

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1936

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0175

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0175](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0175)

**LOG Id:** LOG\_0005

**LOG Titel:** Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten.\*)

Von Helmut Wagner in Göttingen.

## Einleitung.

Herr R. Nevanlinna hat eine neue Klasse von meromorphen Funktionen eingehend untersucht<sup>1)</sup>. Es sind dies die Funktionen, welche die schlichte endliche Ebene auf Riemannsche Flächen mit nur logarithmischen Windungspunkten, und zwar mit nur endlich vielen, abbilden. Herr R. Nevanlinna hat darüber folgende Hauptergebnisse gewonnen:

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_q$  ( $q \geq 3$ ) willkürlich gegebene, voneinander verschiedene Punkte der  $w$ -Ebene. Jedem Punkt  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) sei eine natürliche Zahl  $\mu_k$  willkürlich so zugeordnet, daß

$$(1) \quad \mu_k \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \mu_j = \frac{p}{2}$$

ist. Dann gibt es mindestens eine meromorphe Funktion  $w(z)$ , welche die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche abbildet, die über jedem der Punkte  $a_k$  außer möglicherweise gewissen schlichten Blättern genau  $\mu_k$  logarithmische Windungspunkte hat, sonst aber keine (auch keine algebraischen) Windungspunkte mehr besitzt, so daß die Gesamtzahl der (logarithmischen) Windungspunkte  $\sum_{j=1}^q \mu_j = p$  beträgt. Für  $p = 3$  ist diese Funktion im wesentlichen, d. h. bis auf eine ganze lineare Transformation von  $z$ , eindeutig bestimmt; für jedes  $p \geq 4$  aber gibt es unendlich viele wesentlich verschiedene Funktionen  $w(z)$ , die sich dadurch unterscheiden, daß die von ihnen über der  $w$ -Ebene erzeugten Riemannschen Flächen trotz der gleichen Windungspunkte noch verschiedene Struktur haben<sup>2)</sup>. Jede solche Funktion  $w(z)$  hat die Ordnung  $\frac{p}{2}$  und besitzt die Werte  $a_k$  als einzige Ausnahmewerte, und zwar sind die entsprechenden Defekte gleich  $\frac{2\mu_k}{p}$ , so daß die Summe aller Defekte ihr Maximum 2 erreicht. Ferner genügt  $w(z)$  der

\*) Diese Arbeit wurde der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen als Dissertation vorgelegt. Referent war Herr Dozent Dr. Ullrich.

<sup>1)</sup> R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta mathematica 58 (1932), S. 295—373.

<sup>2)</sup> Falls die Anzahl  $q$  der gegebenen Grundpunkte  $a_k$  gleich zwei ist, so ist die (für  $q \geq 3$  notwendige und hinreichende) Bedingung (1) nicht mehr hinreichend. Vielmehr ist dann notwendigerweise auch  $p = 2$ , also  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Die Funktion  $w(z)$  ist wie im Falle  $p = 3$  im wesentlichen eindeutig bestimmt und läßt sich in einfacher Weise als lineare Transformation der Exponentialfunktion darstellen. Die über der  $w$ -Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche ist die bekannte logarithmische Fläche.

## Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = P(z),$$

wo  $P(z)$  ein Polynom vom Grade  $p - 2$  ist. Wenn umgekehrt  $P(z)$  ein beliebiges Polynom vom Grade  $p - 2$  ist, so ist jede Lösung der Differentialgleichung (2) eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , die über der  $w$ -Ebene eine Riemannsche Fläche erzeugt mit genau  $p$  logarithmischen und sonst keinen Windungspunkten derart, daß die Anzahl der über einem und demselben Grundpunkt liegenden logarithmischen Windungspunkte nicht größer als  $\frac{p}{2}$  ist.

Im Anschluß an diese Hauptergebnisse von Herrn R. Nevanlinna erheben sich nun die Fragen: Über welchen Stellen der  $w$ -Ebene liegen bei gegebenem Polynom  $P(z)$  die logarithmischen Windungspunkte der Riemannschen Fläche, die als Bild der schlichten  $z$ -Ebene von einer bestimmten Lösung  $w(z)$  der Gleichung (2) über der  $w$ -Ebene erzeugt wird, und wie ist die Struktur dieser Riemannschen Fläche?

Herr R. Nevanlinna selbst hat diese Fragen schon für die einfachsten Spezialfälle von  $P(z)$  erledigt, nämlich erstens für den Fall, daß  $P(z)$  eine reine Potenz von  $z$  ist<sup>3)</sup>, und zweitens für den Fall, daß  $P(z)$  ein quadratisches Polynom in  $z$  ist<sup>4)</sup>. Als wichtigstes Hilfsmittel bei der Behandlung dieser einfachsten Fälle verwendet er die Laplacesche Transformation zur Integration der Gleichung

$$(3) \quad g'' + \frac{1}{2} P(z) g = 0,$$

welche in enger Beziehung zur Gleichung (2) steht.

Eine Untersuchung der Frage, ob es etwa noch allgemeinere Polynome  $P(z)$  gibt, bei denen man ebenfalls mit Hilfe der Laplaceschen Transformation zum Ziele kommt, zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Und zwar ergibt sich, falls  $p$  eine gerade Zahl ( $p = 2n$ ,  $n \geq 2$ ) ist,

$$(4) \quad P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2} \quad (M \neq 0)$$

als nächstliegende Verallgemeinerung der im vorigen Abschnitt erwähnten einfachsten Polynome.

In dieser Arbeit wollen wir nun die oben gestellten Fragen an dem neuen Spezialfall (4) von  $P(z)$  behandeln. Auch in diesem Falle lassen sich alle Rechnungen zur Bestimmung der Lage der logarithmischen Windungspunkte wirklich bis zu Ende durchführen, und zwar zeigt sich, daß sich die Lage der logarithmischen Windungspunkte explizite mit Hilfe der Gammafunktion angeben läßt. Die Frage nach der Struktur der Riemannschen Fläche werden wir für gewisse ausgezeichnete Fälle vollständig lösen, nämlich dann, wenn das Polynom (4) so beschaffen ist, daß von den  $2n$  logarithmischen Windungspunkten  $n$  über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen. In den übrigen Fällen gelingt es uns, Aussagen zu gewinnen, die über die allgemeinen Nevanlinnaschen Sätze nicht unerheblich hinausgehen.

<sup>3)</sup> R. Nevanlinna, Über die Herstellung transzenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen, Acta mathematica 55 (1930), S. 259—276.

<sup>4)</sup> Vgl. die schon in Fußnote <sup>1)</sup> genannte Abhandlung.

## **Teil 1. Vorbereitende Betrachtungen.**

## § 1. Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen als Quotienten zweier nullstellenfremden ganzen Funktionen.

Um die in der Einleitung geschilderten Nevanlinnaschen Funktionen darzustellen, geht man von der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = P(z)$$

aus. Setzt man  $w' = g^{-2}$ , so geht (2) über in die Differentialgleichung

$$(3) \quad g'' + \frac{1}{2} P(z) g = 0,$$

und es gilt:

Der Quotient von zwei beliebigen linear unabhängigen Lösungen von (3) ist eine Lösung von (2), und umgekehrt lässt sich jede Lösung von (2) als Quotient von zwei linear unabhängigen Lösungen von (3) darstellen.

Hierdurch ist die Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen auf die Integration der Gleichung (3) zurückgeführt. Jede Lösung von (3) ist eine ganze Funktion (der Ordnung  $\frac{p}{2}$ ) und lässt sich durch eine beständig konvergente Potenzreihe darstellen.

Wir wollen daher zunächst ganz allgemein  $g$  in Form einer Potenzreihe ansetzen. Es sei

$$(5) \quad P(z) = -2 \sum_{j=0}^{p-2} b_j z^j, \\ g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

also

$$g''' = \sum_{i=2}^{\infty} j(j-1) c_j z^{j-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (j+2)(j+1) c_{j+2} z^j.$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Gleichung (3), so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

Nachdem man  $c_0$  und  $c_1$  willkürlich festgesetzt hat, lassen sich aus (6) die übrigen Koeffizienten  $c_2, c_3, \dots$  eindeutig ermitteln. Wir bestimmen zwei linear unabhängige Lösungen von (3) durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} G^*(z) &= c_0^* + c_1^* z + \dots \\ G^{**}(z) &= c_0^{**} + c_1^{**} z + \dots \end{aligned} \quad (c_1^* c_0^{**} - c_1^{**} c_0^* \neq 0).$$

Dann ist  $w(z) = \frac{G^*(z)}{G^{**}(z)}$  die Darstellung der Nevanlinnaschen Funktionen als Quotienten zweier nullstellenfremder ganzer Funktionen.

Insbesondere heben wir die Lösungen

$$g^*(z) = 0 + 1 \cdot z + \dots, \quad g^{**}(z) = 1 + 0 \cdot z + \dots$$

heraus und nennen

$$w(z) = \frac{g^*(z)}{g^{**}(z)} = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots$$

die *Grundlösung* von (2).

Wir werden unsere späteren Untersuchungen, insbesondere die Bestimmung der Lage der logarithmischen Windungspunkte, nur für die Grundlösung von (2) durchführen. Dies bedeutet keine Einschränkung; denn die allgemeine Lösung von (2) ist nichts anderes als eine lineare Transformation der Grundlösung.

## § 2. Normierung von $P(z)$ zu $-2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$ .

Es sei nun, um zu unserem Spezialfall überzugehen,

$$(4) \quad p = 2n \quad (n \text{ ganz und } \geq 2), \\ P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2} \quad (M \neq 0),$$

also (vgl. (5))

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 = \dots = b_{n-3} = 0, & b_{n-2} &= N, \\ b_{n-1} &= b_n = \dots = b_{2n-3} = 0, & b_{2n-2} &= M. \end{aligned}$$

Dann lauten die Gleichungen (2) und (3):

$$(7) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2},$$

$$(8) \quad g'' - (Mz^{2n-2} + Nz^{n-2}) g = 0.$$

Wir wollen, um auch die Abhängigkeit von  $n$ ,  $M$  und  $N$  zum Ausdruck zu bringen, die Lösungen  $g^*$ ,  $g^{**}$  von (8) und die Grundlösung  $w$  von (7) ausführlich bezeichnen mit

$$g_n^*(z; M, N), \quad g_n^{**}(z; M, N), \quad w_n(z; M, N).$$

Setzt man

$$g_n^*(z; M, N) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^* z^j \quad (c_0^* = 0, \quad c_1^* = 1),$$

$$g_n^{**}(z; M, N) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{**} z^j \quad (c_0^{**} = 1, \quad c_1^{**} = 0),$$

so ist, wie aus den Gleichungen (6) folgt,

$$\begin{aligned} c_j^* &\equiv 0 \text{ für } j \not\equiv 1 \pmod{n}, \\ c_j^{**} &\equiv 0 \text{ für } j \not\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich nach (6) für die Koeffizienten  $c_j^*$  mit  $j \equiv 1 \pmod{n}$  das Gleichungssystem

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n+1)n c_{n+1}^* - N c_1^* = 0 \\ (2n+1) 2n c_{2n+1}^* - N c_{n+1}^* - M c_1^* = 0 \\ (3n+1) 3n c_{3n+1}^* - N c_{2n+1}^* - M c_{n+1}^* = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

und für die Koeffizienten  $c_j^{**}$  mit  $j \equiv 0 \pmod{n}$  das Gleichungssystem

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} n(n-1) c_n^{**} - N c_0^{**} = 0 \\ 2n(2n-1) c_{2n}^{**} - N c_n^{**} - M c_0^{**} = 0 \\ 3n(3n-1) c_{3n}^{**} - N c_{2n}^{**} - M c_n^{**} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Daher ist für  $k = 1, 2, 3, \dots$  sowohl  $c_{kn+1}^*$  als auch  $c_{kn}^{**}$  ein Polynom in  $M$  und  $N$ , welches, aufgefaßt als Polynom in  $\sqrt[n]{M}$  und  $N$ , homogen vom Grade  $k$  ist. Sowohl in  $c_{kn+1}^*$  als auch in  $c_{kn}^{**}$  tritt  $N$  entweder nur in geraden oder nur in ungeraden Potenzen auf, je nachdem  $k$  gerade oder ungerade ist.

Somit erfüllen die Lösungen

$$(11) \quad \begin{cases} g_n^*(z; M, N) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^* z^{kn+1} \\ g_n^{**}(z; M, N) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**} z^{kn} \end{cases}$$

der Gleichung (8) die Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{cases} g_n^*(z; M, N) = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{M}}} g_n^*\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}} z; 1, \frac{N}{\sqrt{M}}\right), \\ g_n^{**}(z; M, N) = g_n^{**}\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}} z; 1, \frac{N}{\sqrt{M}}\right); \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} g_n^*\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z; M, N\right) = e^{\frac{\pi i}{n}} g_n^*(z; M, -N), \\ g_n^{**}\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z; M, N\right) = g_n^{**}(z; M, -N). \end{cases}$$

Durch zweimalige Anwendung von (13) erhält man

$$\begin{cases} g_n^*\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z; M, N\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} g_n^*(z; M, N), \\ g_n^{**}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z; M, N\right) = g_n^{**}(z; M, N), \end{cases}$$

was übrigens auch unmittelbar aus (11) ersichtlich ist.

Hieraus ergeben sich für die Grundlösung  $w_n = \frac{g_n^*}{g_n^{**}}$  der Gleichung (7) die Beziehungen:

$$(14) \quad w_n(z; M, N) = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{M}}} w_n\left(\sqrt[n]{\sqrt{M}} z; 1, \frac{N}{\sqrt{M}}\right),$$

$$(15) \quad w_n\left(e^{\frac{\pi i}{n}} z; M, N\right) = e^{\frac{\pi i}{n}} w_n(z; M, -N),$$

$$(16) \quad w_n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} z; M, N\right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} w_n(z; M, N).$$

In (14) kann, ebenso wie oben in (12),  $\sqrt[n]{\sqrt{M}}$  jeden der beiden Werte und, nachdem  $\sqrt[n]{\sqrt{M}}$  fest gewählt ist,  $\sqrt[n]{\sqrt{M}}$  jeden der  $n$  Werte bedeuten.

Wir wollen nun für das Folgende  $P(z)$  zu  $-2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$  normieren. Dies ist keine wesentliche Einschränkung. Denn Gleichung (14) gestattet uns, alle für  $P(z) = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$  gewonnenen Ergebnisse ohne Mühe auf den allgemeinen Fall  $P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2}$  zu übertragen. Der Einfachheit halber wollen wir die im normierten Falle auftretenden Funktionen

$$g_n^*(z; 1, c), \quad g_n^{**}(z; 1, c), \quad w_n(z; 1, c)$$

kurz mit

$$g_n^*(z, c), \quad g_n^{**}(z, c), \quad w_n(z, c)$$

bezeichnen. Da wir die Gleichungen (7), (8), (15), (16) später nur im Falle

$$P(z) = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$$

anwenden werden, wollen wir sie hier noch einmal besonders für diesen Fall anschreiben:

$$(17) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2},$$

$$(18) \quad g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})g = 0,$$

$$(19) \quad w_n \left( e^{\frac{\pi i}{n}} z, c \right) = e^{\frac{\pi i}{n}} w_n(z, -c),$$

$$(20) \quad w_n \left( e^{\frac{2\pi i}{n}} z, c \right) = e^{\frac{2\pi i}{n}} w_n(z, c).$$

Dann brauchen wir später bloß hierauf zu verweisen.

§ 3.  $g_n^*(z, c)$ ,  $g_n^{**}(z, c)$  und  $w_n(z, c)$  als Funktionen von  $z$  und  $c$ .

$g_n^*(z, c)$  und  $g_n^{**}(z, c)$  sind, da sie die Differentialgleichung (18) befriedigen, bei festem  $c$  ganze Funktionen von  $z$ , und zwar gelten die Entwicklungen

$$g_n^*(z, c) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^* z^{kn+1},$$

$$g_n^{**}(z, c) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**} z^{kn},$$

wo die Koeffizienten  $c_{kn+1}^*$  und  $c_{kn}^{**}$  den Gleichungen (vgl. (9) und (10))

$$(21) \quad \begin{cases} (n+1) n c_{n+1}^* - c = 0 \\ (2n+1) 2n c_{2n+1}^* - c c_{n+1}^* - 1 = 0 \\ (3n+1) 3n c_{3n+1}^* - c c_{2n+1}^* - c_{n+1}^* = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} n(n-1) c_n^{**} - c = 0 \\ 2n(2n-1) c_{2n}^{**} - c c_n^{**} - 1 = 0 \\ 3n(3n-1) c_{3n}^{**} - c c_{2n}^{**} - c_n^{**} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

genügen.

Wir werden nun zeigen, daß  $g_n^*(z, c)$  und  $g_n^{**}(z, c)$  bei festem  $z$  auch ganze Funktionen von  $c$  sind.

Wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sind die Koeffizienten  $c_{kn+1}^* = c_{kn+1}^*(c)$  und  $c_{kn}^{**} = c_{kn}^{**}(c)$  Polynome in  $c$  mit positiv reellen Koeffizienten. Daher gilt, wenn  $Q$  eine beliebige positiv reelle Zahl ist, für  $|c| \leq Q$ :

$$|c_{kn+1}^*(c)| \leq c_{kn+1}^*(Q); \quad |c_{kn}^{**}(c)| \leq c_{kn}^{**}(Q).$$

Infolgedessen sind die Reihen

$$|z| + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^*(Q) |z|^{kn+1} = g_n^*(|z|, Q),$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**}(Q) |z|^{kn} = g_n^{**}(|z|, Q)$$

für  $|c| \leq Q$  Majoranten der Reihen

$$z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1}^*(c) z^{kn+1} = g_n^*(z, c),$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{**}(c) z^{kn} = g_n^{**}(z, c),$$

und diese konvergieren daher bei festem  $z$  für  $|c| \leq Q$  gleichmäßig in  $c$ . Wie der Weierstraßsche Doppelreihensatz lehrt, sind somit ihre Summen  $g_n^*(z, c)$  und  $g_n^{**}(z, c)$  bei festem  $z$  für  $|c| < Q$  regulär analytische Funktionen von  $c$ . Hiermit ist, da man ja  $Q$  beliebig groß wählen kann, die Behauptung bewiesen. Zusammenfassend hat man also das Ergebnis:

*Die Lösungen  $g_n^*(z, c)$  und  $g_n^{**}(z, c)$  von (18) sind bei festem  $c$  ganze Funktionen von  $z$  und bei festem  $z$  ganze Funktionen von  $c$ ; die Grundlösung  $w_n(z, c)$  von (17) ist bei festem  $c$  eine meromorphe Funktion von  $z$  und bei festem  $z$  eine meromorphe Funktion von  $c$ .*

### Teil 2. Die Lage der logarithmischen Windungspunkte.

#### § 4. Integration der Gleichung $g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})g = 0$ mit Hilfe der Laplaceschen Transformation.

