körpern K/k invariant zugeordnet werden können, werden in die formal einfacheren Divisorengruppen umgedeutet; einfacher wegen der Homogenität der Eigenschaften der Stellen.

Neben dieser Theorie, die eine Darstellung der galoisschen Gruppe durch Divisorengruppen im Grundkörper und damit den Isomorphie- und Existenzsatz zum Ziele hat, kann unter bestimmten Voraussetzungen über den Konstantenkörper Ω das Analogon zum Zerlegungssatz bzw. Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie in den Vordergrund gerückt werden.

3. Kennzeichnung der galoisschen Körper durch Normalmengen.

Wie in der am Anfang erwähnten Arbeit von F. K. Schmidt wollen wir annehmen, daß über Ω der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt. Gilt dieser Satz für eine Variable, so auch für mehrere [13]). Hiervon gehen wir aus.

Sei N über k galoissch und $\mathfrak{G}$ die zugehörige Gruppe. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes [14]):

Satz C. *Die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller Primdivisoren von N stimmt mit der Gesamtheit der Untergruppen von $\mathfrak{G}$ überein.*

Beweis: 1. Die Dedekindsche Regel gilt wegen der arithmetischen Eigenschaften der Stellen (Existenz des Primelementes und eines perfekten Körpers).

Wenn $K \geqq K' = k(\vartheta) \geqq k \geqq \Omega(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{P}$ eine Stelle von K ist, so ist $(\vartheta) = \mathfrak{P}^e \cdot \mathfrak{N}$ mit $e \geqq 0$ und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{N}) = 1$. Falls die Diskriminante $\Delta_k(\vartheta)$ nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar wird, so wird $(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\vartheta}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}})$.

2. (Verallgemeinerung des Lemmas in der Arbeit von F. K. Schmidt.) K ist stets über einem passenden rationalen Funktionenkörper $k' = \Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ endlich und separabel.

Es existieren unendlich viele Stellen $\mathfrak{P}$ von K mit

a) $\eta_1 \equiv a_1 \pmod{\mathfrak{P}}$, wobei $a_1 \in \Omega$;
$\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i \pmod{\mathfrak{P}}$ $[i = 2, \ldots, m]$, wobei die $\tilde{\eta}_i \neq \infty$ aus $\tilde{k}'_{\mathfrak{P}}$ und unabhängige transzendente Elemente sind.

b) $(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (K : k')$.

Sei nämlich

$$F(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) = x^r + A_1(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, x^{r-1} + \cdots + A_r(\eta_1, \ldots, \eta_m)$$

mit $a_i(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ aus $\Omega[\eta_1, \ldots, \eta_m]$ ein definierendes irreduzibles Polynom von K über $\Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m) = k'$. Weiter sei φ eine Nullstelle, $F(\varphi, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0$, also $K = k'(\varphi)$.

Über Ω gilt nach Voraussetzung der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. Es gibt also unendliche viele Elemente a aus Ω derart, daß bei Ersetzung von η_1 durch a in Ω aus $F(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ ein über Ω irreduzibles Polynom $F(x, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ hervorgeht.

Jedem solchen Elemente a ordnen wir einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K zu, so daß $\eta_1 - a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ ist. Es sind nur diejenigen endlich vielen Stellen $\mathfrak{P}$ auszuschließen, für die $\mathfrak{P}/\Delta_k(\varphi)$ oder $\varphi \equiv \infty \pmod{\mathfrak{P}}$ wird.

Diese Stellen $\mathfrak{P}$ erfüllen a); denn es ist $\eta_1 \equiv a \pmod{\mathfrak{P}}$, $a \in \Omega$, und $\eta_i \equiv \tilde{\eta}_i \pmod{\mathfrak{P}}$,

---

[13]) W. Franz, Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 275—293.

[14]) Zur Benennung des Satzes vgl. die Arbeit von F. K. Schmidt, a. a. O. [1]).

wo die $\tilde{\eta}_i$ unabhängige transzendente Elemente im Restklassenkörper sind; $\mathfrak{P}$ teilt allein $\eta_1 - a$. [Einschränkung der Menge der Stellen bezüglich $\eta_1, \ldots, \eta_m$.]

Nach der Wahl von $\mathfrak{P}$ ist φ endlich für $\mathfrak{P}$,

$$\Delta_k(\varphi) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Aus der Dedekindschen Regel ergibt sich demnach

$$(1) \qquad (\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}).$$

Außerdem wird

$$0 = F(\varphi, \eta_1, \ldots, \eta_m) \equiv F(\varphi, a, \eta_2, \ldots, \eta_m) \equiv F(\varphi, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m) \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Das Polynom $F(\varphi, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ ist über Ω und $\Omega(\tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m) \cong \Omega(\eta_2, \ldots, \eta_m)$ irreduzibel, d. h. φ ist eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $F(x, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m)$ mod $\mathfrak{P}$.

Überdies ist

$$\Omega(\eta_i, \ldots, \eta_m) \equiv \Omega(\tilde{\eta}_i, \ldots, \tilde{\eta}_m) \equiv \Omega\overline{(\eta_i, \ldots, \eta_m)} \pmod{\mathfrak{P}} \qquad [i = 2, \ldots, m]$$

und $\Omega \equiv \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \pmod{\mathfrak{P}}$. Wegen $\tilde{\eta}_{1\mathfrak{P}} = a_{\mathfrak{P}} \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$ ist $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\eta_{1\mathfrak{P}}) = \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$, und da

$$\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \leqq \Omega\,\overline{(\eta_i, \ldots, \eta_m)}_{\mathfrak{P}} \leqq \Omega\overline{(\eta_{i-1}, \ldots, \eta_m)}_{\mathfrak{P}}$$

ist, so bleibt $F(x, a, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_m)$ auch über $k' = \Omega(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ mod $\mathfrak{P}$ irreduzibel.

Deshalb gilt

$$(2) \qquad \begin{aligned}(\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) &= \operatorname{grad}_x (F(x, a, \eta_2, \ldots, \eta_m)) \\ &= \operatorname{grad}_x (F(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)) \\ &= (K : k').\end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt aber sogleich b).

Damit ist der Beweis von Satz C beendet. Nun ergeben sich in sinngemäßer Verallgemeinerung die von F. K. Schmidt für Funktionenkörper einer Variablen gefundenen Resultate:

Eindeutigkeitssatz. *Jeder Normalkörper N/k ist durch seinen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(N)$ eindeutig bestimmt.*

Bauerscher Satz. *Die Relationen $\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K)$ und $N \leqq K$ bedingen sich gegenseitig.*

Leider gelingt in der Theorie der algebraischen Funktionen nur in Sonderfällen eine Zusammenfassung all dieser Einzelergebnisse zu einem Reziprozitätsgesetz, wie es von der Zahlentheorie her bekannt ist. Immerhin sind durch die obigen Untersuchungen die wesentlichen algebraischen Eigenschaften jener allgemeinen Körperklasse festgestellt.

The Institute for Advanced Study, Princeton (N. J.), U. S. A.

Eingegangen 3. September 1935.