NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1936

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0175

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0175|LOG_0008

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über den Hauptsatz der Algebrentheorie.

Von *Max Deuring* in Leipzig.

Nach Hasse [1]) können die normalen einfachen Algebren $\mathfrak{A}$ über einem algebraischen Zahlkörper k durch ihre $\mathfrak{p}$-Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ beschrieben werden. $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ ist dabei eine Restklasse modulo 1, und es gilt:

(1) nur endliche viele $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ sind $\not\equiv 0 \pmod 1$,

(2) für unendliches $\mathfrak{p}$ ist $2\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$,

(3) $\sum \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$.

Dies ist die eine Hälfte des Hauptsatzes. Die andere Hälfte ist die Umkehrung: daß auch jedes (1), (2), (3) erfüllende System von Resten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ modulo 1 als Invariantensystem einer Algebra $\mathfrak{A}$ vorkommt.

Die Summenrelation (3) steht nach Hasse in engem Zusammenhang mit dem Reziprozitätsgesetz. Es ist der Zweck dieser Zeilen, auch die Umkehrung, die eben formuliert wurde, mit dem Reziprozitätsgesetz in Zusammenhang zu bringen und sie auf rein arithmetischem Wege aus ihm herzuleiten. Der Beweis von Hasse macht von dem Satz von der arithmetischen Progression in seiner allgemeinsten Form wesentliche Anwendung; der hier zu gebende neue Beweis ergänzt darum den von Chevalley gegebenen rein arithmetischen Aufbau der Klassenkörpertheorie [2]). Zudem vertieft er die Einsicht in den Zusammenhang zwischen Klassenkörper- und Algebrentheorie.

K sei ein zyklischer Erweiterungskörper von k, $\mathfrak{f}$ der Führer von K/k. Bedeutet α den Strahl modulo $\mathfrak{f}$ von k, $\mathfrak{A}$ die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale von K und $N_{K/k}$ die Normbildung von K nach k, so ist $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ die K zugeordnete Idealgruppe von k. Sie hat in der Gruppe $\mathfrak{a}$ der zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale von k den Index $(K:k)$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{a}/\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ ist zyklisch. $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ wird aus $\mathfrak{a}$ durch die Bedingung $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ herausgehoben.

Wird ein Ideal $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \mathfrak{p}^{\varrho_\mathfrak{p}}$ durch die Exponenten $\varrho_\mathfrak{p}$ beschrieben, so kann die Gruppe $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$, weil sie zyklisch unter $\mathfrak{a}$ liegt, durch eine Relation

(4) $$\Sigma\, \varrho_\mathfrak{p}\, \varepsilon_\mathfrak{p} \equiv 0 \pmod{(K:k)}$$

---

[1]) H. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Trans. Amer. Math. Soc. **24** (1932), 171—214; Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), 731—760. Vgl. auch M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. **4**, 1, Kap. VII, §§ 1—6.

[2]) Cl. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes, C. R. Acad. Sci. Paris **201** (1935), 632—634.

gekennzeichnet werden, in der $\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ gewisse ganze Zahlen sind. Bis auf ganzzahlige Faktoren ist (4) auch die einzige Relation für die Untergruppe $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{a}$. Aus der anderen Kennzeichnung von $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ mittels des Artinsymbols ergibt sich, daß man für die $\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ die Exponenten in einer Darstellung $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = S^{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}$ der Frobeniussubstitutionen durch einen erzeugenden Automorphismus S von K/k zu nehmen hat.

Die zyklische Algebra $\mathfrak{A} = (\alpha, K, S)$ hat nun die Invarianten

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{\varepsilon_{\mathfrak{p}}\varrho_{\mathfrak{p}}}{(K:k)} \pmod 1\ ^{3)}$$

für $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$; die übrigen Invarianten sind $\equiv 0 \pmod 1$. (4) ist darum mit der Summenrelation (3) gleichbedeutend, und die Einzigkeit von (4) besagt gerade, daß es zu Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)$, die außer (1), (2), (3) auch noch

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1 \text{ für } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f} \text{ und unendliche } \mathfrak{p}, \tag{5}$$

$$(K_{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}) \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1 \tag{6}$$

erfüllen, stets eine Algebra $\mathfrak{A} = (\alpha, K, S)$ gibt.

Sind jetzt *beliebige* Invarianten gemäß (1), (2), (3) vorgegeben, so bestimmen wir zunächst eine total negative Zahl β in k, und eine Zahl γ, die an der Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ positiv oder negativ ist, je nachdem $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}_\infty}\right) \equiv 0$ oder $\equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ gilt. Wir setzen $(\gamma, k(\sqrt{\beta}), S) = \mathfrak{B}$ und bilden die neuen Invarianten

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{p}}\right) \pmod 1.$$

Dann ist $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$ für unendliche $\mathfrak{p}$. Mit Hilfe eines Satzes von van der Waerden[4]) bestimmen wir einen zyklischen Kreiskörper K/k, der den Bedingungen

$$(K_{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}) \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

genügt und zu dessen Verzweigungsprimstellen $\mathfrak{q}$ die Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$ gehören. Die $\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{p}}\right)$ erfüllen (5) und (6), daher gibt es eine Algebra $\mathfrak{C} = (\alpha, K, S)$; $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}$ ist die Algebra mit den vorgegebenen Invarianten.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Summenrelation (3) eine invariante Form der Relationen (4) ist, durch die bei den zyklischen Körpern K/k die zugeordneten Idealgruppen $\alpha N_{K/k}\mathfrak{A}$ aus der vollen Idealgruppe $\mathfrak{a}$ herausgehoben werden.

---

[3]) Vgl. Deuring loc. cit. Seite 120.

[4]) B. L. van der Waerden, Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems, dieses Journ. **171** (1934), 1—3. Für die Schlußweise Deuring loc. cit. Kap. VII, § 5. (Beweis von Satz 4 auf Seite 118).

Eingegangen 28. November 1935.