Um weitere Schlüsse über die Grundlösung  $w_n(z, c)$  von (17) ziehen zu können, wollen wir die Gleichung

$$(18) \quad g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2})g = 0$$

mit Hilfe der Laplaceschen Transformation integrieren.

Wir führen zunächst durch

$$(23) \quad x = \frac{2}{n} z^n$$

die neue unabhängige Veränderliche  $x$  ein. Dann wird

$$g'' = \frac{d^2g}{dx^2} = 4z^{2n-2} \frac{d^2g}{dx^2} + (2n-2)z^{n-2} \frac{dg}{dx},$$

und Gleichung (18) geht über in

$$4z^{2n-2} \frac{d^2g}{dx^2} + (2n-2)z^{n-2} \frac{dg}{dx} - (z^{2n-2} + cz^{n-2})g = 0$$

oder

$$(24) \quad x \frac{d^2g}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{dg}{dx} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{c}{2n}\right)g = 0.$$

Macht man zur Lösung von (24) den Ansatz

$$(25) \quad g = \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} u(t) dt,$$

wo  $u(t)$  eine noch zu bestimmende Funktion und  $\alpha$  und  $\beta$  noch zu bestimmende Integrationsgrenzen bedeuten, so ist unter der Annahme, daß man in (25) unter dem Integralzeichen differenzieren darf,

$$\frac{dg}{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} t e^{tx} u dt, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = \int_{\alpha}^{\beta} t^2 e^{tx} u dt,$$

und, wie sich durch partielle Integration ergibt,

$$xg = e^{tx} u \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} \frac{du}{dt} dt,$$

$$x \frac{d^2g}{dx^2} = t^2 e^{tx} u \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} \left(t^2 \frac{du}{dt} + 2tu\right) dt.$$

Hiermit lautet Gleichung (24):

$$(26) \quad - \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} \left\{ t^2 \frac{du}{dt} + 2tu - \left(1 - \frac{1}{n}\right) tu - \frac{1}{4} \frac{du}{dt} + \frac{c}{2n} u \right\} dt + \left( t^2 - \frac{1}{4} \right) e^{tx} u \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Damit (25) eine Lösung von (24) wird, bestimmen wir  $u(t)$  so, daß in dem in (26) auftretenden Integral die geschweifte Klammer identisch verschwindet. Als Lösung der Differentialgleichung

$$\left( t^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{du}{dt} + \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right) t + \frac{c}{2n} \right) u = 0$$

erhält man demnach für  $u(t)$ :

$$u(t) = \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b,$$

wo zur Abkürzung

$$(27) \quad \frac{c-1}{2n} - \frac{1}{2} = a, \quad \frac{-c-1}{2n} - \frac{1}{2} = b$$

gesetzt ist.

Da  $u(t)$  eine mehrdeutige Funktion von  $t$  ist, wollen wir sogleich einen eindeutigen Zweig festlegen. Zu diesem Zweck denken wir uns die  $t$ -Ebene vom Punkte  $t = -\frac{1}{2}$  an längs der negativ reellen Achse bis ins Unendliche und vom Punkte  $t = +\frac{1}{2}$  an längs der positiv reellen Achse bis ins Unendliche aufgeschlitzt. Es sei

$$\frac{1}{2} + t = e^{\log \left| \frac{1}{2} + t \right| + i\varphi}, \quad \frac{1}{2} - t = e^{\log \left| \frac{1}{2} - t \right| + i\psi},$$

wobei unter  $\log \left| \frac{1}{2} + t \right|$  bzw. unter  $\log \left| \frac{1}{2} - t \right|$  der reelle Wert zu verstehen ist.

Dann wird

$$u(t) = e^{a \log \left| \frac{1}{2} + t \right| + ia\varphi} \cdot e^{b \log \left| \frac{1}{2} - t \right| + ib\psi},$$

und wir wollen bei unseren folgenden Betrachtungen den durch die Ungleichungen

$$-\pi < \varphi < \pi, \quad -\pi < \psi < \pi$$

festgelegten eindeutigen Zweig von  $u(t)$  zugrunde legen. Für später wollen wir noch anmerken, daß dann den Punkten des unteren Schnittufers der negativ reellen Achse die Argumente  $\varphi = -\pi$ ,  $\psi = 0$ , den Punkten des oberen Schnittufers der negativ reellen Achse die Argumente  $\varphi = \pi$ ,  $\psi = 0$  entsprechen.

Nun haben wir im Integral (25) noch einen geeigneten Integrationsweg zu bestimmen. Beschränkt man  $x$  auf die rechte Halbebene  $\Re x > 0$ , so strebt der Ausdruck (vgl. (26))

$$\left( t^2 - \frac{1}{4} \right) e^{tx} u = - \left( \frac{1}{2} + t \right)^{a+1} \left( \frac{1}{2} - t \right)^{b+1} e^{tx}$$

gegen 0, wenn  $t$  längs eines der beiden Schnittufer der negativ reellen Achse über alle Grenzen wächst. Daher kann man im Integral (25) sowohl  $\alpha$  als auch  $\beta$  gleich  $-\infty$  wählen. Damit nun das Integral (25) nicht identisch verschwindet, nehmen wir den folgenden aus drei Stücken bestehenden Integrationsweg  $\mathfrak{S}_\epsilon$  ( $0 < \epsilon < 1$ ): Das erste

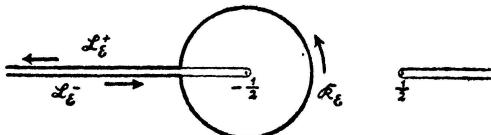


Fig. 1.

Stück  $\mathfrak{L}_{\epsilon}^-$  gehe von  $-\infty$  längs des unteren Schnittufers der negativ reellen Achse bis zum Punkte  $t = -\frac{1}{2} - \epsilon$ . Das zweite Stück  $\mathfrak{R}_{\epsilon}$  sei die im positiven Sinne vom Punkte  $t = -\frac{1}{2} - \epsilon$  des unteren Schnittufers bis zum Punkte  $t = -\frac{1}{2} + \epsilon$  des oberen Schnittufers durchlaufene Kreislinie  $|t + \frac{1}{2}| = \epsilon$ . Das dritte Stück  $\mathfrak{L}_{\epsilon}^+$  gehe vom Punkte  $t = -\frac{1}{2} + \epsilon$  längs des oberen Schnittufers der negativ reellen Achse bis  $-\infty$  (vgl. Fig. 1).

Nunmehr erkennt man, daß das Integral

$$(28) \quad I_n(x, c) = \int_{\mathfrak{C}_{\epsilon}} e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt$$

für  $\Re x > 0$  bei beliebigem  $c$  eine Lösung der Gleichung (24) darstellt, vorläufig allerdings noch unter der Annahme, daß man es unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren darf.

Wir wollen nun zeigen, daß man das uneigentliche Integral  $I_n(x, c)$  tatsächlich unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren darf. Dabei werden wir gleichzeitig noch einige weitere Aussagen über  $I_n(x, c)$  gewinnen, die wir später benötigen werden. Wir stützen uns hierbei auf folgenden Satz:<sup>5)</sup>

Es sei  $\mathfrak{S}$  eine in der  $t$ -Ebene gelegene streckbare Kurve und  $\mathfrak{G}$  ein in der  $x$ -Ebene gelegenes Gebiet.  $f(t, x)$  sei für jedes auf  $\mathfrak{S}$  gelegene  $t$  eine in  $\mathfrak{G}$  regulär analytische Funktion von  $x$  und innerhalb  $\mathfrak{G}$  gleichmäßig beschränkt. Dann stellt das Integral  $\int_{\mathfrak{S}} f(t, x) dt$  (falls es für jedes  $x$  aus  $\mathfrak{G}$  im eigentlichen Riemannschen Sinne existiert) eine in  $\mathfrak{G}$  regulär analytische Funktion von  $x$  dar.

Es sei nun für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{\nu} < -\frac{1}{2} - \epsilon, \quad \beta_{\nu} < -\frac{1}{2} - \epsilon,$$

und es strebe  $\alpha_{\nu} \rightarrow -\infty$ ,  $\beta_{\nu} \rightarrow -\infty$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Den Punkt  $t = \alpha_{\nu}$  denken wir uns auf dem unteren Schnittufer, den Punkt  $t = \beta_{\nu}$  auf dem oberen Schnittufer liegend. Dann stellt nach obigem Satze für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  das Integral

$$I_{n, \nu} = \int_{\alpha_{\nu}}^{\beta_{\nu}} e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt,$$

welches über das zwischen den Punkten  $t = \alpha_{\nu}$  und  $t = \beta_{\nu}$  gelegene Stück des Weges  $\mathfrak{S}_{\epsilon}$  zu erstrecken ist, bei festem  $c$  eine ganze Funktion von  $x$  und bei festem  $x$  eine ganze Funktion von  $c$  dar, und es strebt für  $\nu \rightarrow \infty$

$$I_{n, \nu} \rightarrow I_n \quad \text{für } \Re x > 0.$$

<sup>5)</sup> Siehe z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 1, Leipzig u. Berlin 1930, S. 135 u. 174.

Nun ist für  $\Re x \geq 0$

$$|I_{n,\nu}| \leq \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} \left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt| = \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} + \int_{\mathfrak{R}_\varepsilon} + \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+} .$$

Beschränkt man  $x$  auf den Kreis  $|x - \xi| \leq \xi$  ( $\xi > 0$ ) und  $c$  auf den Kreis  $|c| \leq Q$  ( $Q > 0$ ), so ist auf  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  der Integrand  $\left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right|$  beschränkt und somit auch das Integral

$$\int_{\mathfrak{R}_\varepsilon} \left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt| .$$

Außerdem gelten für die Integrale  $\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-}$  und  $\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+}$  die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt| &= \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| e^{tx + a \log |\frac{1}{2} + t| + i a \pi + b \log |\frac{1}{2} - t|} \right| |dt| \\ &\leq e^{\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} e^{t \Re x} \left| \frac{1}{2} + t \right|^{\Re a} \left| \frac{1}{2} - t \right|^{\Re b} |dt| \leq e^{\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| \frac{1}{2} + t \right|^{\Re a} \left| \frac{1}{2} - t \right|^{\Re b} |dt| \\ &= e^{\frac{Q}{2n}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| \frac{1}{2} + t \right|^{-1-\frac{1}{n}} \left| \frac{\frac{1}{2} - t}{\frac{1}{2} + t} \right|^{\Re b} |dt| \leq e^{\frac{Q}{2n}} \left( \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\frac{Q-1}{2n} - \frac{1}{2}} \int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^\mp} \left| \frac{1}{2} + t \right|^{-1-\frac{1}{n}} |dt| . \end{aligned}$$

Daher ist sowohl

$$\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^-} \left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|$$

als auch

$$\int_{\mathfrak{L}_\varepsilon^+} \left| e^{tx} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|$$

für  $|x - \xi| \leq \xi$  und  $|c| \leq Q$  beschränkt. Man hat also

$$|I_{n,\nu}| \leq H,$$

wo  $H$ , falls  $|x - \xi| \leq \xi$  und  $|c| \leq Q$  ist, eine von  $\nu$ ,  $x$  und  $c$  unabhängige Schranke ist. Da man aber  $\xi$  und  $Q$  beliebig groß wählen kann, so findet nach dem Vitalischenen Satze die Konvergenz von  $I_{n,\nu}$  gegen  $I_n$  auf jedem endlichen Bereich der rechten  $x$ -Halbebene  $\Re x > 0$  und auf jedem endlichen Bereich der  $c$ -Ebene gleichmäßig in  $x$  und  $c$  statt. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz ist daher  $I_n$  bei festem  $c$  eine für  $\Re x > 0$  regulär analytische Funktion von  $x$  und bei festem  $x$  mit positivem Realteil ( $\Re x > 0$ ) eine für alle  $c$  regulär analytische Funktion von  $c$ . Der Weierstraßsche Doppelreihensatz liefert weiterhin für  $\Re x > 0$  die Folgerungen:

$$\frac{dI_n}{dx} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{dI_{n,\nu}}{dx}, \quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{d^2 I_{n,\nu}}{dx^2} .$$

Hieraus ergibt sich, da man ja die eigentlichen Integrale  $I_{n,\nu}$  unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren darf, daß man, wie behauptet, auch das uneigentliche Integral  $I_n$  unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren darf. Wir fassen unsere Ergebnisse in folgenden Satz zusammen:

*Das Integral*

$$(28) \quad I_n(x, c) = \int_{\mathbb{C}_\varepsilon} e^{tx} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt$$

stellt bei beliebigem  $c$  für  $\Re x > 0$  eine Lösung der Gleichung (24) dar und ist bei festem  $c$  eine für  $\Re x > 0$  regulär analytische Funktion von  $x$ , bei festem  $x$  mit positivem Realteil ( $\Re x > 0$ ) eine für alle  $c$  regulär analytische Funktion von  $c$ .

Wir bemerken noch, daß das Integral  $I_n(x, c)$ , falls nur  $0 < \varepsilon < 1$  ist, von  $\varepsilon$  unabhängig ist. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, daß nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral

$$\int e^{tx} \left(\frac{1}{2} + t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt$$

verschwindet, wenn es über den in Fig. 2 dargestellten geschlossenen Integrationsweg erstreckt wird.

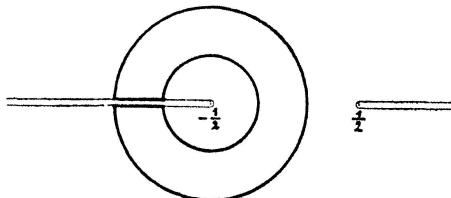


Fig. 2.

Außer dem Integral  $I_n$  brauchen wir noch das für  $\Re x > 0$ ,  $\Re c > -n + 1$  existierende Integral

$$(29) \quad I_n^*(x, c) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} e^{tx} \left(-\frac{1}{2} - t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt,$$

welches längs der negativ reellen Achse zu erstrecken ist und wo unter

$$\left(-\frac{1}{2} - t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b$$

der Wert

$$e^{a \log |-\frac{1}{2} - t| + b \log |\frac{1}{2} - t|}$$

mit reellem  $\log |-\frac{1}{2} - t|$  und reellem  $\log |\frac{1}{2} - t|$  zu verstehen ist. Man gelangt auf demselben Wege wie oben bei  $I_n$  zu folgendem Ergebnis:

*Das Integral*

$$(29) \quad I_n^*(x, c) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{tx} \left(-\frac{1}{2} - t\right)^a \left(\frac{1}{2} - t\right)^b dt$$

stellt für  $\Re x > 0$ ,  $\Re c > -n + 1$  eine Lösung der Gleichung (24) dar und ist bei festem  $c$  mit  $\Re c > -n + 1$  eine für  $\Re x > 0$  regulär analytische Funktion von  $x$ , bei festem  $x$  mit  $\Re x > 0$  eine für  $\Re c > -n + 1$  regulär analytische Funktion von  $c$ .

Für später sei noch angemerkt, daß man auch das Integral  $I_n^*$  unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren darf.

Wir kehren nunmehr vermittels (23) zur unabhängigen Veränderlichen  $z$  zurück. Dabei geht die rechte Halbebene  $\Re z > 0$  in einen der Winkelräume

$$\left| \arg z - \frac{m\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{2n} \quad (m = 0, 2, \dots, 2n-2)$$

über, und zwar wollen wir der Einfachheit halber stets den Winkelraum  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  wählen. Dann erhalten wir folgende Ergebnisse:

*Das Integral*

$$(30) \quad J_n(z, c) = \int_{\mathbb{C}_\varepsilon} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt$$

stellt für  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  bei beliebigem  $c$  eine Lösung der Gleichung (18) dar und ist bei festem  $c$  eine für  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  regulär analytische Funktion von  $z$ , bei festem  $z$  mit  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  eine für alle  $c$  regulär analytische Funktion von  $c$ .

*Das Integral*

$$(31) \quad J_n^*(z, c) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left( -\frac{1}{2} - t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt$$

stellt für  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ ,  $\Re c > -n+1$  eine Lösung der Gleichung (18) dar und ist bei festem  $c$  mit  $\Re c > -n+1$  eine für  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  regulär analytische Funktion von  $z$ , bei festem  $z$  mit  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  eine für  $\Re c > -n+1$  regulär analytische Funktion von  $c$ <sup>6</sup>).

## § 5. Zusammenhänge zwischen den Integralen $J_n, J_n^*$ und den Potenzreihen $g_n^*, g_n^{**}$ .

Zunächst wollen wir untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen den Integralen  $J_n(z, c)$  und  $J_n^*(z, c)$  besteht. Dabei haben wir  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ ,  $\Re c > -n+1$  vorauszusetzen.

