

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1936

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0175

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0175](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0175)

**LOG Id:** LOG\_0009

**LOG Titel:** Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II.

Von *Masao Sugawara* in Tokyo.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich folgende Vermutung ausgesprochen:

*Es sei  $\Omega$  ein imaginär quadratischer Zahlkörper und  $m$  ein ganzes Ideal in  $\Omega$ . Der Strahlklassenkörper mod  $m$  über  $\Omega$  entsteht dann dadurch, daß man eine Hasse'sche Strahlklasseninvariante  $\tau(f^*)$  zu  $\Omega$  adjungiert.*

Beweisen konnte ich sie dort unter der Annahme:

$$(I) \quad 4 \mid m, \quad m \neq 4.$$

Inzwischen ist es mir gelungen, diese Vermutung noch in weiteren Fällen zu bestätigen. Der Beweis in S. I läßt sich nämlich vereinfachen und verschärfen; man braucht statt (I) nur folgendes vorauszusetzen:

$$(I') \quad Es \text{ existiert ein Primfaktor } p \text{ von } 2 \text{ in } \Omega \text{ mit } p^2 \mid m \text{ und } \varphi(m) \geq 6.$$

Ist insbesondere  $p$  vom absolut ersten Grade, so kann es wegen  $\varphi(p) = 1$  nie im Führer einer Idealgruppe in  $\Omega$  genau in der ersten Potenz aufgehen. Zieht man also bei der Voraussetzung (I') nur solche Werte von  $m$  in Betracht, die wirklich als Führer einer Idealgruppe in  $\Omega$  auftreten können, so ist hiermit meine obige Vermutung für „fast alle“ durch einen Primfaktor ersten Grades von 2 teilbaren Moduln  $m$  bestätigt. — „Fast alle“ soll hier wie im folgenden „bis auf endlich viele Ausnahmen“ bedeuten.

Eine ähnliche Methode, die von einer anderen Form des Additionstheorems der  $\varphi$ -Funktion Gebrauch macht, gestattet nun, die Behauptung auch unter folgender Voraussetzung zu beweisen:

$$(II) \quad \Psi(m) = N(m) \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{2}{N(p)}\right) \geq 5.$$

Soweit  $m$  nicht durch einen Primfaktor ersten Grades von 2 teilbar ist, ist  $\Psi(m)$  eine positive ganze rationale Zahl; und es gibt offenbar nur endlich viele Werte von  $m$  für die  $0 < \Psi(m) < 5$  gilt. Meine Vermutung ist damit überhaupt für „fast alle“  $m$  bestätigt.

Zum Beweis setze ich die Kenntnis von S. I voraus und kann mich dementsprechend kurz fassen. Ferner lasse ich die Körper  $\Omega = P(\sqrt{-1})$ ,  $P(\sqrt{-3})$  außer Betracht; für sie ist ja, wie bereits in S. I erwähnt, meine Vermutung bereits auf Grund der klassischen Theorie richtig.

*Beweis unter der Annahme (I').*

<sup>1)</sup> M. Sugawara, Zur Theorie der komplexen Multiplikation. I, ds. Journal 174 (1936); im folgenden zitiert mit S. I.

Es sei  $\tau(\mathfrak{f}^*) = \tau(\varrho | \mathfrak{a})$  eine Strahlklasseninvariante mod  $\mathfrak{m}$  und  $\omega$  eine durch  $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{p}}$  teilbare ganze Zahl in  $\Omega$ , die aber  $\not\equiv 0 \pmod{+}\mathfrak{m}$  ist.  $\omega\varrho$  ist dann offenbar eine Halbperiode der Funktion  $\tau(u | \mathfrak{a})$ .

Beachtet man nun, daß in der in S. I zugrunde gelegten Additionsformel

$$(1) \quad (\tau(u+h) + \tau(u) + \tau(h))(\tau(u) - \tau(h))^2 = \tau(u)^3 - A\tau(u) + B$$

die rechte Seite für  $u = h$  verschwindet, daß also das Polynom  $x^3 - Ax + B$  durch  $x - \tau(h)$  teilbar ist, so kann man diese Formel durch Division beider Seiten mit  $\tau(u) - \tau(h)$  in die folgende einfachere Gestalt bringen:

$$(1') \quad (\tau(u+h) + \tau(u) + \tau(h))(\tau(u) - \tau(h)) = \tau(u)^2 + \tau(u)\tau(h) + \tau(h)^2 - A,$$

oder

$$(1'') \quad (2\tau(h)^2 - A) + \tau(h)(\tau(u) + \tau(u+h)) = \tau(u)\tau(u+h).$$

