Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

Im Anschluß an eine frühere Arbeit[1]) behandle ich hier die Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper K einer Unbestimmten über einem vollkommenen Konstantenkörper k beliebiger Charakteristik $p (= 0$ oder Primzahl). Es handelt sich dabei um den Nachweis des am Schluß ausgesprochenen Satzes, der als Verallgemeinerung des Satzes 3 und der anschließenden Ausführungen in meiner früheren Arbeit anzusehen ist.

1. Es sei x irgendein Element aus K und

$$x = \sum_{\mu} a_\mu \pi^\mu, \quad \text{kurz} \quad x = x(\pi)$$

seine Entwicklung nach irgendeinem lokalen Primelement π zu irgendeinem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K mit Koeffizienten a_μ aus dem Konstantenkörper $k_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterung $K_\mathfrak{p}$ von K[2]).

Für jedes feste System $\mathfrak{p}, \pi$ sind dann die formalen Ableitungen

$$\frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa} = \sum_{\mu} \mu(\mu - 1) \cdots (\mu - (\varkappa - 1))\, a_\mu \pi^{\mu - \varkappa}$$

zwar wohlbestimmte Elemente aus $K_\mathfrak{p}$, aber für $\varkappa \geqq p$ sämtlich 0. Um zu einer nichttrivialen Definition auch für $\varkappa \geqq p$ zu gelangen, nehmen wir das formale Äquivalent der bei $p = 0$ durch $\frac{1}{\varkappa!} \frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa}$ gegebenen Bildungen, also die wohlbestimmten Elemente

$$D_\pi^{(\varkappa)} x = \sum_{\mu} \binom{\mu}{\varkappa} a_\mu \pi^{\mu - \varkappa}$$

aus $K_\mathfrak{p}$.

---

[1]) H. Hasse, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934), 55—64.

[2]) Bekanntlich ist $K_\mathfrak{p}$ der Körper aller Potenzreihen in π mit Koeffizienten aus $k_\mathfrak{p}$, wobei $k_\mathfrak{p}$ auf folgende beiden Arten eindeutig charakterisiert ist:

a) $k_\mathfrak{p}$ ist die in $K_\mathfrak{p}$ algebraisch-abgeschlossene Hülle von k (lokaler Konstantenkörper).

b) $k_\mathfrak{p}$ ist eine zum Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ kongruent-isomorphe, in $K_\mathfrak{p}$ enthaltene Erweiterung von k (also vom Grade $f_\mathfrak{p}$ über k, wo $f_\mathfrak{p}$ der Grad von $\mathfrak{p}$ ist).

Zu b) siehe H. Hasse-F. K. Schmidt, Die Struktur diskret bewerteter Körper, Journ. f. Math. **170** (1933), 4—63, insbes. 9 f.

Die Gesamtheit der zu x auf diese Weise bei festem $\varkappa$ für alle $\mathfrak{p}$ und alle zugehörigen π zugeordneten Elemente $D_\pi^{(\varkappa)} x$ aus den $K_\mathfrak{p}$ nennen wir das *$\varkappa$-te Differential* $D^{(\varkappa)} x$.

Die Theorie dieser Differentiale erfordert bei $p \neq 0$ deshalb eine neue Begründung, weil dann das methodische Haupthilfsmittel der Theorie bei $p = 0$, nämlich die iterative Herleitung

$$\frac{d^{\varkappa+1} x}{d\pi^{\varkappa+1}} = \frac{d\left(\frac{d^\varkappa x}{d\pi^\varkappa}\right)}{d\pi}$$

der höheren Differentialquotienten, kein Äquivalent hat; in der Tat versagt das bei $p = 0$ bestehende formale Äquivalent

$$D_\pi^{(\varkappa+1)} x = \frac{1}{\varkappa + 1} D_\pi^{(1)} D_\pi^{(\varkappa)} x$$

bei $p \neq 0$ für $\varkappa + 1 \equiv 0 \bmod. p$.

Als Ersatz für dieses Hilfsmittel ziehen wir formale Potenzreihenentwicklungen in einer Unbestimmten t über den Körpern K und $K_\mathfrak{p}$ heran. Offenbar ist $D_\pi^{(\varkappa)}$ auch charakterisiert als der Koeffizient von $t^\varkappa$ in $x(\pi + t)$, man hat also die Identität

$$x(\pi + t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (D_\pi^{(\varkappa)} x)\, t^\varkappa = x + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (D_\pi^{(\varkappa)} x)\, t^\varkappa \tag{1}$$

in der Unbestimmten t.