Nun strebt aber unter diesen Voraussetzungen

$$\int_{\mathbb{C}_\varepsilon} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

<sup>6</sup>) Die Werte, die das Integral (30) bzw. (31) in dem Winkelraum  $\left| \arg z - \frac{m'\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{2n}$  ( $m' = 0, 2, \dots, 2n-2$ ) liefert, sind im allgemeinen keineswegs analytische Fortsetzungen der Werte, die es in dem Winkelraum

$$\left| \arg z - \frac{m''\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{2n} \quad (m'' = 0, 2, \dots, 2n-2)$$

liefert, falls  $m' \neq m''$  ist. Wenn man also, wie es hier stets geschehen soll, unter  $J_n(z, c)$  bzw.  $J_n^*(z, c)$  eine bestimmte analytische Funktion von  $z$  verstehen will, so muß man in (30) bzw. (31)  $z$  auf einen bestimmten der Winkelräume  $\left| \arg z - \frac{m\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{2n}$  ( $m = 0, 2, \dots, 2n-2$ ) beschränken, z. B. wie oben auf den Winkelraum  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ .

und somit ist

$$J_n(z, c) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_\epsilon^-} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_\epsilon^+} e^{\frac{2}{n} z^n t} \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b dt.$$

Da hierin

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_\epsilon^-} = e^{-i\pi a} J_n^*(z, c), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_\epsilon^+} = -e^{i\pi a} J_n^*(z, c)$$

ist, so ergibt sich für  $\Re c > -n + 1$  folgender Zusammenhang:

$$(32) \quad J_n(z, c) = -2i \sin \pi a J_n^*(z, c).$$

Nunmehr können wir dazu übergehen, den Zusammenhang zwischen den Lösungen  $J_n(z, c)$ ,  $J_n^*(z, c)$  und  $g_n^*(z, c)$ ,  $g_n^{**}(z, c)$  der Gleichung (18) zu ermitteln. Wenn auch  $J_n(z, c)$  und  $J_n^*(z, c)$  durch (30) bzw. (31) nur in dem Winkelraum  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  dargestellt werden, so wissen wir doch, daß  $J_n$  und  $J_n^*$  (wie jede Lösung von (18)) bei festem  $c$  ganze Funktionen von  $z$  sind und sich in beständig konvergente Potenzreihen entwickeln lassen. Daher können wir ansetzen:

$$\begin{aligned} J_n(z, c) &= \gamma_n^{(0)}(c) + \gamma_n^{(1)}(c) z + \dots, \\ J_n^*(z, c) &= \delta_n^{(0)}(c) + \delta_n^{(1)}(c) z + \dots, \end{aligned}$$

so daß wegen der Anfangsbedingungen von  $g_n^*(z, c)$  und  $g_n^{**}(z, c)$  folgender Zusammenhang zwischen  $J_n$ ,  $J_n^*$  und  $g_n^*$ ,  $g_n^{**}$  besteht:

$$(33) \quad \begin{cases} J_n(z, c) = \gamma_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z, c) + \gamma_n^{(1)}(c) g_n^*(z, c), \\ J_n^*(z, c) = \delta_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z, c) + \delta_n^{(1)}(c) g_n^*(z, c). \end{cases}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten  $\gamma_n^{(0)}(c)$ ,  $\gamma_n^{(1)}(c)$ ,  $\delta_n^{(0)}(c)$ ,  $\delta_n^{(1)}(c)$  haben wir nun zu bestimmen. Zunächst zeigen wir, daß  $\gamma_n^{(0)}(c)$  und  $\gamma_n^{(1)}(c)$  für alle  $c$ ,  $\delta_n^{(0)}(c)$  und  $\delta_n^{(1)}(c)$  für  $\Re c > -n + 1$  regulär analytische Funktionen von  $c$  sind.

Es sei  $c^{(0)}$  eine beliebige Stelle der  $c$ -Ebene. Da  $w_n(z, c^{(0)})$  nicht konstant ist, gibt es zwei dem Winkelraum  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$  angehörende Punkte  $z_1$  und  $z_2$  so, daß

$$\frac{g_n^*(z_1, c^{(0)})}{g_n^{**}(z_1, c^{(0)})} = w_n(z_1, c^{(0)}) \neq w_n(z_2, c^{(0)}) = \frac{g_n^*(z_2, c^{(0)})}{g_n^{**}(z_2, c^{(0)})}$$

ist.  $z_1$  und  $z_2$  seien so gewählt. Dann ist:

$$(34) \quad g_n^{**}(z_1, c^{(0)}) g_n^*(z_2, c^{(0)}) - g_n^{**}(z_2, c^{(0)}) g_n^*(z_1, c^{(0)}) \neq 0.$$

Nach (33) hat man nun:

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z_1, c) + \gamma_n^{(1)}(c) g_n^*(z_1, c) &= J_n(z_1, c), \\ \gamma_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z_2, c) + \gamma_n^{(1)}(c) g_n^*(z_2, c) &= J_n(z_2, c). \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Auflösung:

$$(35) \quad \begin{cases} \gamma_n^{(0)}(c) = \frac{J_n(z_1, c) g_n^*(z_2, c) - J_n(z_2, c) g_n^*(z_1, c)}{g_n^{**}(z_1, c) g_n^*(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c) g_n^*(z_1, c)}, \\ \gamma_n^{(1)}(c) = \frac{g_n^{**}(z_1, c) J_n(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c) J_n(z_1, c)}{g_n^{**}(z_1, c) g_n^*(z_2, c) - g_n^{**}(z_2, c) g_n^*(z_1, c)}. \end{cases}$$

Wie früher (vgl. auch § 3) gezeigt wurde, sind

$$g_n^*(z_1, c), g_n^*(z_2, c), g_n^{**}(z_1, c), g_n^{**}(z_2, c), J_n(z_1, c), J_n(z_2, c)$$

ganze Funktionen von  $c$ . Daher sind in (35) Zähler und Nenner ganze Funktionen von  $c$ , und da nach (34) der Nenner an der Stelle  $c^{(0)}$  nicht verschwindet, so schließt man hieraus, daß  $\gamma_n^{(0)}(c)$  und  $\gamma_n^{(1)}(c)$  in der Umgebung der Stelle  $c^{(0)}$  regulär analytisch sind. Da aber  $c^{(0)}$  ganz beliebig war, so sind in der Tat  $\gamma_n^{(0)}(c)$  und  $\gamma_n^{(1)}(c)$  für alle  $c$  regulär analytische Funktionen von  $c$ .

Ganz ebenso erkennt man, daß  $\delta_n^{(0)}(c)$  und  $\delta_n^{(1)}(c)$  für  $\Re c > -n + 1$  regulär analytische Funktionen von  $c$  sind.

Bevor wir uns zur expliziten Bestimmung der in (33) auftretenden Koeffizienten wenden, erinnern wir an das Eulersche Integral erster Gattung  $B(\varrho, \sigma)$  (die Betafunktion), an das Eulersche Integral zweiter Gattung  $\Gamma(s)$  (die Gammafunktion) sowie an den Zusammenhang zwischen beiden:

$$(36) \quad B(\varrho, \sigma) = \int_0^1 t^{\varrho-1} (1-t)^{\sigma-1} dt \quad (\Re \varrho > 0, \Re \sigma > 0)$$

$$(37) \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad (\Re s > 0)$$

$$(38) \quad B(\varrho, \sigma) = \frac{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho + \sigma)}.$$

Um nun zunächst  $\delta_n^{(0)}(c)$  und  $\delta_n^{(1)}(c)$  zu ermitteln, substituieren wir in dem Integral (31)  $t = -\tau - \frac{1}{2}$ . Dann geht die Darstellung (31) über in

$$(39) \quad J_n^*(z, c) = \int_0^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n} \tau^a (\tau + 1)^b d\tau.$$

Wie in § 4 bemerkt wurde, darf man  $I_n^*(x, c)$  in der Gestalt (29) unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren. Es ist leicht, auf Grund dieser Tatsache einzusehen, daß man auch das Integral  $J_n^*$  z. B. in der Gestalt (39) unter dem Integralzeichen nach  $z$  differenzieren darf, d. h. daß gilt:

$$(40) \quad \frac{dJ_n^*}{dz} = \int_0^\infty (-2\tau - 1) z^{n-1} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n} \tau^a (\tau + 1)^b d\tau.$$

Diese Darstellungen (39) für  $J_n^*$  und (40) für  $\frac{dJ_n^*}{dz}$  gelten für  $|\arg z| < \frac{\pi}{2n}$ ,  $\Re c > -n + 1$ ,

sind also nicht ohne weiteres bei  $z = 0$  anwendbar. Da aber  $J_n^*$  und  $\frac{dJ_n^*}{dz}$  ganze Funktionen von  $z$  sind, so kann deren Wert bei  $z = 0$ , der ja gleich  $\delta_n^{(0)}(c)$  bzw. gleich  $\delta_n^{(1)}(c)$  ist, durch den Zielwert bestimmt werden, dem das  $J_n^*$  darstellende Integral (39) bzw. das  $\frac{dJ_n^*}{dz}$  darstellende Integral (40) zustrebt, wenn  $z$  längs der positiv reellen Achse gegen 0 rückt. Es sei nun bei der Bestimmung dieser Zielwerte nur aus Darstellungsgründen vorübergehend  $c$  reell (und  $> -n + 1$ ) vorausgesetzt. Dies bedeutet keine Einschränkung, denn die zu gewinnenden Ausdrücke für  $\delta_n^{(0)}(c)$  und  $\delta_n^{(1)}(c)$  gelten ohne weiteres auch für alle komplexen  $c$  der Halbebene  $\Re c > -n + 1$ .

Es ist, falls  $z$  positiv reelle Werte durchläuft (vgl. (39)),

$$\delta_n^{(0)}(c) = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n} \tau^a (\tau+1)^b d\tau$$

oder, wenn man das Integral in zwei Integrale zerlegt,

$$(41) \quad \delta_n^{(0)}(c) = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{z^{-1}} + \lim_{z \rightarrow 0} \int_{z^{-1}}^{\infty}.$$

Für das erste Integral in (41) ergeben sich die Abschätzungen

$$e^{(-2z^{-1}-1)\frac{1}{n}z^n} \int_0^{z^{-1}} \tau^a (\tau+1)^b d\tau < \int_0^{z^{-1}} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n} \tau^a (\tau+1)^b d\tau < e^{-\frac{1}{n}z^n z^{-1}} \int_0^{\infty} \tau^a (\tau+1)^b d\tau.$$

Für  $z \rightarrow 0$  strebt sowohl der links, als auch der rechts vor dem Integral stehende Exponentialfaktor gegen 1. Die obere Integrationsgrenze  $z^{-1}$  wächst über alle Grenzen, so daß das links und rechts auftretende Integral gegen  $\int_0^{\infty} \tau^a (\tau+1)^b d\tau$  strebt. Daher gilt in (41)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{z^{-1}} = \int_0^{\infty} \tau^a (\tau+1)^b d\tau.$$

Für das zweite Integral in (41) erhält man die Abschätzung

$$\int_{z^{-1}}^{\infty} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n}z^n} \tau^a (\tau+1)^b d\tau < \int_{z^{-1}}^{\infty} \tau^a (\tau+1)^b d\tau.$$

Folglich gilt in (41)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{z^{-1}}^{\infty} = 0.$$

Somit ist

$$\delta_n^{(0)}(c) = \int_0^{\infty} \tau^a (\tau+1)^b d\tau,$$

oder nach Ausführung der Transformation  $\tau = \frac{1-y}{y}$ :

$$\delta_n^{(0)}(c) = \int_0^1 y^{-2-a-b} (1-y)^a dy.$$

(36) und (38) ergeben schließlich

$$\delta_n^{(0)}(c) = \frac{\Gamma(-1-a-b) \Gamma(1+a)}{\Gamma(-b)}$$

oder, wenn man für  $a$  und  $b$  die Werte (27) einsetzt,

$$\delta_n^{(0)}(c) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}.$$

Wie aus (40) folgt, ist, falls  $z$  positiv reelle Werte durchläuft,

$$\delta_n^{(1)}(c) = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty (-2\tau - 1) z^{n-1} e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n} z^n} \tau^a (\tau + 1)^b d\tau$$

oder

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_n^{(1)}(c) = -2 \lim_{z \rightarrow 0} z^{n-1} e^{-\frac{1}{n} z^n} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{n} z^n \tau} \tau^{a+1} (\tau + 1)^b d\tau \\ \quad - \lim_{z \rightarrow 0} z^{n-1} \int_0^\infty e^{(-2\tau-1)\frac{1}{n} z^n} \tau^a (\tau + 1)^b d\tau. \end{array} \right.$$

Für  $z \rightarrow 0$  strebt auch  $z^{n-1} \rightarrow 0$  und da, wie oben gezeigt, das zweite Integral in (42) gegen den endlichen Grenzwert  $\delta_n^{(0)}(c)$  strebt, so ist in (42) der zweite Limes gleich 0. Ferner strebt in dem ersten Limes von (42) der Faktor  $e^{-\frac{1}{n} z^n}$  gegen 1. Daher reduziert sich  $\delta_n^{(1)}(c)$  auf

$$\delta_n^{(1)}(c) = -2 \lim_{z \rightarrow 0} z^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{n} z^n \tau} \tau^{a+1} (\tau + 1)^b d\tau$$

oder, wenn man die Transformation  $\frac{2}{n} z^n \tau = v$  ausführt und dabei beachtet, daß nach

(27)  $a + b + 1 = -\frac{1}{n}$  ist,

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_n^{(1)}(c) = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv \\ \quad = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \left( \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z + \lim_{z \rightarrow 0} \int_z^\infty \right). \end{array} \right.$$

Aus der Abschätzung

$$\int_0^z e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv < \int_0^z e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv$$

ergibt sich, daß in (43)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z = 0$$

ist. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{2}{n} z^{n-1}\right)^b \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv < \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{2z^n}{nv}\right)^b dv < \int_z^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv.$$

Daher ist in (43)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^\infty = \int_0^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{n}} dv = \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und somit

$$\delta_n^{(1)}(c) = -n \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

oder nach der bekannten Funktionalgleichung der Gammafunktion  $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s)$ :

$$\delta_n^{(1)}(c) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Wir haben also, um es noch einmal zusammenzustellen, zunächst unter der Voraussetzung, daß  $c$  reell (und  $> -n + 1$ ) ist, folgende Werte gefunden:

$$(44) \quad \begin{cases} \delta_n^{(0)}(c) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}, \\ \delta_n^{(1)}(c) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Aber diese Ausdrücke gelten, da  $\delta_n^{(0)}(c)$  und  $\delta_n^{(1)}(c)$  in der ganzen Halbebene  $\Re c > -n + 1$  regulär analytisch sind, ohne weiteres auch für alle komplexen  $c$  dieser Halbebene.

Zur expliziten Bestimmung von  $\gamma_n^{(0)}(c)$  und  $\gamma_n^{(1)}(c)$  stützen wir uns nunmehr auf den für  $\Re c > -n + 1$  gültigen Zusammenhang (32). Dieser liefert die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(0)}(c) &= -2i \delta_n^{(0)}(c) \sin \pi a, \\ \gamma_n^{(1)}(c) &= -2i \delta_n^{(1)}(c) \sin \pi a. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich zunächst für  $\Re c > -n + 1$ :

$$(45) \quad \begin{cases} \gamma_n^{(0)}(c) = 2i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)} \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \\ \qquad \qquad \qquad = 2\pi i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}, \\ \gamma_n^{(1)}(c) = 2i \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \\ \qquad \qquad \qquad = 2\pi i \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}. \end{cases}$$

Da aber, wie oben gezeigt wurde,  $\gamma_n^{(0)}(c)$  und  $\gamma_n^{(1)}(c)$  in der ganzen  $c$ -Ebene regulär analytisch sind, so gelten die Ausdrücke (45) ohne weiteres überhaupt für alle  $c$ .

Es sei noch erwähnt, daß nach (45)  $\gamma_n^{(0)}(c)$  die Nullstellen  $c = \pm ((2j+1)n + 1)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\gamma_n^{(1)}(c)$  die Nullstellen  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) besitzt. Daher verschwindet  $J_n(z, c)$  für  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) und nur für diese  $c$  identisch in  $z$ . Dagegen verschwindet  $J_n^*(z, c)$ , wie aus (44) folgt, für keinen einzigen Wert von  $c$  identisch in  $z$ .

§ 6. Die Zielwerte von  $w_n(z, c)$  und die Stellen, über denen die logarithmischen Windungspunkte liegen.

Als nächsten Schritt führen wir den Nachweis, daß die Integrale  $I_n(x, c)$  und  $I_n^*(x, c)$  gegen den Zielwert 0 streben, falls  $x$  in dem Winkelraum

$$|\arg x| \leq \frac{\pi}{2} - \eta \quad (\eta > 0, \text{ aber beliebig klein})$$

über alle Grenzen wächst.

Es ist (vgl. (28))

$$|I_n| \leq \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} e^{\Re t \cdot \Re x - \Im t \cdot \Im x} \left| \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|,$$

und da auf  $\mathfrak{S}_\varepsilon$

$$\Re t \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, \quad |\Im t| \leq \varepsilon$$

ist, so folgt

$$|I_n| \leq e^{(-\frac{1}{2} + \varepsilon) \Re x + \varepsilon |\Im x|} \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left| \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|.$$

Es sei  $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$  und  $|\Im x| \leq \frac{1}{8\varepsilon} \Re x$ . Dann ist

$$\left( -\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \Re x + \varepsilon |\Im x| \leq -\frac{1}{8} \Re x,$$

so daß die Abschätzung

$$|I_n| \leq e^{-\frac{1}{8} \Re x} \int_{\mathfrak{S}_\varepsilon} \left| \left( \frac{1}{2} + t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|$$

gilt. Wenn daher  $x$  in dem Winkelraum  $|\Im x| \leq \frac{1}{8\varepsilon} \Re x$  über alle Grenzen wächst, so strebt  $I_n$  gegen den Zielwert 0. Da man  $\varepsilon$  beliebig klein wählen kann, so ist hiermit für  $I_n$  die Behauptung bewiesen.