Nach unseren Voraussetzungen  $\varphi(\mathfrak{m}) \geq 6$  und  $\Omega \neq \mathbb{P}(\sqrt{-1}), \mathbb{P}(\sqrt{-3})$  gibt es nun sicher drei zu  $\mathfrak{m}$  prime Zahlen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , die in verschiedenen Strahlklassen mod  $\mathfrak{m}$  liegen. In (1') bzw. (1'') setzen wir  $h = \omega\varrho$ ,  $u = \omega_i\varrho$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Wie in S. I sieht man dann leicht ein, daß die  $\tau(\omega_i\varrho | \mathfrak{a})$  und die  $\tau((\omega_i + \omega)\varrho | \mathfrak{a})$  verschiedene Strahlklasseninvarianten mod  $\mathfrak{m}$  sind. Ferner ist es unmöglich, daß die drei Zahlen

$$\sigma_i = \tau((\omega_i + \omega)\varrho | \mathfrak{a}) + \tau(\omega_i\varrho | \mathfrak{a})$$

sämtlich einander gleich ausfallen. Denn sonst sei  $\sigma$  ihr gemeinsamer Wert. Das Polynom zweiten Grades in  $x$ ,

$$(\sigma + \tau(\omega\varrho))(x - \tau(\omega\varrho)) - (x^2 + x\tau(\omega\varrho) + \tau(\omega\varrho)^2 - A),$$

hätte dann nach (1') die drei verschiedenen Wurzeln  $\tau(\omega_i\varrho | \mathfrak{a})$ .

Es sei also etwa  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Aus den nach (1'') gültigen Formeln

$$(2\tau(\omega\varrho)^2 - A) + \sigma_i \tau(\omega\varrho) = \tau(\omega_i\varrho) \tau((\omega_i + \omega)\varrho) \quad (i = 1, 2)$$

ergibt sich dann durch Subtraktion, daß  $\tau(\omega\varrho)$  in  $\Omega(\tau(\mathfrak{f}^*))$  liegt. Nach (1') und (1'') gehören mithin auch die Zahlen  $A, B$  zu  $\Omega(\tau(\mathfrak{f}^*))$ . Nach S. I, § 1 bzw. § 3 ist damit der Beweis erbracht.

*Beweis unter der Annahme (II)<sup>2)</sup>.*

Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz. Wenn  $\Omega \neq \mathbb{P}(\sqrt{-1}), \mathbb{P}(\sqrt{-3})$  und

$$(2) \quad \Psi(\mathfrak{m}) \geq 5,$$

so gibt es in  $\Omega$  sicher drei Zahlen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  von der Art, daß  $\omega_i$  und  $\omega_i + 1$  prim zu  $\mathfrak{m}$  sind und überdies die drei durch  $\omega_i$  und  $\omega_i + 1$  mod  $\mathfrak{m}$  bestimmten Paare von Strahlklassen mod  $\mathfrak{m}$ , die wir im folgenden mit

$$\{(\omega_i), (\omega_i + 1)\} \pmod{\mathfrak{m}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

bezeichnen, voneinander verschieden sind.

Dabei sollen zwei Paare  $\{\alpha, \beta\}$  und  $\{\gamma, \delta\}$  dann und nur dann als „gleich“ gelten, wenn  $\alpha = \gamma, \beta = \delta$  oder  $\alpha = \delta, \beta = \gamma$  ist.

<sup>2)</sup> Die folgende Beweisanordnung verdanke ich Herrn Iyanaga; mein ursprünglicher Beweis war komplizierter. Ich möchte Herrn Iyanaga auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für seine Verbesserungen aussprechen.

*Beweis.*  $\Psi(m)$  gibt, wie leicht ersichtlich, die Anzahl der mod<sup>+</sup>  $m$  inkongruenten Zahlen  $\omega$  von der Art an, daß  $\omega$  und  $\omega + 1$  beide zu  $m$  prim sind. Zwei Strahlklassenpaare mod  $m$ ,

$$\{(\omega), (\omega + 1)\} \text{ und } \{(\omega'), (\omega' + 1)\},$$

sind aber für  $m \neq 2$  — und das ist auf Grund der Voraussetzung (2) sicher der Fall — dann und nur dann gleich, wenn eine der beiden folgenden Kongruenzen stattfindet:

$$\begin{aligned}\omega' &\equiv \omega \pmod{m^+} \\ \omega' &\equiv -\omega - 1 \pmod{m^+}.\end{aligned}$$

Ist also  $\Psi(m) > 2 \cdot 2$ , d. h. gilt (2), so gibt es mehr als zwei Werte  $\omega$  derart, daß  $\{(\omega), (\omega + 1)\}$  verschiedene zu  $m$  prime Restklassenpaare mod<sup>+</sup>  $m$  darstellt; w. z. b. w.