Die Bedeutung der lokalen Differentialquotienten $D_\pi^{(\varkappa)} x$ liegt darin, daß für bei $\mathfrak{p}$ ganzes x die Koeffizienten a_μ der π-adischen Entwicklung von x selbst (ohne hinzutretende Zahlkoeffizienten) als Elemente aus $k_\mathfrak{p}$ mit

$$a_\mu \equiv D_\pi^{(\mu)} x \bmod. \mathfrak{p}$$

charakterisiert sind; daher ist die Ordnungszahl eines bei $\mathfrak{p}$ ganzen x ausnahmslos charakterisiert als die Ordnung μ des frühesten Differentialquotienten $D_\pi^{(\mu)} x \not\equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}$.

2. Es sei

$$f = f(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn}\, x^m y^n$$

irgendein Polynom in zwei Unbestimmten x, y mit Koeffizienten a_{mn} aus k. Wir brauchen dann die folgende auch für $p \neq 0$ durchweg nicht-triviale Definition der *höheren partiellen Ableitungen*:

$$\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f = \sum_{m,n} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu} a_{mn}\, x^{m-\mu} y^{n-\nu},$$

die sich als formales Äquivalent von $\frac{1}{\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu\, \partial y^\nu}$ ergibt. Offenbar ist $\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f$ auch charakterisiert als der Koeffizient von $u^\mu v^\nu$ in $f(x + u, y + v)$, man hat also die Identität

$$f(x + u, y + v) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)} f)\, u^\mu v^\nu \tag{2}$$

in den Unbestimmten u, v.

3. Es seien jetzt x, y irgend zwei Elemente aus K. Wir wollen dann die höheren Differentiale $D^{(\varkappa)} f$ des Elementes $f = f(x, y)$ aus K durch die höheren Differentiale $D^{(r)} x$, $D^{(s)} y$ von x, y ausdrücken.

Nach (1) und (2) haben wir

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(D_{\pi}^{(\varkappa)}f)\,t^{\varkappa} = f(x(\pi+t),\,y(\pi+t))$$
$$= f\Big(x+\sum_{r=1}^{\infty}(D_{\pi}^{(r)}x)\,t^{r},\;\; y+\sum_{s=1}^{\infty}(D_{\pi}^{(s)}y)\,t^{s}\Big)$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D_{\pi}^{(r)}x)\,t^{r}\Big)^{\mu}\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D_{\pi}^{(s)}y)\,t^{s}\Big)^{\nu}.$$

Mit dieser verhältnismäßig einfachen Identität, die wir unter Offenlassen der Wahl von $\mathfrak{p}, \pi$ kurz in der Form

$$(3)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(D^{(\varkappa)}f)\,t^{\varkappa} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^{r}\Big)^{\mu}\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^{s}\Big)^{\nu}$$

schreiben, werden wir für unsere Zwecke auskommen. Wir brauchen nicht die daraus durch Koeffizientenvergleich in t folgenden komplizierteren expliziten Formeln

$$(3')\quad D^{(\varkappa)}f = \sum_{\substack{\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\sigma_1,\sigma_2,\ldots=0\\ \varrho_1+2\varrho_2+\cdots+\sigma_1+2\sigma_2+\cdots=\varkappa}}^{\varkappa}(\Delta_{\varrho_1+\varrho_2+\cdots,\,\sigma_1+\sigma_2+\cdots}^{(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\sigma_1+\sigma_2+\cdots)}f)\binom{\varrho_1+\varrho_2+\cdots}{\varrho_1,\,\varrho_2,\,\ldots}\binom{\sigma_1+\sigma_2+\cdots}{\sigma_1,\,\sigma_2,\,\ldots}$$
$$(D^{(1)}x)^{\varrho_1}\,(D^{(2)}x)^{\varrho_2}\cdots(D^{(1)}y)^{\sigma_1}\,(D^{(2)}y)^{\sigma_2}\cdots.$$

4. Es sei jetzt x speziell ein solches Element aus K, daß K separabel-algebraisch über $k(x)$ ist — wegen der Vollkommenheit von k gibt es ein solches Element —, und y irgendein Element aus K. Dann existiert ein in y separables Polynom f mit

$$f(x,y)=0.$$

Für dieses Polynom ergibt (3) das Bestehen der Identität

$$(4)\qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^{r}\Big)^{\mu}\Big(\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^{s}\Big)^{\nu}=0$$