Für  $I_n^*$  ergibt sich die Behauptung aus der aus (29) folgenden Abschätzung

$$|I_n^*| \leq e^{-\frac{1}{2} \Re x} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \left| \left( -\frac{1}{2} - t \right)^a \left( \frac{1}{2} - t \right)^b \right| |dt|.$$

Die bewiesenen Zielwerteigenschaften von  $I_n$  und  $I_n^*$  lassen sich sofort auf  $J_n$  und  $J_n^*$  übertragen:

*Die Integrale  $J_n(z, c)$  und  $J_n^*(z, c)$  streben gegen den Zielwert 0, falls  $z$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \vartheta$  ( $\vartheta > 0$ , aber beliebig klein) über alle Grenzen wächst.*

Hiernach sind  $J_n$  (für  $c \neq (2j+1)n+1, j=0, 1, 2, \dots$ ) und  $J_n^*$  (für  $\Re c > -n+1$ ), wie Herr R. Nevanlinna sie nennt, defekte Lösungen der Gleichung (18).

Nach einem ganz allgemein von Herrn R. Nevanlinna bewiesenen Satz<sup>7)</sup> strebt nun jede von der defekten Lösung  $J_n$  bzw.  $J_n^*$  linear unabhängige Lösung von (18) in

<sup>7)</sup> R. Nevanlinna, a. a. O.<sup>1)</sup>, S. 352.

dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  gegen den Zielwert  $\infty$ . Insbesondere gilt dies also, falls  $c \neq (2j+1)n + 1$  ( $j = -1, -2, -3, \dots$ ) ist, für die Lösung  $g_n^{**}$ .

Nun läßt sich, falls  $c \neq (2j+1)n + 1$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ist, die erste der Gleichungen (33) folgendermaßen schreiben:

$$w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} = \frac{1}{\gamma_n^{(1)}(c)} \frac{J_n(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} - \frac{\gamma_n^{(0)}(c)}{\gamma_n^{(1)}(c)}.$$

Da der Quotient  $\frac{J_n(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  gegen den Zielwert 0 strebt, so schließt man hieraus:

Wenn  $z$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  über alle Grenzen wächst, so strebt  $w_n(z, c)$  gegen den Zielwert

$$-\frac{\gamma_n^{(0)}(c)}{\gamma_n^{(1)}(c)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)},$$

vorläufig allerdings noch unter der Einschränkung, daß

$$c \neq (2j+1)n + 1 \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ist.

Im Falle  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = -1, -2, \dots$ ) ist  $J_n(z, c) = \gamma_n^{(0)}(c) g_n^{**}(z, c)$  mit nichtverschwindendem  $\gamma_n^{(0)}(c)$ . Dann strebt also, wenn  $z$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  über alle Grenzen wächst,  $g_n^{**}(z, c)$  gegen den Zielwert 0,  $g_n^*(z, c)$  gegen den Zielwert  $\infty$  und  $w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$  gegen den Zielwert  $\infty$ . Nun hat aber der Ausdruck

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}$$

bei  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = -1, -2, \dots$ ) je einen Pol erster Ordnung. Daher ordnet sich auch der Fall  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = -1, -2, \dots$ ) der im vorigen Abschnitt angegebenen Formulierung unter, die dort u. a. gemachte Einschränkung  $c \neq (2j+1)n + 1$  ( $j = -1, -2, \dots$ ) kann fallen gelassen werden.

Nun bleibt nur noch der Fall  $c = (2j+1)n + 1$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) zu erledigen. Da in diesem Falle das Integral  $J_n(z, c)$  identisch in  $z$  verschwindet, stützen wir uns jetzt auf das nicht identisch in  $z$  verschwindende Integral  $J_n^*(z, c)$ . Wir schreiben die zweite der Gleichungen (33) in folgender Form:

$$w_n(z, c) = \frac{g_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} = \frac{1}{\delta_n^{(1)}(c)} \frac{J_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)} - \frac{\delta_n^{(0)}(c)}{\delta_n^{(1)}(c)}.$$

Da  $\frac{J_n^*(z, c)}{g_n^{**}(z, c)}$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  dem Zielwert 0 zustrebt, so er-

gibt sich die Folgerung, daß  $w_n(z, c)$  in diesem Winkelraum dem Zielwert

$$-\frac{\delta_n^{(0)}(c)}{\delta_n^{(1)}(c)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}$$

zustrebt. Man kann also im vorletzten Abschnitt auch die Einschränkung  $c \neq (2j+1)n+1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) fallen lassen.

Hiermit ist ohne Einschränkung für alle reellen und komplexen  $c$  folgender Satz vollständig bewiesen:

*Wenn  $z$  in dem Winkelraum  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  über alle Grenzen wächst, so strebt  $w_n(z, c)$  gegen den Zielwert*

$$A_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}.$$

Nunmehr liefert die Anwendung der Gleichung (19) den weiteren Satz:

*Wenn  $z$  in dem Winkelraum  $\left|\arg z - \frac{\pi}{n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  über alle Grenzen wächst, so strebt  $w_n(z, c)$  gegen den Zielwert*

$$A_1 = e^{\frac{i\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)}.$$

Schließlich erhält man, indem man die Gleichung (20) mehrmals auf die beiden letzten Sätze anwendet, das allgemeine Ergebnis:

*Wenn  $z$  in dem Winkelraum  $\left|\arg z - \frac{m\pi}{n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta$  ( $\vartheta > 0$ , aber beliebig klein) über alle Grenzen wächst, so strebt bei beliebigem reellem oder komplexem  $c$  die Grundlösung  $w_n(z, c)$  der Gleichung*

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2},$$

*falls  $m$  eine gerade Zahl ist ( $m = 0, 2, \dots, 2n-2$ ), gegen den Zielwert*

$$A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)},$$

*falls  $m$  eine ungerade Zahl ist ( $m = 1, 3, \dots, 2n-1$ ), gegen den Zielwert*

$$A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)}.$$

Mit anderen Worten: Jeder Weg, der in einem der Winkelräume

$$\left| \arg z - \frac{m\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2n} - \vartheta \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2n-1; \vartheta > 0)$$

nach  $\infty$  einmündet, ist für die meromorphe Funktion  $w_n(z, c)$  Zielweg mit dem Zielwert  $A_m$ .

Hieraus folgert man nun weiterhin mit Hilfe des Satzes von Hurwitz-Iversen und unter Beachtung der Tatsache, daß  $w_n(z, c)$  als Funktion von  $z$  keine mehrfachen Stellen besitzt, den Satz:

*Die Grundlösung  $w_n(z, c)$  der Gleichung*

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$$

bildet die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche ab, die nur logarithmische Windungspunkte, und zwar genau  $2n$  solche besitzt. Diese liegen über den Stellen

$$w = A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)} \quad (m \text{ gerade})$$

und

$$w = A_m = e^{\frac{im\pi}{n}} \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)} \quad (m \text{ ungerade}).$$

### § 7. Die gegenseitige Lage der logarithmischen Windungspunkte in Abhängigkeit von $c$ .

Der letzte Satz des vorigen Paragraphen besagt in geometrischer Ausdrucksweise folgendes:

*Die  $2n$  logarithmischen Windungspunkte liegen zur Hälfte über der Kreislinie*

$$|w| = \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)} \right|$$

und zur Hälfte über der Kreislinie

$$|w| = \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)} \right|,$$

und zwar sind sowohl die über der ersten, als auch die über der zweiten Kreislinie gelegenen Windungspunkte die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks<sup>8)</sup>.

Wir wollen zunächst folgende, im Anschluß hieran auftauchende Frage untersuchen: Für welche Werte von  $c$  fallen die beiden Kreislinien, über die die Windungs-

<sup>8)</sup> Im Falle  $n = 2$  sind hierbei unter den Ecken eines „regelmäßigen 2-Ecks“ zwei diametral gegenüberliegende Punkte der in Frage kommenden Kreislinie zu verstehen.

punkte verteilt sind, zusammen? Wann kommen also sämtliche  $2n$  Windungspunkte über eine und dieselbe Kreislinie zu liegen?

Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Funktion

$$(46) \quad \Phi_n(c) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-c}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1+c}{2n}\right)}$$

den Betrag 1 annimmt. Auf Grund der Funktionalgleichung  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$  läßt sich nun diese Funktion  $\Phi_n(c)$  durch die Exponentialfunktion darstellen. Man erhält:

$$(47) \quad \Phi_n(c) = \frac{\sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1+c}{2n}\right)}{\sin \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1-c}{2n}\right)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2} \frac{inc}{n}} + 1}{e^{\frac{inc}{n}} + e^{-\frac{inc}{n}}}.$$

Wir haben also zu untersuchen, für welche Werte von  $c$  die Funktion (47) den Betrag 1 annimmt.  $|\Phi_n(c)| = 1$  ist aber gleichbedeutend mit

$$\left| \frac{\left( \Re(e^{\frac{inc}{n}}) + \cos \frac{\pi}{n} \right) + i \left( \Im(e^{\frac{inc}{n}}) - \sin \frac{\pi}{n} \right)}{\left( \Re(e^{\frac{inc}{n}}) + \cos \frac{\pi}{n} \right) + i \left( \Im(e^{\frac{inc}{n}}) + \sin \frac{\pi}{n} \right)} \right| = 1.$$

Man sieht hieraus, daß, da ja  $\sin \frac{\pi}{n} \neq 0$  ist, dann und nur dann  $|\Phi_n(c)| = 1$  ist, wenn

$$\Im(e^{\frac{inc}{n}}) = e^{-\frac{\pi \Im c}{n}} \sin \frac{\pi \Re c}{n} = 0$$

ist. Man erhält daher die Bedingung

$$\Re c = jn \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Somit haben wir den Satz:

*Dann und nur dann, wenn  $\Re c = jn$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ist, deckt sich die Kreislinie, über der die Windungspunkte  $A_0, A_1, \dots, A_{2n-2}$  liegen, mit der Kreislinie, über der die Windungspunkte  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$  liegen.*

Von besonderem Interesse ist weiterhin noch die Frage: Für welche Werte von  $c$  kommen die Windungspunkte  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  nicht über lauter verschiedene Stellen zu liegen? Mit anderen Worten: Wann fallen die  $2n$  Windungspunkte teilweise übereinander?

Zunächst untersuchen wir die Möglichkeit, daß das von den Windungspunkten  $A_0, A_2, \dots, A_{2n-2}$  gebildete  $n$ -Eck mit dem von den Windungspunkten  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$  gebildeten  $n$ -Eck zusammenfällt, daß also die Windungspunkte paarweise übereinander fallen. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Funktion  $\Phi_n(c)$  (vgl.

(46)) einen der Werte  $e^{\frac{ik\pi}{n}}$  ( $k = 1, 3, \dots, 2n-1$ ) annimmt. Die Möglichkeiten  $k = 1$  und  $k = 2n-1$  scheiden jedoch von vornherein aus, da, wie aus der Darstellung (47) ersichtlich ist, die Funktion  $\Phi_n(c)$  die Werte  $e^{\frac{i\pi}{n}}$  und  $e^{\frac{i(2n-1)\pi}{n}}$  als Picardsche Ausnahmen

werte (im engeren Sinne) besitzt. Daher tritt der Fall des paarweisen Übereinanderfallens der Windungspunkte erst von  $n = 3$  an ein.

Wir haben nun im Falle  $n \geq 3$  die Gleichung

$$\Phi_n(c) = e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad (k = 3, 5, \dots, 2n - 3)$$

nach  $c$  aufzulösen. Dies ergibt (vgl. (47))

$$e^{\frac{ic}{n}} = -\frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}}.$$

Man erhält also, da dieser Sinusquotient für  $k = 3, 5, \dots, 2n - 3$  positiv ist, für  $c$  die Werte:

$$(48) \quad c = (2j+1)n + \frac{n}{i\pi} \log \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}}.$$

Hier ist unter dem Logarithmus des Sinusquotienten der reelle Wert zu verstehen, und  $j$  kann jede ganze Zahl bedeuten.

Somit kommen die Windungspunkte dann und nur dann paarweise übereinander zu liegen, wenn  $c$  gleich einem der Werte (48) ist. Es sei noch bemerkt, daß im Falle eines ungeraden  $n$  die Werte (48) für  $k = n$  reell sind, nämlich gleich  $(2j+1)n$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), daß dagegen im Falle eines geraden  $n$  kein einziger der Werte (48) reell ist.

Aus der bekannten Tatsache, daß die Funktion  $\Gamma(s)$  keine Nullstelle, aber bei  $s = 0, -1, -2, \dots$  je einen Pol besitzt, folgert man unmittelbar noch einige weitere Möglichkeiten des Übereinanderfallens von Windungspunkten. Man kann dann folgenden abschließenden Satz aufstellen:

*Die  $2n$  logarithmischen Windungspunkte fallen*

I. über  $2n$  verschiedene Grundpunkte, wenn  $c$  von den unter II und III anzuführenden Werten verschieden ist,

II. über  $n$  verschiedene Grundpunkte, wenn  $c$  einen der folgenden Werte hat:

$$c = (2j+1)n + \frac{n}{i\pi} \log \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 3, 5, \dots, 2n - 3),$$

III. über  $n + 1$  verschiedene Grundpunkte, wenn  $c$  einen der folgenden Werte hat:

- 1)  $c = -((2j+1)n - 1) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$
- 2)  $c = -((2j+1)n + 1) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$
- 3)  $c = (2j+1)n - 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$
- 4)  $c = (2j+1)n + 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$

In dem nur bei  $n \geq 3$  vorkommenden Falle II kommen die Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen, und zwar  $A_k$  über  $A_0$ ,  $A_{k+2}$  über  $A_2$ , usw.  $A_{k-2}$  über  $A_{2n-2}$ . In dem bei jedem  $n (\geq 2)$  vorkommenden Falle III kommen von den  $2n$  Windungspunkten

*n* über einen und denselben Grundpunkt zu liegen, und zwar im Unterfall

- 1)  $A_0, A_2, \dots, A_{2n-2}$  über  $w = \infty$ ,
- 2)  $A_0, A_2, \dots, A_{2n-2}$  über  $w = 0$ ,
- 3)  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$  über  $w = \infty$ ,
- 4)  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$  über  $w = 0$ .

### Teil 3. Die Struktur der Riemannschen Fläche.

#### § 8. Allgemeines über die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten.

Um die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten zu beschreiben und zu veranschaulichen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man ziehe in der  $w$ -Ebene eine geschlossene Jordankurve  $\mathfrak{L}$ , welche durch die Grundpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$ , über denen die Windungspunkte liegen, hindurchgeht und bei positivem Umlauf diese Grundpunkte in der angegebenen Reihenfolge trifft.  $\mathfrak{L}$  wird durch die Grundpunkte in  $q$  Teilbögen zerlegt und zerlegt selbst die  $w$ -Ebene in ein Innengebiet  $\mathfrak{G}_i$  (welches bei positivem Umlauf von  $\mathfrak{L}$  zur Linken liegt) und in ein Außengebiet  $\mathfrak{G}_a$ . Denken wir uns nun die Riemannsche Fläche längs der Kurve  $\mathfrak{L}$  durchstanzt, so zerfällt sie in unendlich viele über  $\mathfrak{G}_i$  und  $\mathfrak{G}_a$  gelegene schlichte Flächenstücke, welche wir als (die zur Zerschneidung  $\mathfrak{L}$  gehörigen) *Halbblätter* der Riemannschen Fläche bezeichnen wollen. Für jedes solche Halbblatt erscheinen gewisse der Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$  als Windungspunkte. Diese Punkte, deren Anzahl mindestens 2, höchstens  $q$  beträgt, mögen die *Ecken*, die zwischen den Ecken gelegenen Teilstücke von  $\mathfrak{L}$  die *Seiten* des betreffenden Halbblattes heißen. Die Struktur der Riemannschen Fläche wird nun offenbar dadurch vollständig beschrieben, daß man zu jedem Halbblatt angibt, an welche anderen Halbblätter es über den einzelnen Teilbögen von  $\mathfrak{L}$  angeheftet ist.

Um diese Verhältnisse besser überschauen zu können, gehen wir in die  $z$ -Ebene über. Vermöge der eineindeutigen Beziehung, die die meromorphe Funktion  $w(z)$  zwischen der schlichten endlichen  $z$ -Ebene und der über der  $w$ -Ebene gelegenen Riemannschen Fläche vermittelt, erscheinen in der  $z$ -Ebene als Urbilder der einzelnen Halbblätter der Riemannschen Fläche gewisse Gebiete, die wir *Halbgebiete* nennen wollen. Als Urbild einer Seite eines Halbblattes erscheint in der  $z$ -Ebene eine *Seite* des entsprechenden Halbgebietes, eine Kurve  $\mathfrak{C}$ , die aus dem Unendlichen kommt und ins Unendliche geht. Einem Halbblatt mit  $r$  Ecken ( $2 \leq r \leq q$ ) entspricht somit ein Halbgebiet, welches mit  $r$  Lappen ins Unendliche reicht. Da diese Lappen den Umgebungen der Ecken des Halbblattes entsprechen, so seien die zu den einzelnen Lappen gehörigen unendlich fernen Randpunkte als die *Ecken* des betreffenden Halbgebietes bezeichnet. Über die Kurven  $\mathfrak{C}$ , die zusammen die Urbilder der Kurve  $\mathfrak{L}$  sind, schließt man aus der Tatsache, daß  $w(z)$  keine mehrfachen Stellen besitzt, noch folgendes: Je zwei verschiedene der Kurven  $\mathfrak{C}$  haben im Endlichen keinen Punkt gemeinsam.

Wie Herr R. Nevanlinna gezeigt hat<sup>9)</sup>), gibt es nun einerseits nur endlich viele Halbgebiete mit mehr als zwei Ecken, andererseits im Falle  $q > 2$  aber auch mindestens ein solches Halbgebiet. Es gibt also ein wohlbestimmtes kleinstes aus Halbgebieten zusammengesetztes Gebiet, welches alle Halbgebiete mit mehr als zwei Ecken enthält. Dieses Gebiet, welches Herr R. Nevanlinna das *Kernpolygon* nennt, wird von  $p$  der

<sup>9)</sup> R. Nevanlinna, a. a. O.<sup>1)</sup>, S. 303—321.

Kurven  $\mathfrak{C}$ , seinen Seiten, begrenzt, wobei  $p$  die Gesamtzahl der logarithmischen Windungspunkte bedeutet. Es ragt also mit  $p$  Lappen ins Unendliche, und jeder dieser Lappen bestimmt eine Ecke des Kernpolygons. Die Ecken des Kernpolygons sind eindeutig den logarithmischen Windungspunkten der Riemannschen Fläche zugeordnet. Dem Kernpolygon entspricht nämlich in der Riemannschen Fläche ein aus endlich vielen Halbblättern zusammengesetztes Flächenstück, welches in sämtliche  $p$  Windungspunkte einmündet, und zwar das kleinste derartige Flächenstück. Außerhalb des Kernpolygons gibt es nur Halbgebiete mit zwei Ecken — solche Halbgebiete seien auch als *Streifengebiete* bezeichnet — und zwar schließt sich an jede der  $p$  Seiten des Kernpolygons eine unendliche Folge von nebeneinander liegenden Streifengebieten an. Eine solche Folge von Streifengebieten bezeichnet man auch als *logarithmisches Ende*. Ihm entspricht in der Riemannschen Fläche ein Flächenstück, welches sich in der einen Richtung unendlich oft um zwei Punkte herumwindet.

Das aus dem Kernpolygon und  $p$  logarithmischen Enden bestehende Netz der Halbgebiete gibt eine vollständige Übersicht über den Aufbau der Riemannschen Fläche. Im Anschluß an Herrn Elfving<sup>10)</sup> sei aber nunmehr noch eine andere Darstellungsweise für die Flächenstruktur angegeben, nämlich der *Streckenkomplex*<sup>11)</sup>, wie wir ihn nennen wollen, der zu dem Netz der Halbgebiete in gewisser Weise dual ist.

Wir wählen zu diesem Zweck in  $\mathfrak{G}_i$  einen Punkt  $w_i$ , in  $\mathfrak{G}_a$  einen Punkt  $w_a$  und verbinden  $w_i$  mit  $w_a$  durch  $q$  punktfremde Kurven  $\mathfrak{l}$  und zwar über jeden der  $q$  Teilstücken von  $\mathfrak{L}$  genau einmal. Die Punkte  $w_i$  und  $w_a$ , sowie die Kurven  $\mathfrak{l}$  denken wir uns auf die Riemannsche Fläche projiziert und betrachten die hierzu in der  $z$ -Ebene als Urbild erscheinende Konfiguration. Man bezeichnet die Urpunkte von  $w_i$  als *Innenknoten*, die Urpunkte von  $w_a$  als *Außenknoten*. Zwei Knoten heißen *benachbart*, wenn sie in benachbarten, d. h. unmittelbar aneinander grenzenden Halbgebieten liegen. (Von je zwei benachbarten Knoten ist also stets der eine ein Innenknoten, der andere ein Äußerknoten.) Jede Kurve  $c$ , die als Urbild einer Kurve  $\mathfrak{l}$  in der  $z$ -Ebene auftritt und zwei benachbarte Knoten unmittelbar verbindet, heißt ein *Glied*. Die Gesamtheit der Glieder, die zwei benachbarte Knoten verbinden (dies sind mindestens 1, höchstens  $q - 1$  Glieder), bildet ein *Bündel*. Mit dieser Ausdrucksweise können wir nun sagen, daß von jedem Knoten  $q$  Glieder ausgehen und daß diese  $q$  Glieder  $r$  Bündeln ( $2 \leq r \leq q$ ) angehören, wobei  $r$  gleich ist der Anzahl der Ecken, die das dem Knoten entsprechende Halbblatt der Riemannschen Fläche besitzt.

Der Komplex der Gliedkurven  $c$  gibt ebenso wie das Netz der Halbgebiete eine vollständige Übersicht über den Aufbau der Riemannschen Fläche. Da es nur auf topologische Zusammenhangsverhältnisse ankommt, kann man diesen Komplex noch schematisieren, indem man jedes Glied durch eine Strecke darstellt, und zwar die Glieder eines Bündels durch dicht nebeneinander liegende parallele Strecken. Die so erhaltene schematische Figur ist eben der *Streckenkomplex der Riemannschen Fläche*. Er besteht aus dem nur endlich viele Knoten und Glieder enthaltenden *Kern* und  $p$  *logarithmischen Enden*, entsprechend dem Kernpolygon und den  $p$  logarithmischen Enden bei der Darstellung der Flächenstruktur durch das Netz der Halbgebiete. Versteht man unter einem einfachen Knoten einen Knoten, von dem zwei Bündel ausgehen, und unter einem Verzweigungsknoten einen Knoten, von dem mehr als zwei Bündel ausgehen, so kann

<sup>10)</sup> Elfving, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung, Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova series A, 2 (1934), Nr. 3.

<sup>11)</sup> Wir vermeiden hier den von Herrn Elfving gebrauchten Ausdruck *topologischer Baum* und verwenden statt dessen die Bezeichnung *Streckenkomplex*, weil darin auch geschlossene Gliederzyklen vorkommen können.

man den Kern kennzeichnen als den kleinsten, alle Verzweigungsknoten (sowie alle möglicherweise noch zwischen diesen gelegenen einfachen Knoten) enthaltenden Teilkomplex des Streckenkomplexes. Jedes der  $p$  logarithmischen Enden besteht aus einer unendlichen Folge von einfachen Knoten, die durch Bündel von abwechselnd  $s$  und  $q - s$  Gliedern ( $1 \leqq s \leqq q - 1$ ) verbunden sind.

Die Bedeutung des Streckenkomplexes ist, um es noch einmal kurz zusammenzufassen, folgende: Die Knoten sind eineindeutig den Halbblättern der Riemannschen Fläche zugeordnet, während die Glieder angeben, in welcher Art und Weise die einzelnen Halbblätter zusammenhängen.

### § 9. Die Struktur der Riemannschen Fläche in dem Falle, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte über lauter verschiedene Grundpunkte zu liegen kommen.

Durch die allgemeinen Nevanlinnaschen Ergebnisse ist die Struktur einer Riemannschen Fläche mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten schon weitgehend aufgeklärt. Es bleibt nur noch die eine Frage offen: Wie ist das Kernpolygon aus Halbgebieten zusammengesetzt? Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Wie sieht der Kern des Streckenkomplexes aus?

Diese Frage wollen wir nun an unserer speziellen Flächenklasse untersuchen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die  $2n$  logarithmischen Windungspunkte über  $2n$  verschiedene Grundpunkte zu liegen kommen (Fall I des Satzes von Seite 28f.). Die Windungspunkte bezeichnen wir nun wieder wie in Teil 2, aber im Gegensatz zum vorigen Paragraphen, mit  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ . Die Numerierung der Windungspunkte ist also nicht mehr wie in § 8 willkürlich, sondern mit  $m$  ( $= 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$ ) ist derjenige Windungspunkt  $A_m$  numeriert, der dem von  $w(z)$  in dem Winkelraum

$$\left| \arg z - \frac{m\pi}{n} \right| \leqq \frac{\pi}{2n} - \vartheta \quad (\vartheta > 0)$$

angestrebten Zielwert entspricht. Die hierdurch festgelegte Reihenfolge  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  bezeichnen wir auch als die *natürliche* Reihenfolge der Windungspunkte. Nunmehr folgen die den Windungspunkten  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  zugeordneten Ecken  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{2n-1}$  des Kernpolygons bei einem positiven Umlauf um das Kernpolygon gerade in dieser Reihenfolge aufeinander, und die  $2n$  logarithmischen Enden  $L_{01}, L_{12}, L_{23}, \dots, L_{2n-1,0}$  winden sich der Reihe nach um die Windungspunkte  $A_0$  und  $A_1, A_1$  und  $A_2, A_2$  und  $A_3, \dots, A_{2n-1}$  und  $A_0$ .

Um nun die Gleichung (20) ausnutzen zu können, wählen wir die bei der Zerschneidung der Riemannschen Fläche zugrundegelegte Kurve  $\mathfrak{L}$  so, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  in sich selbst übergeht. Wir bezeichnen diejenige

Durchlaufungsrichtung von  $\mathfrak{L}$ , bei der der Nullpunkt zur Linken liegt, als positiv. Wir wählen ferner  $w_i = 0$ ,  $w_a = \infty$  und auch die Gesamtheit der Kurven  $\mathfrak{l}$  so, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  in sich selbst übergeht. Sodann gestattet uns Gleichung (20) zu schließen, daß auch die Gesamtheit der Kurven  $\mathfrak{C}$ , sowie die Gesamtheit der Kurven  $\mathfrak{c}$  bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  in sich selbst

übergeht. Da zwei verschiedene der Kurven  $\mathfrak{C}$  im Endlichen keinen Punkt gemeinsam haben, schließt man hieraus sofort Folgendes: Im Inneren des Kernpolygons verlaufen entweder überhaupt keine Kurven  $\mathfrak{C}$ ; oder nur solche Kurven  $\mathfrak{C}$ , die die Ecken  $E_0$  und  $E_2$ , die Ecken  $E_2$  und  $E_4$ , die Ecken  $E_4$  und  $E_6, \dots$ , die Ecken  $E_{2n-2}$  und  $E_0$  verbinden

(und zwar sind alle diese  $n$  Eckenpaare durch die gleiche Anzahl von Kurven  $\mathfrak{C}$  verbunden); oder nur solche Kurven  $\mathfrak{C}$ , die die Ecken  $E_1$  und  $E_3$ , die Ecken  $E_3$  und  $E_5$ , die Ecken  $E_5$  und  $E_7, \dots$ , die Ecken  $E_{2n-1}$  und  $E_1$  verbinden (und zwar sind alle diese  $n$  Eckenpaare durch die gleiche Anzahl von Kurven  $\mathfrak{C}$  verbunden). Das Kernpolygon ist also entweder ein von Kurven  $\mathfrak{C}$  freies  $2n$ -Eck. Oder es besteht aus einem zentralen  $n$ -Eck und aus  $n$  an dessen  $n$  Seiten angefügten Dreiecken. Zwischen dem zentralen  $n$ -Eck und jedem der  $n$  Dreiecke kann noch eine gewisse (bei allen  $n$  Dreiecken die gleiche) Anzahl von Streifengebieten eingefügt sein.

Nun gibt es stets insgesamt  $n$  verschiedene Reihenfolgen, nämlich

$$A_0, A_\kappa, A_2, A_{\kappa+2}, \dots, A_{2n-2}, A_{\kappa+2n-2} \quad (\kappa = 1, 3, \dots, 2n-1)^{12}),$$

in welchen die Grundpunkte von der Kurve  $\mathfrak{L}$  so durchlaufen werden können, daß diese dabei noch alle an sie gestellten Forderungen erfüllt.

Betrachten wir zuerst den Fall  $\kappa = 1$ , also die natürliche Durchlaufungsreihenfolge. Dann ist entweder das Kernpolygon frei von Kurven  $\mathfrak{C}$ . Oder es besteht aus einem zentralen  $n$ -Eck und aus  $n$  Dreiecken, von denen jedes unter Zwischenschaltung einer gewissen (bei allen  $n$  Dreiecken der gleichen) ungeraden Anzahl von Streifengebieten an eine der  $n$  Seiten des  $n$ -Ecks angefügt ist. Daß die Anzahl dieser Streifengebiete ungerade ist, ergibt sich so: Da das zentrale  $n$ -Eck den Punkt  $z=0$  enthält und da der diesem entsprechende Punkt  $w=0$  in dem von  $\mathfrak{L}$  umschlossenen Innengebiet  $\mathfrak{G}_i$  liegt, so ist das zentrale  $n$ -Eck Urbild eines Exemplares von  $\mathfrak{G}_i$ . Durchläuft man den Rand der äußeren Dreiecke so, daß ihre drei Ecken in der Reihenfolge

$$E_\lambda, E_{\lambda+1}, E_{\lambda+2} \quad (\lambda = 0, 2, \dots, 2n-2 \text{ bzw. } \lambda = 1, 3, \dots, 2n-1)$$

getroffen werden, so liegen die von den Dreiecken umschlossenen Innengebiete zur Linken. Da die Kurve  $\mathfrak{L}$  die entsprechenden Grundpunkte  $A_\lambda, A_{\lambda+1}, A_{\lambda+2}$  bei positivem Umlauf in dieser natürlichen Reihenfolge trifft, so ist auch jedes der  $n$  äußeren Dreiecke Urbild eines über  $\mathfrak{G}_i$  gelegenen Halbblattes. Somit muß jedes der äußeren Dreiecke durch eine ungerade Anzahl von Streifengebieten von dem zentralen  $n$ -Eck getrennt werden.

Nehmen wir nun den Fall  $\kappa = 3, 5, \dots, 2n-1$ , also eine andere als die natürliche Durchlaufungsreihenfolge. Dann kann das Kernpolygon nicht frei von Kurven  $\mathfrak{C}$  sein. Denn sonst wäre es Urbild eines Exemplares von  $\mathfrak{G}_i$ , und dies widerspräche der Tatsache, daß seine Ecken in der Reihenfolge  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{2n-1}$  aufeinander folgen, während die entsprechenden Windungspunkte nicht in der natürlichen Reihenfolge von  $\mathfrak{L}$  durchlaufen werden. Das Kernpolygon besteht vielmehr stets aus einem zentralen  $n$ -Eck und aus  $n$  Dreiecken, von denen jedes unter Zwischenschaltung einer gewissen (bei allen  $n$  Dreiecken gleichen) geraden Anzahl<sup>13)</sup> von Streifengebieten an eine der  $n$  Seiten des  $n$ -Ecks angefügt ist. Daß diese Anzahl gerade ist, erkennt man so: Durchläuft man den Rand der äußeren Dreiecke so, daß ihre drei Ecken in der Reihenfolge  $E_\lambda, E_{\lambda+1}, E_{\lambda+2}$  ( $\lambda = 0, 2, \dots, 2n-2$  bzw.  $\lambda = 1, 3, \dots, 2n-1$ ) angetroffen werden, so liegen die von den Dreiecken umschlossenen Innengebiete zur Linken. Da man die Kurve  $\mathfrak{L}$  im negativen Sinne durchlaufen muß, um die entsprechenden drei Grundpunkte  $A_\lambda, A_{\lambda+1}, A_{\lambda+2}$  in dieser Reihenfolge anzutreffen, so ist jedes der  $n$  äußeren Dreiecke Urbild eines über  $\mathfrak{G}_i$  gelegenen Halbblattes. Daher kann, da das zentrale  $n$ -Eck

<sup>12)</sup> Etwa in diesem und dem nächsten Paragraphen auftretende Indizes, die  $> 2n-1$  sind, sind mod  $2n$  zu verstehen.

<sup>13)</sup> Diese gerade Anzahl kann auch gleich Null sein.

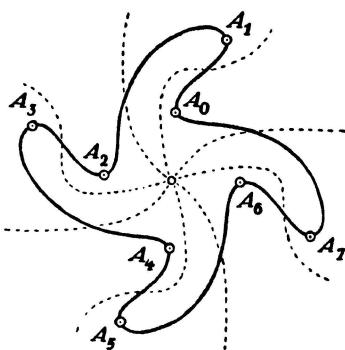
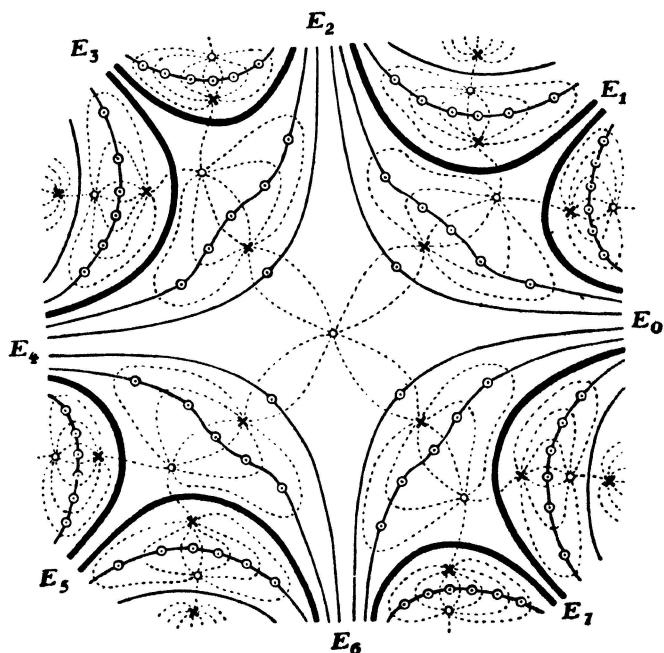
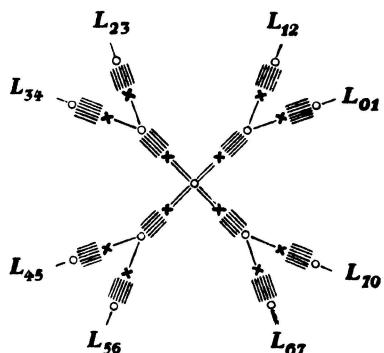
Fig. 3a. ( $w$ -Ebene)Fig. 3b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 3c. (Streckenkomplex)