in der Unbestimmten t, also der (3′) entsprechenden Formeln

$$(4')\quad \sum_{\substack{\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\sigma_1,\sigma_2,\ldots=0\\ \varrho_1+2\varrho_2+\cdots+\sigma_1+2\sigma_2+\cdots=\varkappa}}^{\varkappa}(\Delta_{\varrho_1+\varrho_2+\cdots,\,\sigma_1+\sigma_2+\cdots}^{(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\sigma_1+\sigma_2+\cdots)}f)\binom{\varrho_1+\varrho_2+\cdots}{\varrho_1,\,\varrho_2,\,\ldots}\binom{\sigma_1+\sigma_2+\cdots}{\sigma_1,\,\sigma_2,\,\ldots}(D^{(1)}x)^{\varrho_1}(D^{(2)}x)^{\varrho_2}\cdots(D^{(1)}y)^{\sigma_1}(D^{(2)}y)^{\sigma_2}\cdots=0.$$

Dabei ist nach Voraussetzung

$$\Delta_{0,0}^{(0)}f = f = 0,$$
$$\Delta_{0,1}^{(1)}f = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Bekanntlich hat daher die Gleichung

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}(\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}f)\,u^{\mu}v^{\nu}=0$$

eine eindeutig bestimmte Auflösung

$$v=\sum_{\mu=1}^{\infty}(D_{x}^{(\mu)}y)\,u^{\mu}$$

mit rational aus den $\Delta_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu)}$ gebildeten Koeffizienten $D_{x}^{(\mu)}y$, deren Nenner sogar nur Potenzen von $\Delta_{0,1}^{(1)}f=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sind; die Bezeichnung ist aus einem später hervortretenden Grunde gewählt. Aus (4) folgt damit das Bestehen der Identität

$$(5)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^{s}=\sum_{\mu=1}^{\infty}(D_{x}^{(\mu)}y)\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^{r}\Big)^{\mu},$$

und daraus ergeben sich durch Koeffizientenvergleich in t die expliziten Formeln

$$(5') \quad D^{(\varkappa)}y = \sum_{\substack{\varrho_1,\dots,\varrho_\varkappa=0 \\ \varrho_1+\dots+\varkappa\varrho_\varkappa=\varkappa}}^{\varkappa} (D_x^{(\varrho_1+\dots+\varrho_\varkappa)}y)\binom{\varrho_1+\dots+\varrho_\varkappa}{\varrho_1,\dots,\varrho_\varkappa}(D^{(1)}x)^{\varrho_1}\cdots(D^{(\varkappa)}x)^{\varrho_\varkappa},$$

welche die Auflösung des Formelsystems (4′) nach den $D^{(\varkappa)}y$ darstellen.

Wir brauchen im folgenden nur, daß diese Formeln die folgende dreieckige Struktur haben:

$$(5'') \qquad D^{(\varkappa)}y = (D_x^{(\varkappa)}y)\,(dx)^\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(D_x^{(\lambda)}y)\,X^{(\varkappa,\lambda)},$$

wo $dx = D^{(1)}x$ und die $X^{(\varkappa,\lambda)}$ gewisse ganzzahlige Polynome in $D^{(1)}x,\dots,D^{(\varkappa)}x$ sind, auf die es uns nicht weiter ankommt. Aus (5″) ist ersichtlich, daß die Koeffizienten $D_x^{(\varkappa)}y$, wie schon durch die Bezeichnung angedeutet, von der Wahl des annullierenden Polynoms f zu x, y unabhängig sind; man braucht dazu (5″) nur für irgendein festes System $\mathfrak{p}, \pi$ anzusetzen und die Unabhängigkeit der $D_\pi^{(\varkappa)}x$, $D_\pi^{(\varkappa)}y$ von f zu beachten.

5. Beiläufig sei noch folgendes bemerkt: Ist x' ein weiteres Element aus K, für das K separabel-algebraisch über $k(x')$ ist, so kann man neben der direkten Darstellung (5) der $D^{(\varkappa)}y$ durch die $D^{(\varkappa)}x$ auch den Umweg über x' nehmen, d. h. in der Identität

$$\sum_{s=1}^{\infty}(D^{(s)}y)\,t^s = \sum_{\lambda=1}^{\infty}(D_{x'}^{(\lambda)}y)\Big(\sum_{q=1}^{\infty}(D^{(q)}x')\,t^q\Big)^\lambda$$

rechts die Identität

$$\sum_{q=1}^{\infty}(D^{(q)}x')\,t^q = \sum_{\nu=1}^{\infty}(D_x^{(\nu)}x')\Big(\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r\Big)^\nu$$

einführen. Koeffizientenvergleich in $\sum_{r=1}^{\infty}(D^{(r)}x)\,t^r$ als Entwicklungsgröße liefert dann genau nach dem Schema des von (5) zu (5′) führenden Koeffizientenvergleichs die ganz entsprechend gebauten Formeln