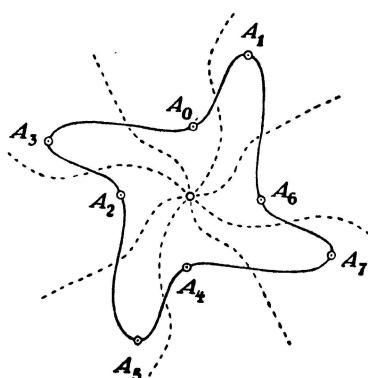
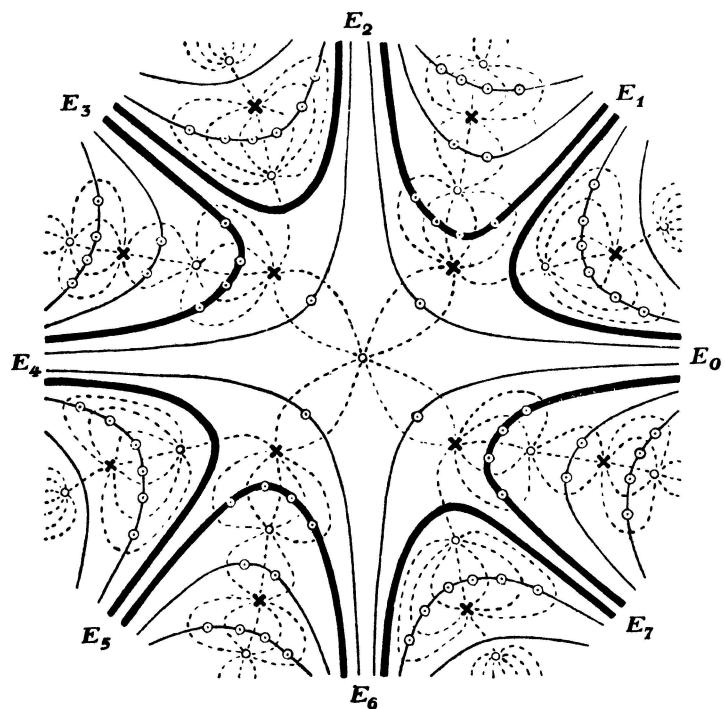
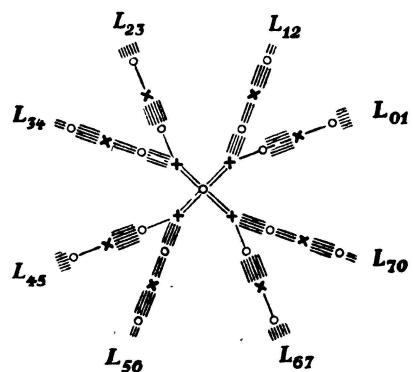
Fig. 4a. ( $w$ -Ebene)Fig. 4b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 4c. (Streckenkomplex)

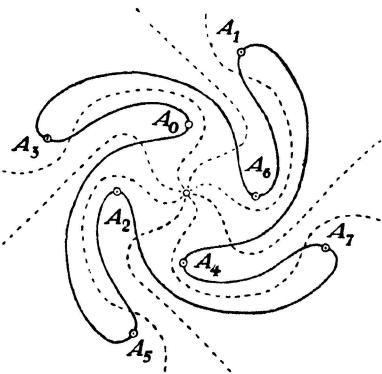


Fig. 5a. ( $w$ -Ebene)

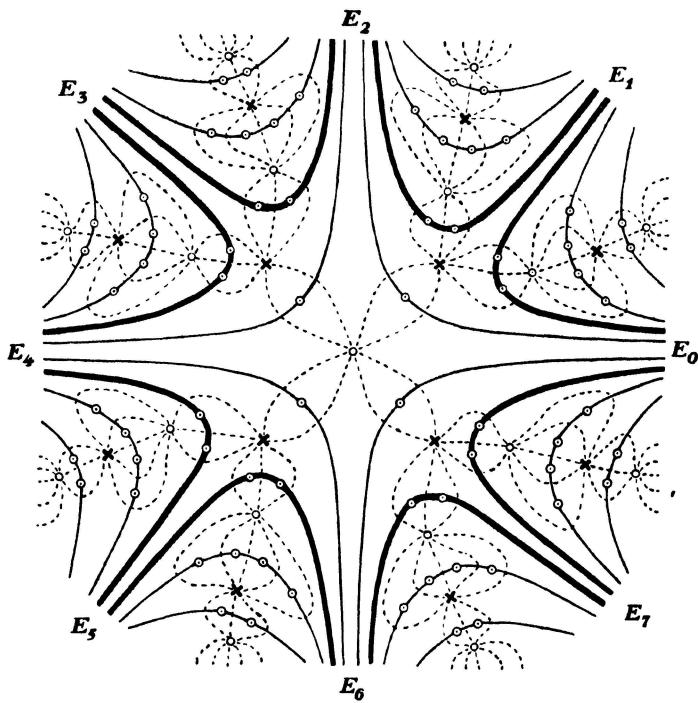


Fig. 5b. ( $z$ -Ebene)

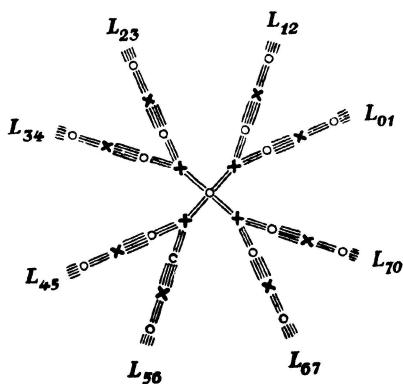


Fig. 5c. (Streckenkomplex)

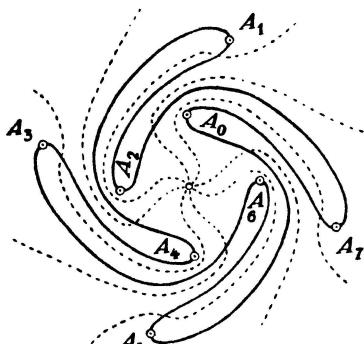
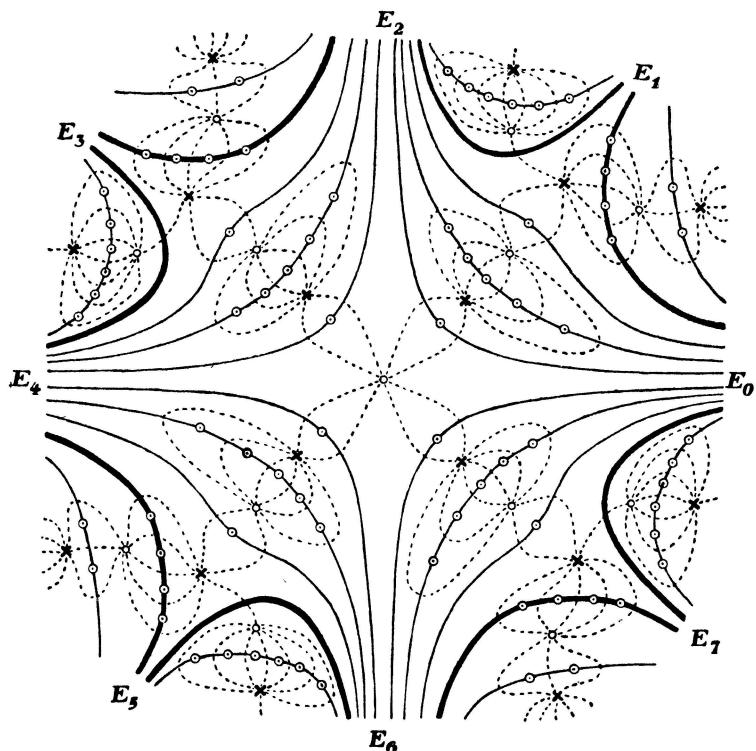
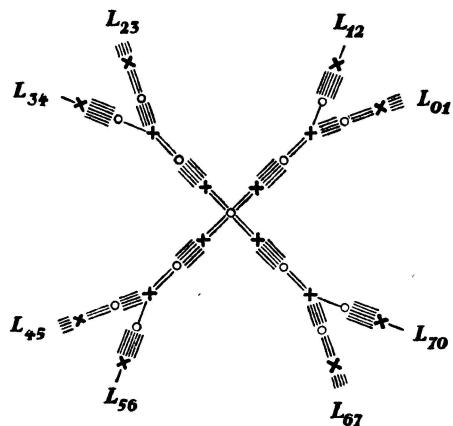
Fig. 6a. ( $w$ -Ebene)Fig. 6b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 6c. (Streckenkomplex)

Urbild eines Exemplares von  $\mathfrak{G}$ ; ist, jedes der äußeren Dreiecke nur durch eine gerade Anzahl von Streifengebieten von dem zentralen  $n$ -Eck getrennt werden.

Nun wollen wir noch angeben, wie der zugehörige Streckenkomplex aussieht. Zuerst möge die Kurve  $\mathfrak{L}$  die Grundpunkte in der natürlichen Reihenfolge durchlaufen. Dann enthält der Streckenkomplex entweder nur einen Verzweigungsknoten, einen Innenknoten, von dem die  $2n$  logarithmischen Enden unmittelbar ausgehen, und zwar jedes mit einem Bündel aus einem Glied beginnend. Oder er enthält mehr als einen Verzweigungsknoten. Es gibt dann in dem Kern des Streckenkomplexes einen zentralen (Innen-)Knoten und  $n$  äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Innenknoten sind, ist durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten mit dem zentralen Knoten verbunden. Alle diese  $n$  Folgen enthalten die gleiche gerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus 2 Gliedern und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus  $2n - 2$  Gliedern. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden

$$L_{\lambda \lambda+1} \text{ und } L_{\lambda+1 \lambda+2} \quad (\lambda = 0, 2, \dots, 2n - 2, \text{ bzw. } \lambda = 1, 3, \dots, 2n - 1)$$

aus, jedes mit einem Bündel aus einem Glied beginnend. Nun nehmen wir an, daß die Kurve  $\mathfrak{L}$  die Grundpunkte in der Reihenfolge

$$A_0, A_x, A_2, A_{x+2}, \dots, A_{2n-2}, A_{x+2n-2} \quad (x = 3, 5, \dots, 2n - 1)$$

durchläuft. Dann enthält der Streckenkomplex stets mehr als einen Verzweigungsknoten, und zwar gibt es in dem Kern wieder einen zentralen (Innen-) Knoten und  $n$  äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Außenknoten sind, ist durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten mit dem zentralen Knoten verbunden. Alle diese  $n$  Folgen enthalten die gleiche ungerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus zwei Gliedern und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus zwei Gliedern. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden  $L_{\lambda \lambda+1}$  und  $L_{\lambda+1 \lambda+2}$  ( $\lambda = 0, 2, \dots, 2n - 2$ , bzw.  $\lambda = 1, 3, \dots, 2n - 1$ ) aus, von denen dasjenige, dessen erster Index gerade ist, mit einem Bündel aus  $x - 2$  Gliedern, dasjenige, dessen erster Index ungerade ist, mit einem Bündel aus  $2n - x$  Gliedern beginnt.

Die von uns betrachtete Klasse von Riemannschen Flächen stellt also ein einfaches Beispiel dafür dar, daß der Streckenkomplex einer Riemannschen Fläche von ihrer Zerschneidung, insbesondere von der Reihenfolge, in der die Grundpunkte von der zerschneidenden Kurve  $\mathfrak{L}$  getroffen werden, abhängen kann. Es ist mir nicht gelungen, bei unserer Flächenklasse die Anzahl der zwischen dem zentralen Knoten und den äußeren Verzweigungsknoten gelegenen Bündel in ihrer Abhängigkeit von  $c$  und  $\mathfrak{L}$  näher zu bestimmen <sup>14)</sup>.

<sup>14)</sup> Vgl. zu dem Vorhergehenden die Figuren 3 bis 6, in welchen eine der von uns betrachteten Riemannschen Flächen für den Fall  $n = 4$  veranschaulicht wird. Es handelt sich in allen Figuren um dieselbe Riemannsche Fläche, bei deren Zerschneidung der Reihe nach die vier verschiedenen Durchlaufungsreihenfolgen der Grundpunkte zugrundegelegt werden. Es ist dargestellt: in den Figuren a die  $w$ -Ebene mit den Grundpunkten (kleine Kreise mit Mittelpunkt), der Kurve  $\mathfrak{L}$  (ausgezogen) und den Kurven  $\mathfrak{l}$  (gestrichelt); in den Figuren b die entsprechende Konfiguration in der  $z$ -Ebene (die Kurven  $\mathfrak{C}$  sind ausgezogen, darunter die Seiten des Kernpolygons besonders stark, die Kurven  $\mathfrak{c}$  gestrichelt; kleine Kreise mit Mittelpunkt bezeichnen die Urpunkte zu den Grundpunkten); in den Figuren c der zugehörige Streckenkomplex (die Innenknoten sind durch kleine Kreise ohne Mittelpunkt, die Außenknoten durch kleine Kreuze gekennzeichnet). Es wurde dabei *angenommen*, daß durch die im Innern des Kernpolygons verlaufenden Kurven  $\mathfrak{C}$  jedesmal die Ecken  $E_0$  und  $E_2$ ,  $E_2$  und  $E_4$ ,  $E_4$  und  $E_6$ ,  $E_6$  und  $E_0$  verbunden sind, und zwar in Fig. 3b durch je 2, in Fig. 4b durch je 1, in Fig. 5b durch je 1, in Fig. 6b durch je 3 Kurven  $\mathfrak{C}$ .

Nun noch eine Bemerkung für den Fall, daß die  $2n$  logarithmischen Windungspunkte über eine und dieselbe Kreislinie zu liegen kommen, daß also nach § 7  $\Re c \equiv 0 \pmod{n}$  ist. In diesem Falle denken wir uns als Kurve  $\mathfrak{L}$  — dies ist am einfachsten — die Kreislinie gewählt, über der die Windungspunkte liegen. Dann liefern unsere allgemeinen Formeln für die Lage der logarithmischen Windungspunkte über die Reihenfolge, in der die Grundpunkte auf der Kreislinie  $\mathfrak{L}$  aufeinander folgen, folgendes Ergebnis: Falls  $\Re c$  ein gerades Vielfaches von  $n$  ist, so folgen die Grundpunkte auf der Kreislinie  $\mathfrak{L}$  stets, d. h. unabhängig von  $\Im c$  in der natürlichen Reihenfolge  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$  aufeinander; falls  $\Re c$  ein ungerades Vielfaches von  $n$  ist, so folgen sie stets in einer anderen als der natürlichen Reihenfolge aufeinander, und zwar für

$$\frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(\kappa-3)\pi}{2n}}{\sin \frac{(\kappa-1)\pi}{2n}} < \Im c < \frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(\kappa-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(\kappa+1)\pi}{2n}} \quad (\kappa = 3, 5, \dots, 2n-1)$$

in der Reihenfolge  $A_0, A_\kappa, A_2, A_{\kappa+2}, \dots, A_{2n-2}, A_{\kappa+2n-2}$ . Im übrigen gilt über das Kernpolygon und den Streckenkomplex das, was oben für die jeweilige Durchlaufungsreihenfolge gesagt wurde. Daher ist (vorausgesetzt, daß als Kurve  $\mathfrak{L}$  die mehrfach genannte Kreislinie gewählt wird) zu vermuten, daß im Falle  $\Re c = 0$  das Kernpolygon frei von Kurven  $\mathfrak{C}$  ist und daß im Falle  $\Re c = jn$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) die Ecken  $E_0$  und  $E_2, E_4, \dots, E_{2n-2}$  und  $E_0$ , im Falle  $\Re c = -jn$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) die Ecken  $E_1$  und  $E_3, E_5, \dots, E_{2n-1}$  und  $E_1$  durch je  $j$  Kurven  $\mathfrak{C}$  verbunden sind.

#### § 10. Die Struktur der Riemannschen Fläche in dem Falle, daß die $2n$ logarithmischen Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen kommen.

Nun wenden wir uns zu dem nur bei  $n \geq 3$  vorkommenden und für

$$c = (2j+1)n + i \frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 3, 5, \dots, 2n-3)$$

eintretenden Falle, daß die  $2n$  logarithmischen Windungspunkte paarweise übereinander zu liegen kommen (Fall II des Satzes von Seite 28f.). Als Kurve  $\mathfrak{L}$  denken wir uns stets die Kreislinie gewählt, über der die Windungspunkte liegen. Dann gelangt man durch ebenso einfache Schlüsse wie im vorigen Paragraphen zu folgendem Ergebnis:

Das Kernpolygon besteht stets aus einem zentralen  $n$ -Eck und aus  $n$  an dessen  $n$  Seiten angefügten Dreiecken. Zwischen dem zentralen  $n$ -Eck und jedem der  $n$  Dreiecke kann noch eine gewisse (bei allen  $n$  Dreiecken gleiche), gerade Anzahl von Streifengebieten eingefügt sein. Der Kern des Streckenkomplexes enthält somit einen zentralen Verzweigungsknoten (Innenknoten) und  $n$  äußere Verzweigungsknoten. Jeder der äußeren Verzweigungsknoten, die sämtlich Außenknoten sind, ist mit dem zentralen Knoten durch eine endliche Folge von Bündeln und einfachen Knoten verbunden. Alle diese  $n$  Folgen enthalten die gleiche ungerade Anzahl von Bündeln, beginnen am zentralen Knoten mit einem Bündel aus einem Glied und endigen an den äußeren Verzweigungsknoten mit einem Bündel aus einem Glied. Von jedem der äußeren Verzweigungsknoten gehen schließlich zwei logarithmische Enden  $L_{\lambda\lambda+1}$  und  $L_{\lambda+1\lambda+2}$  ( $\lambda = 0, 2, \dots, 2n-2$ , bzw.  $\lambda = 1, 3, \dots, 2n-1$ ) aus, von denen für

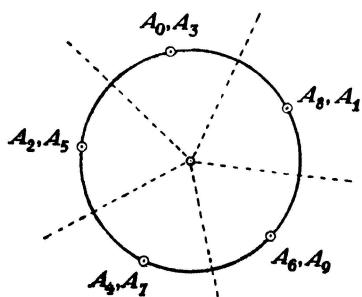
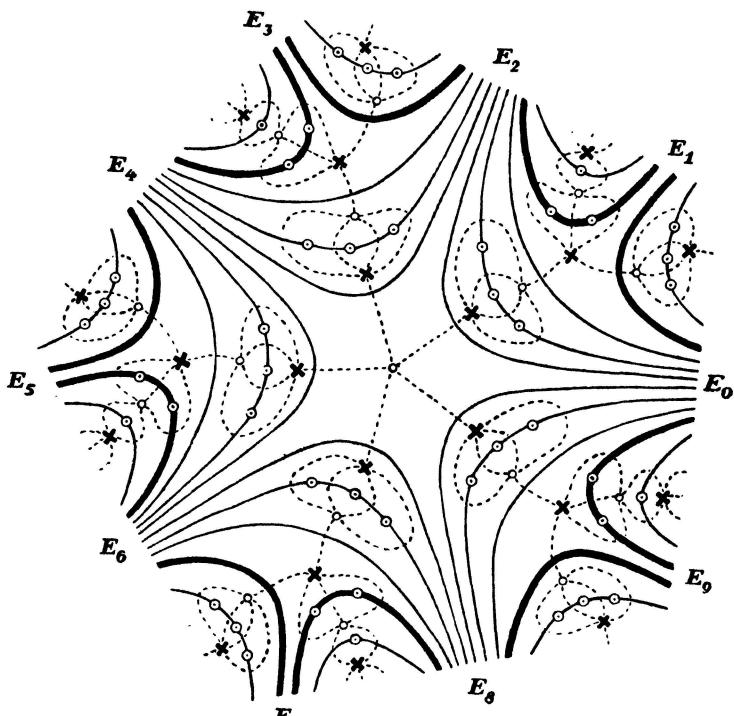
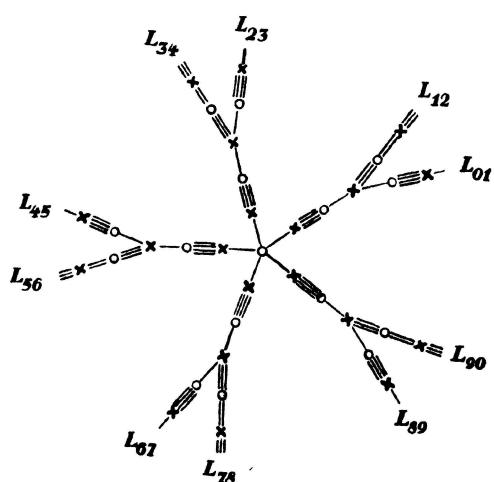
Fig. 7a. ( $w$ -Ebene)Fig. 7b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 7c. (Streckenkomplex)

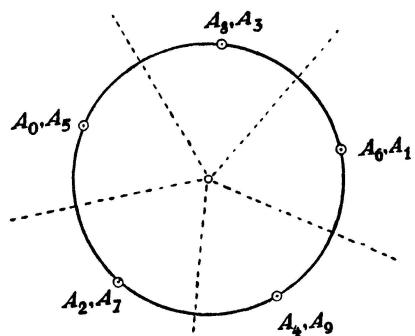
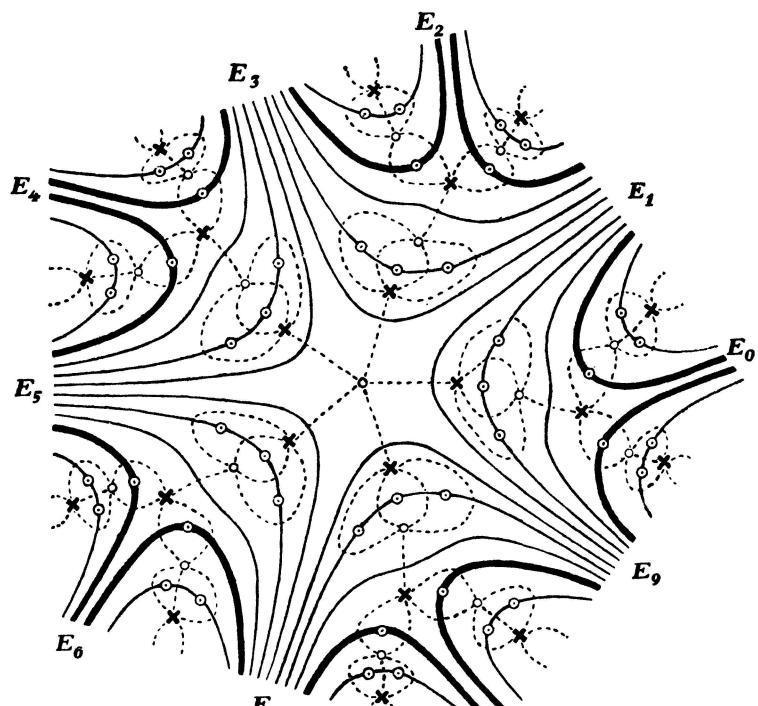
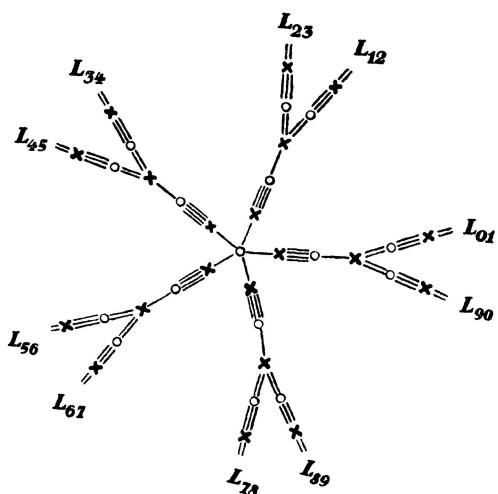
Fig. 8a. ( $w$ -Ebene)Fig. 8 b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 8 c. (Streckenkomplex)

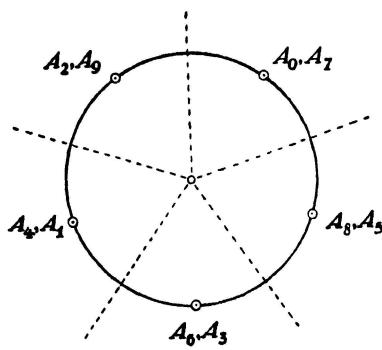
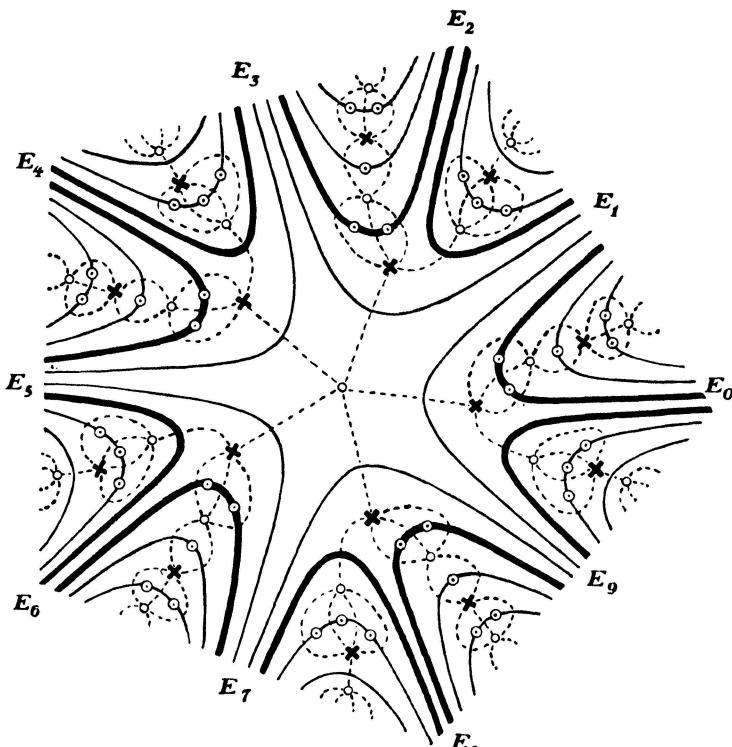
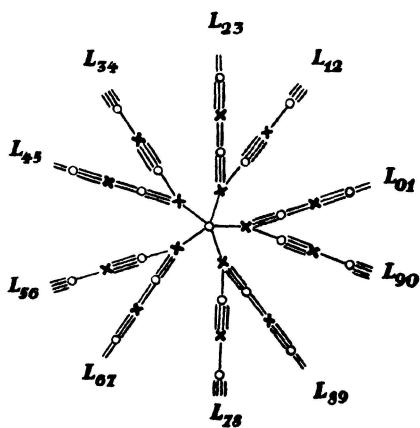
Fig. 9a. ( $w$ -Ebene)Fig. 9b. ( $z$ -Ebene)

Fig. 9c. (Streckenkomplex)

$$\Im c = \frac{n}{\pi} \log \frac{\sin \frac{(k-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}} \quad (k = 3, 5, \dots, 2n-3)$$

dasjenige, dessen erster Index gerade ist, mit einem Bündel aus  $\frac{k-1}{2}$  Gliedern, das-jenige, dessen erster Index ungerade ist, mit einem Bündel aus  $\frac{2n-k-1}{2}$  Gliedern beginnt. Es ist zu vermuten, daß für

$$\Re c = (2j+1)n \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

jeder der äußeren Verzweigungsknoten durch  $|2j+1|$  Bündel mit dem zentralen Knoten verbunden ist, und daß im Falle  $\Re c > 0$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) die logarithmischen Enden  $L_{\lambda \lambda+1}$  und  $L_{\lambda+1 \lambda+2}$  ( $\lambda = 0, 2, \dots, 2n-2$ ), im Falle  $\Re c < 0$  ( $j = -1, -2, \dots$ ) die logarithmischen Enden  $L_{\lambda \lambda+1}$  und  $L_{\lambda+1 \lambda+2}$  ( $\lambda = 1, 3, \dots, 2n-1$ ) von demselben äußeren Verzweigungsknoten ausgehen<sup>15)</sup>.

### § 11. Darstellung von $w_n(z, c)$ für den Fall, daß von den $2n$ logarithmischen Windungspunkten $n$ über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen; anschließende Aussagen über die Riemannsche Fläche.

Bei dem nunmehr zu betrachtenden Falle, daß von den  $2n$  logarithmischen Windungspunkten  $n$  über eine und dieselbe Stelle zu liegen kommen (Fall III des Satzes von Seite 28f.), gehen wir etwas anders und zwar mehr analytisch vor. Wir leiten zunächst eine einfache Darstellung für die Grundlösung  $w_n(z, c)$  der Gleichung (17) her. Daraus werden wir dann unmittelbar eine Aussage über die Riemannsche Fläche ablesen können.

Die folgenden Betrachtungen sind vollkommen unabhängig von Teil 2. Wir brauchen von dort nicht einmal die Kenntnis der Werte von  $c$ , für die der obige Fall eintritt. Diese Werte von  $c$  werden sich vielmehr auf einem anderen Wege noch einmal nebenbei ergeben. Aus der in Fußnote<sup>1)</sup> genannten Nevanlinnaschen Arbeit benötigen wir die folgenden beiden Tatsachen:

1. Zwei benachbarten Ecken des Kernpolygons entsprechen niemals zwei über einem und demselben Grundpunkt gelegene logarithmische Windungspunkte.

2. Die Nevanlinnaschen Funktionen  $w(z)$  lassen in jedem logarithmischen Ende zwei Werte aus; diesen Ausnahmewerten sind die Punkte zugeordnet, um die sich das dem logarithmischen Ende entsprechende Riemannsche Flächenstück windet.

$c$  sei nun so beschaffen, daß eine Lösung  $w(z)$  der Gleichung

$$(17) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$$

die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche abbildet, welche über  $w = \infty$   $n$  logarithmische Windungspunkte besitzt. Dabei braucht  $w(z)$  nicht notwendig die Grundlösung von (17) zu sein.

<sup>15)</sup> Vgl. zu diesem Paragraphen die Figuren 7 bis 9, in welchen für den Fall  $n = 5$  zu den drei Möglichkeiten des paarweisen Übereinanderfalls der Windungspunkte je eine Riemannsche Fläche veranschaulicht wird. Dabei wurde angenommen, daß in Fig. 7b die Ecken  $E_0$  und  $E_2, \dots, E_8$  und  $E_0$  durch je 3 Kurven  $\mathcal{C}$ , in Fig. 8b die Ecken  $E_1$  und  $E_3, \dots, E_9$  und  $E_1$  durch je 3 Kurven  $\mathcal{C}$ , in Fig. 9b die Ecken  $E_1$  und  $E_3, \dots, E_9$  und  $E_1$  durch je 1 Kurve  $\mathcal{C}$  verbunden sind. Bezüglich der Darstellung der verschiedenen Punkte und Kurven vgl. Fußnote<sup>14)</sup>.

Dann folgt aus der obigen Tatsache 1, daß von den beiden Ecken einer jeden Seite des Kernpolygons<sup>16)</sup> stets die eine einem im Endlichen gelegenen Windungspunkt, die andere einem im Unendlichen gelegenen Windungspunkt entspricht. Nach der Tatsache 2 besitzt daher  $w(z)$  in jedem logarithmischen Ende außer einem endlichen Ausnahmewert den Ausnahmewert  $\infty$ . Daher kann  $w(z)$  den Wert  $\infty$  nur im Kernpolygon annehmen. Da aber nun im Kernpolygon jeder Wert nur endlich oft angenommen wird, so besitzt  $w(z)$  überhaupt nur endlich viele Pole. Wie wir wissen, läßt sich  $w(z)$  als Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (18) darstellen. Jede Lösung von (18) ist bekanntlich eine ganze Funktion der Ordnung  $n$ , und je zwei linear unabhängige Lösungen von (18) haben keine gemeinsame Nullstelle. Daher gibt es eine Lösung  $g(z)$  von (18), welche die Pole von  $w(z)$  als Nullstellen, außer diesen aber keine Nullstelle mehr hat. Diese Lösung  $g(z)$  hat also bloß endlich viele Nullstellen, und nach Division durch ein Polynom  $D(z)$ , welches in denselben Punkten wie  $g(z)$  verschwindet, bleibt eine ganze Funktion ohne Nullstellen übrig. Da diese ganze Funktion  $\left(\text{der Quotient } \frac{g(z)}{D(z)}\right)$  die Ordnung  $n$  hat, ist sie von der Form  $e^{d(z)}$ , wo  $d(z)$  ein Polynom vom Grade  $n$  bedeutet.

Für jeden der oben näher gekennzeichneten Werte von  $c$  besitzt somit die Gleichung

$$(18) \quad g'' - (z^{2n-2} + cz^{n-2}) g = 0$$

eine Lösung von der Form

$$(49) \quad g(z) = D(z) e^{d(z)},$$

wo  $D(z)$  und  $d(z)$  Polynome sind; der Grad von  $D(z)$ , den wir mit  $h$  bezeichnen wollen, ist gleich der Anzahl der Pole von  $w(z)$ , der Grad von  $d(z)$  ist gleich  $n$ .

Geht man mit dem Ansatz (49) in die Gleichung (18), so erhält man

$$(50) \quad D'' + 2d'D' + (d'' + d'^2 - z^{2n-2} - cz^{n-2}) D = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden wir zunächst  $d(z)$  ermitteln. Es sei

$$D(z) = \sum_{k=0}^h D_k z^k, \quad d(z) = \sum_{k=0}^n d_k z^k.$$

Dann ist auf der linken Seite von (50) der Koeffizient von  $z^{2n+h-2}$  gleich  $(n^2 d_n^2 - 1) D_h$ . Also ergibt sich, da  $D_h \neq 0$  ist,

$$d_n^2 = \frac{1}{n^2}, \quad d_n = \pm \frac{1}{n}.$$

Die weiteren Koeffizienten  $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_2, d_1$  ergeben sich alle zu Null. Denn angenommen, es würden nicht alle Koeffizienten  $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_2, d_1$  verschwinden. Wenn dann  $d_j$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ) von den nichtverschwindenden Koeffizienten derjenige mit dem größten Index wäre, so wäre auf der linken Seite von (50) der Koeffizient von  $z^{n+j+h-2}$  gleich  $2n d_n j d_j D_h$ , also  $\neq 0$ , während er doch nach Gleichung (50) verschwinden muß. Daher ist in der Tat

$$d_{n-1} = d_{n-2} = \dots = d_2 = d_1 = 0.$$

Über  $d_0$  läßt sich aus (50) nichts schließen. Da jedoch  $d_0$  in (49) nur den unwesentlichen konstanten Faktor  $e^{d_0}$  liefert, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

<sup>16)</sup> Die bei der Zerschneidung der Riemannschen Fläche zugrunde gelegte Kurve  $\mathfrak{L}$ , die sich nun nicht mehr so wählen läßt, daß sie bei Drehung um den Nullpunkt um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  in sich selbst übergeht, denken wir uns beliebig festgelegt.

$d_0 = 0$  wählen. Wir haben somit

$$d(z) = \pm \frac{1}{n} z^n.$$

Hiernach reduziert sich Gleichung (50) auf

$$(51) \quad D'' \pm 2z^{n-1}D' + (\pm(n-1) - c)z^{n-2}D = 0.$$

(In (51) gehören, wie auch stets im folgenden, die oberen Vorzeichen zu  $d(z) = + \frac{1}{n} z^n$ , die unteren Vorzeichen zu  $d(z) = - \frac{1}{n} z^n$ .)