$$D_x^{(\varkappa)}y = \sum_{\substack{\varrho_1,\dots,\varrho_\varkappa=0 \\ \varrho_1+\dots+\varkappa\varrho_\varkappa=\varkappa}}^{\varkappa} (D_{x'}^{(\varrho_1+\dots+\varrho_\varkappa)}y)\binom{\varrho_1+\dots+\varrho_\varkappa}{\varrho_1,\dots,\varrho_\varkappa}(D_x^{(1)}x')^{\varrho_1}\cdots(D_x^{(\varkappa)}x')^{\varrho_\varkappa} = (D_{x'}^{(\varkappa)}y)\Big(\frac{dx'}{dx}\Big)^\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa}(D_{x'}^{(\lambda)}y)\,X_x'^{(\varkappa,\lambda)},$$

welche die Transformationsregel der Bildungen $D_x^{(\varkappa)}y$ bei Übergang von der Differentiationsgröße x zu x' darstellen.

Die $D_x^{(\varkappa)}y$ sind nach (5′) und diesen Formeln das formale Äquivalent der höheren Differentialquotienten $\frac{1}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa}$ in ihrer Darstellung durch die höheren partiellen Ableitungen von f.

6. Es seien jetzt irgendwelche n Elemente $y_1,\dots,y_n$ aus K gegeben. Wir betrachten die Determinante

$$|D^{(\varkappa)}y_i| = \begin{vmatrix} D^{(1)}y_1 & \cdots & D^{(n)}y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D^{(1)}y_n & \cdots & D^{(n)}y_n \end{vmatrix} \qquad (i, \varkappa = 1,\dots,n).$$

Sie liefert für jedes System $\mathfrak{p}, \pi$ ein wohlbestimmtes Element $|D_\pi^{(\varkappa)}y_i|$ aus $K_\mathfrak{p}$. Aus der dreieckigen Struktur der Formeln (5″) ergibt sich ohne weiteres, daß bei der Bildung dieser Determinante die dortigen Zusatzglieder mit den $X^{(\varkappa,\lambda)}$ weggelassen werden können, also

$$|D_\pi^{(\varkappa)} y_i| = \left|(D_x^{(\varkappa)} y_i)\left(\frac{dx}{d\pi}\right)^{\varkappa}\right| = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \left(\frac{dx}{d\pi}\right)^{1+\cdots+n}.$$

Dabei ist die Determinante $|D_x^{(\varkappa)} y_i|$ ein durch x und $y_1, \ldots, y_n$ wohlbestimmtes, von der Wahl des Systems $\mathfrak{p}, \pi$ unabhängiges Element aus K. Wir schreiben unter Offenlassung der Wahl von $\mathfrak{p}, \pi$ dafür auch wieder kurz

$$|D^{(\varkappa)} y_i| = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \, (dx)^{1+\cdots+n}.$$

Zusammenfassend haben wir damit festgestellt:

Satz. *Ist x irgendein Element aus K derart, daß K über $k(x)$ separabel-algebraisch ist, d. h. irgendein Element aus K mit $dx \neq 0$, und sind $y_1, \ldots, y_n$ irgendwelche Elemente aus K, so ist*

$$\frac{|D^{(\varkappa)} y_i|}{(dx)^{1+\cdots+n}} = |D_x^{(\varkappa)} y_i| \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots, n)$$

ein wohlbestimmtes Element aus K.

Insbesondere stellt $|D^{(\varkappa)} y_i|$ selbst einen wohlbestimmten Divisor aus der $(1 + 2 + \cdots + n)$-ten Potenz der Differentialklasse von K dar, der gegenüber nicht-singulärer Transformation aus k des Systems y_i invariant ist.

Entsprechendes gilt ersichtlich auch für die Determinante

$$|D^{(\varkappa)} y_i| \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \varkappa = 0, \ldots, n-1),$$

bei der dann die Potenz $(dx)^{1+\cdots+(n-1)}$ zu nehmen ist.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen hat Herr Teichmüller eine andersartige Begründung der höheren Differentation in K für den Fall einer Primzahlcharakteristik p gegeben, die ohne den Umweg über die lokalen Differentialquotienten $D_\pi^{(\varkappa)} y$ direkt zu den Differentialquotienten $D_x^{(\varkappa)} y$ im großen führt. Eine Darstellung dieser Begründung wird demnächst in diesem Journal erscheinen.

Eingegangen 15. Oktober 1935.