Beachtet man den Ansatz

$$D(z) = \sum_{k=0}^n D_k z^k,$$

so folgt aus (51) zunächst:

$$\begin{aligned} D_2 &= 0, & D_3 &= 0, \dots, & D_{n-1} &= 0, \\ D_{n+2} &= 0, & D_{n+3} &= 0, \dots, & D_{2n-1} &= 0, \\ D_{2n+2} &= 0, & D_{2n+3} &= 0, \dots, & D_{3n-1} &= 0 \end{aligned}$$

usw., also allgemein

$$D_k = 0, \text{ wenn sowohl } k \not\equiv 0 \pmod{n} \text{ als auch } k \not\equiv 1 \pmod{n}.$$

Für die Koeffizienten  $D_k$  mit  $k \equiv 0 \pmod{n}$  ergibt sich aus (51) das Gleichungssystem:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} n(n-1)D_n + (\pm(n-1) - c)D_0 = 0 \\ 2n(2n-1)D_{2n} + (\pm(3n-1) - c)D_n = 0 \\ 3n(3n-1)D_{3n} + (\pm(5n-1) - c)D_{2n} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

oder allgemein für  $\mu = 0, 1, 2, \dots$

$$(53) \quad (\mu+1)n((\mu+1)n-1)D_{(\mu+1)n} + \{\pm((2\mu+1)n-1) - c\}D_{\mu n} = 0.$$

Für die Koeffizienten  $D_k$  mit  $k \equiv 1 \pmod{n}$  erhält man aus (51) das Gleichungssystem:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n+1)nD_{n+1} + (\pm(n+1) - c)D_1 = 0 \\ (2n+1)2nD_{2n+1} + (\pm(3n+1) - c)D_{n+1} = 0 \\ (3n+1)3nD_{3n+1} + (\pm(5n+1) - c)D_{2n+1} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

oder allgemein für  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$(55) \quad ((\nu+1)n+1)(\nu+1)nD_{(\nu+1)n+1} + \{\pm((2\nu+1)n+1) - c\}D_{\nu n+1} = 0.$$

Nun soll aber  $D(z)$  ein (nicht identisch verschwindendes) Polynom sein. Daher müssen sich die Koeffizienten  $D_k$  aus (52) und aus (54) von einem gewissen Index an alle zu Null ergeben. Dies ist nur dann möglich, wenn entweder in (53) für eine gewisse Zahl  $\mu$  der Folge  $0, 1, 2, \dots$  oder in (55) für eine gewisse Zahl  $\nu$  der Folge  $0, 1, 2, \dots$  die geschweifte Klammer verschwindet, d. h. wenn

$$\text{entweder } c = \pm((2\mu+1)n-1) \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{oder } c = \pm((2\nu+1)n+1) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. Nur für diese Werte von  $c$  kann demnach die Gleichung (51) von einem nicht identisch verschwindenden Polynom befriedigt werden.

Wir nehmen zunächst die erste Möglichkeit

$$c = \pm ((2\mu + 1)n - 1) \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots).$$

Dann ist in (55) die geschweifte Klammer für jede Zahl  $\nu$  der Folge  $0, 1, 2, \dots$  von Null verschieden. Wäre  $D_1 \neq 0$ , so würden sich also aus (54) auch die unendlich vielen Koeffizienten  $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \dots$  alle ungleich Null ergeben. Dann wäre aber  $D(z)$  kein Polynom. Daher muß  $D_1$  verschwinden und folglich nach (54) auch  $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \dots$ . Um nicht die triviale Lösung  $D(z) \equiv 0$  zu erhalten, muß man  $D_0$  von Null verschieden wählen. Das Gleichungssystem (52) liefert sodann die Koeffizienten  $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \dots$ , und zwar ergeben sich  $D_n, D_{2n}, \dots, D_{\mu n}$  als von Null verschieden, dagegen  $D_{(\mu+1)n}, D_{(\mu+2)n}, \dots$  zu Null. Das Polynom  $D(z)$  ist somit vom Grade  $h = \mu n$  und genügt, da alle Koeffizienten  $D_k$  mit  $k \not\equiv 0 \pmod{n}$  verschwinden, der Beziehung  $D(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = D(z)$ . Wir wollen dieses Polynom genauer auch mit  $D_{\mu n, n}^+(z)$  bzw.  $D_{\mu n, n}^-(z)$  bezeichnen, je nachdem ob es zu  $c = +((2\mu + 1)n - 1)$  oder zu  $c = -((2\mu + 1)n - 1)$  gehört. Wir haben also das Ergebnis:

Die Gleichung (18) besitzt für  $c = \pm ((2\mu + 1)n - 1)$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) eine Lösung von der Form

$$g(z) = D_{\mu n, n}^{\pm}(z) e^{\pm \frac{1}{n} z^n}.$$

Hierin ist  $D_{\mu n, n}^{\pm}(z)$  ein Polynom vom Grade  $h = \mu n$ , welches der Differentialgleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2\mu n z^{n-2}D = 0$$

genügt und daher explizit durch

$$D_{\mu n, n}^{\pm}(z) = D_0 \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{(\pm 2)^{\kappa} \binom{\mu}{\kappa}}{n^{\kappa} \kappa! \binom{\kappa - \frac{1}{n}}{\kappa}} z^{\kappa n}$$

dargestellt wird.

Wir betrachten nun die zweite Möglichkeit

$$c = \pm ((2\nu + 1)n + 1) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Dann ist in (53) die geschweifte Klammer für jede Zahl  $\mu$  der Folge  $0, 1, 2, \dots$  ungleich Null. Wäre  $D_0 \neq 0$ , so würde also das Gleichungssystem (52) auch die unendlich vielen Koeffizienten  $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \dots$  alle als von Null verschieden ergeben. Dann wäre aber  $D(z)$  kein Polynom. Somit muß  $D_0$  verschwinden und folglich nach (52) auch  $D_n, D_{2n}, D_{3n}, \dots$ . Damit  $D(z)$  nicht identisch verschwindet, muß man  $D_1$  von Null verschieden wählen. Das Gleichungssystem (54) liefert sodann die Koeffizienten  $D_{n+1}, D_{2n+1}, D_{3n+1}, \dots$ , und zwar ergeben sich  $D_{n+1}, D_{2n+1}, \dots, D_{\nu n+1}$  als von Null verschieden, dagegen  $D_{(\nu+1)n+1}, D_{(\nu+2)n+1}, \dots$  zu Null. Das Polynom  $D(z)$  hat daher den Grad  $h = \nu n + 1$  und befriedigt, da alle Koeffizienten  $D_k$  mit  $k \not\equiv 1 \pmod{n}$

verschwinden, die Beziehung  $D(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} D(z)$ . Wir wollen dieses Polynom genauer auch mit  $D_{\nu n+1, n}^+(z)$  bzw.  $D_{\nu n+1, n}^-(z)$  bezeichnen, je nachdem ob es zu  $c = +((2\nu + 1)n + 1)$  oder zu  $c = -((2\nu + 1)n + 1)$  gehört. Wir haben somit das Ergebnis:

Die Gleichung (18) besitzt für  $c = \pm ((2\nu + 1)n + 1)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) eine Lösung von der Form

$$g(z) = D_{\nu n+1, n}^{\pm}(z) e^{\pm \frac{1}{n} z^n}.$$

Hierin ist  $D_{\nu n+1, n}^{\pm}(z)$  ein Polynom vom Grade  $h = \nu n + 1$ , welches der Differentialgleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1} D' \mp 2(\nu n + 1) z^{n-2} D = 0$$

genügt und daher explizit durch

$$D_{\nu n+1, n}^{\pm}(z) = D_1 \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{(\pm 2)^{\kappa} \binom{\nu}{\kappa}}{n^{\kappa} \kappa! \binom{\kappa + \frac{1}{n}}{\kappa}} z^{\kappa n + 1}$$

dargestellt wird.

Die beiden, für  $c = \pm ((2\mu + 1)n - 1)$  und für  $c = \pm ((2\nu + 1)n + 1)$  gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch gemeinsam in folgender Weise aussprechen:

*Die Gleichung (18) besitzt, falls  $c = \pm (2h + n - 1)$  und  $h$  eine der Zahlen  $0, 1, n, n + 1, 2n, 2n + 1, 3n, 3n + 1, \dots$  ist, eine Lösung von der Form*

$$g(z) = D_{h, n}^{\pm}(z) e^{\pm \frac{1}{n} z^n},$$

wo  $D_{h, n}^{\pm}(z)$  ein Polynom vom Grade  $h$  bedeutet, welches die Gleichung

$$(56) \quad D'' \pm 2z^{n-1} D' \mp 2h z^{n-2} D = 0$$

befriedigt.

Wie aus unseren Betrachtungen hervorgeht, sind die Werte

$$c = \pm (2h + n - 1) \quad (h = 0, 1, n, n + 1, 2n, 2n + 1, \dots)$$

auch die einzigen Werte von  $c$ , für welche die Gleichung (18) eine Lösung von der Form (49) hat.

Beachtet man, daß die Gleichung (17) durch die Substitution  $w' = g^{-2}$  in die Gleichung (18) übergeht (vgl. § 1), so erkennt man folgendes:

*Die Gleichung (17) besitzt, wenn  $c = \pm (2h + n - 1)$  und  $h$  eine der Zahlen  $0, 1, n, n + 1, 2n, 2n + 1, \dots$  ist, eine Lösung von der Form*

$$(57) \quad w(z) = \int_{t_0}^z \frac{e^{\mp \frac{2}{n} t^n}}{(D_{h, n}^{\pm}(t))^2} dt,$$

wo  $D_{h, n}^{\pm}(z)$  ein Polynom vom Grade  $h$  bedeutet, welches der Gleichung (56) genügt.  $t_0$  ist beliebig zu wählen, jedoch so, daß  $D_{h, n}^{\pm}(t_0) \neq 0$  wird.

Wie aus der Darstellung (57) folgt, besitzt diese meromorphe Funktion  $w(z)$  den Wert  $\infty$  als Picardschen Ausnahmewert im weiteren Sinne und zugleich als Nevanlinnaschen Ausnahmewert mit dem Defekt 1. Daher bildet in der Tat die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion  $w(z)$  die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit  $2n$  logarithmischen Windungspunkten ab, von denen  $n$  über dem unendlich fernen Punkt liegen. Die angegebenen Werte von  $c$  sind auch die einzigen, für welche die Gleichung (17) eine Lösung hat, welche als Bild der schlichten  $z$ -Ebene über der  $w$ -

Ebene eine Riemannsche Fläche mit  $n$  über  $w = \infty$  gelegenen logarithmischen Windungspunkten erzeugt. Da das Polynom  $D_{h,n}^\pm(z)$  der Gleichung (56) genügt, hat es lauter einfache Nullstellen. Die Gesamtzahl der (einfachen) Nullstellen ist also gleich  $h$ . Jede einfache Nullstelle von  $D_{h,n}^\pm(z)$  liefert aber nach (57) einen einfachen Pol von  $w(z)$ . Daher hat  $w(z)$  insgesamt  $h$  (einfache) Pole. Zusammenfassend kann man folgenden Satz aussprechen:

*Es sei  $h$  eine der Zahlen  $0, 1, n, n + 1, 2n, 2n + 1, \dots$  und  $D_{h,n}^\pm(z)$  ein Polynom vom Grade  $h$ , welches der Gleichung*

$$(56) \quad D'' \pm 2z^{n-1}D' \mp 2hz^{n-2}D = 0$$

*genügt. Dann bildet die durch*

$$(57) \quad w(z) = \int_{t_0}^z \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D_{h,n}^\pm(t))^2} dt \quad (D_{h,n}^\pm(t_0) \neq 0)$$

*dargestellte meromorphe Funktion  $w(z)$  die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit  $2n$  logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen  $2n$  Windungspunkten liegen  $n$  über dem unendlich fernen Punkt, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch  $h$  schlichte Blätter besitzt.*

Wenn man für  $h = 0, n, 2n, \dots$  das Polynom  $D_{h,n}^\pm(z)$  so normiert, daß  $D_{h,n}^\pm(0) = 1$  ist, so befriedigt für diese Werte von  $h$  die Funktion

$$w(z) = \int_0^z \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D_{h,n}^\pm(t))^2} dt$$

die Anfangsbedingungen  $w(0) = 0, w'(0) = 1, w''(0) = 0$ . Sie ist also gerade die Grundlösung von (17).

Normiert man für  $h = 1, n + 1, 2n + 1, \dots$   $D_{h,n}^\pm(z)$  so, daß seine erste Ableitung im Punkte  $z = 0$  den Wert 1 annimmt, so gilt, wenn  $h$  eine der Zahlen  $1, n + 1, 2n + 1, \dots$  ist, für die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion  $w(z)$  in der Umgebung des Punktes  $z = 0$  die Laurententwicklung

$$(58) \quad w(z) = -\frac{1}{z} + A + z^{n-1} \mathfrak{P}_0(z^n),$$

wo  $\mathfrak{P}_0(z^n)$  eine Potenzreihe in  $z^n$  bezeichnet. Wir denken uns nun in (57) die untere Integrationsgrenze so gewählt, daß in dieser Laurentreihe das absolute Glied  $A$  verschwindet. Daß dies möglich ist, ist leicht einzusehen. Wenn nämlich das beliebig gewählte  $t_0$  diese Eigenschaft noch nicht hat, so gibt es doch ein  $t_1$  so, daß

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{e^{\mp \frac{2}{n}t^n}}{(D_{h,n}^\pm(t))^2} dt = A$$

wird<sup>17)</sup>. Ein so gewähltes  $t_1$  hat alsdann, wenn es an Stelle von  $t_0$  im Integral (57) als untere Integrationsgrenze genommen wird, die gewünschte Eigenschaft. Nunmehr folgt, nachdem in (57) die untere Integrationsgrenze in der angegebenen Art festgelegt

<sup>17)</sup> Denn für die durch (57) dargestellte meromorphe Funktion  $w(z)$  ist ein beliebiger endlicher Wert entweder kein Ausnahmewert oder, wenn er Ausnahmewert ist, so doch nur mit dem Defekt  $\frac{1}{n}$ . Daher nimmt diese Funktion jeden endlichen Wert (sogar unendlich oft) an. Insbesondere gilt dies also für  $A$ .

ist, aus (58):

$$-\frac{1}{w(z)} = z + z^{n+1} \mathfrak{P}_1(z^n),$$

wo auch  $\mathfrak{P}_1(z^n)$  eine Potenzreihe in  $z^n$  bedeutet. Somit ist für  $h = 1, n+1, 2n+1, \dots$  das Integral (57) gleich der negativen reziproken Grundlösung.

Wir können nun unser Ergebnis auch in folgender Weise aussprechen:

1. Es sei  $c = \pm ((2\mu + 1)n - 1)$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $D_{\mu n, n}^{\pm}(z)$  diejenige Polynomlösung der Gleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1} D' \mp 2\mu n z^{n-2} D = 0,$$

welche für  $z = 0$  den Wert 1 annimmt. Dann wird durch

$$w_n(z, c) = \int_0^z \frac{e^{\mp \frac{2}{n} t^n}}{(D_{\mu n, n}^{\pm}(t))^2} dt$$

die Grundlösung der Gleichung (17) dargestellt. Diese bildet die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit  $2n$  logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen  $2n$  Windungspunkten kommen  $n$  über den unendlich fernen Punkt zu liegen, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch  $\mu$  schlichte Blätter besitzt.

2. Es sei  $c = \pm ((2\nu + 1)n + 1)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $D_{\nu n+1, n}^{\pm}(z)$  diejenige Polynomlösung der Gleichung

$$D'' \pm 2z^{n-1} D' \mp 2(\nu n + 1) z^{n-2} D = 0,$$

deren erste Ableitung für  $z = 0$  den Wert 1 annimmt. Dann wird durch

$$w_n(z, c) = - \left( \int_{t_1}^z \frac{e^{\mp \frac{2}{n} t^n}}{(D_{\nu n+1, n}^{\pm}(t))^2} dt \right)^{-1}$$

die Grundlösung der Gleichung (17) dargestellt, falls  $t_1$  als Nichtnullstelle von  $D_{\nu n+1, n}^{\pm}(t)$  so gewählt ist, daß in der Laurententwicklung für das in der Klammer stehende Integral das absolute Glied verschwindet. Diese Grundlösung bildet die schlichte endliche  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche mit  $2n$  logarithmischen Windungspunkten ab. Von diesen  $2n$  Windungspunkten kommen  $n$  über den Nullpunkt zu liegen, über welchem die Riemannsche Fläche überdies noch  $\nu n + 1$  schlichte Blätter besitzt.

Nun seien zum Schluß noch ein paar Spezialfälle angeführt:

Die Grundlösung  $w_n(z, c)$  der Gleichung (17) ist im allgemeinen eine meromorphe Funktion von  $z$  mit Polen. Nur in zwei Fällen, nämlich erstens für  $c = n - 1$  und zweitens für  $c = -n + 1$ , ist sie eine ganze Funktion von  $z$  und zwar

$$w_n(z, n - 1) = \int_0^z e^{-\frac{2}{n} t^n} dt \quad \text{und} \quad w_n(z, -n + 1) = \int_0^z e^{\frac{2}{n} t^n} dt.$$

Von besonderem Interesse ist noch der Sonderfall  $n = 2$ . Dies ist nämlich der einzige Fall, in dem alle natürlichen Zahlen einschließlich Null durchlaufen kann. Gleichung (56) lautet für  $n = 2$ :

$$(D_{h, 2}^{\pm})'' \pm 2z (D_{h, 2}^{\pm})' \mp 2h D_{h, 2}^{\pm} = 0.$$

Nun befriedigt bekanntlich das  $h$ -te Hermitesche Polynom — es sei mit  $H_h(z)$  bezeichnet — die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_h(z)}{dz^2} - 2z \frac{dH_h(z)}{dz} + 2h H_h(z) = 0.$$

Ferner genügt, wie man sieht, das Polynom  $H_h(iz)$  der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 H_h(iz)}{dz^2} + 2z \frac{dH_h(iz)}{dz} - 2h H_h(iz) = 0.$$

Daher ist das Polynom  $D_{h,2}^-(z)$  bis auf einen konstanten Faktor gleich dem  $h$ -ten Hermite-schen Polynom  $H_h(z)$  und das Polynom  $D_{h,2}^+(z)$  bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Polynom  $H_h(iz)$ .

Eingegangen 9. September 1935.