Unser Beweis wird nun auf Grund der folgenden Additionsformel<sup>3)</sup> der  $\varphi$ -Funktion geführt:

$$(p_1 + p_2 + p_3)(4p_1p_2p_3 - g_3) = \left(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 + \frac{g^2}{4}\right)^2,$$

wobei

$$p_1 = \varphi(u), \quad p_2 = \varphi(v), \quad p_3 = \varphi(u + v).$$

Es sei  $\tau(f^*) = \tau(\varrho | a)$  eine Strahlklasseninvariante mod  $m$ . Rechnet man die eben angegebene Formel auf die Funktion  $\tau(u) = \tau(u | a)$  um, so findet man

$$(3) \quad 4(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)(\tau_1\tau_2\tau_3 + B) = (\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 + A)^2,$$

wobei

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau(u), \quad \tau_2 = \tau(v), \quad \tau_3 = \tau(u + v), \\ A &= 3j(a)(j(a) - 2^6 \cdot 3^3), \\ B &= 2j(a)(j(a) - 2^6 \cdot 3^3)^2\end{aligned}$$

gesetzt ist, oder auch

$$(3') \quad 4(\tau_1 + x)(\tau_1y + B) = (\tau_1x + y + A)^2,$$

wo

$$\tau_2 + \tau_3 = x, \quad \tau_2\tau_3 = y$$

gesetzt ist.

Denkt man sich nun in (3')  $\tau_1, A, B$  als Konstante,  $x, y$  als Variable, so stellt (3') eine Parabel in der  $x, y$ -Ebene dar, die nur dann ausartet, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \tau_1^2 & -\tau_1 & \tau_1A - 2B \\ -\tau_1 & 1 & A - 2\tau_1^2 \\ \tau_1A - 2B & A - 2\tau_1^2 & A^2 - 4\tau_1B \end{vmatrix} = -4(\tau_1^3 - A\tau_1 + B)^2$$

verschwindet.

Unter der Annahme (2) gibt es nun offenbar zwei Werte von  $\omega$  so, daß  $\tau(\omega\varrho | a)$  verschiedene Strahlklasseninvarianten mod  $m$  sind. Verschwindet  $D = D(u | a)$  für  $u = \omega\varrho$  mit diesen zwei Werten von  $\omega$ , so kann man die so entstehenden zwei Gleichungen als lineare inhomogene Gleichungen für die Zahlen  $A, B$  auffassen, und damit durch Auflösung  $A, B$  als Zahlen in  $\Omega(\tau(f^*))$  finden.

Da sich also der Beweis in diesem Fall mit unserem Schluß aus S. I durchführen läßt, nehmen wir weiterhin an, daß es ein  $\varrho$  mit  $D(\varrho | a) \neq 0$  gibt. Wir setzen dann in (3)  $u = \varrho$ ,  $v = \omega_i\varrho$ , wo die  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gemäß unserem Hilfssatz bestimmt sind.

<sup>3)</sup> Siehe etwa Hurwitz-Courant, Funktionentheorie (Berlin 1925), S. 172.

Setzen wir ferner

$$\begin{aligned}\tau(\omega_i \varrho | \alpha) + \tau((1 + \omega_i) \varrho | \alpha) &= x_i \\ \tau(\omega_i \varrho | \alpha) \cdot \tau((1 + \omega_i) \varrho | \alpha) &= y_i,\end{aligned}$$

so sind ersichtlich

$$(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

drei verschiedene Punkte auf der nicht ausgearteten Parabel (3') mit  $\tau_1 = \tau(\varrho | \alpha)$ . Diese Punkte können daher nicht auf einer Geraden liegen, d. h. es ist die Determinante

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die drei aus (3') entspringenden Formeln

$$4(\tau_1 + x_i)(\tau_1 y_i + B) = (\tau_1 x_i + y_i + A)^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind nun wieder drei lineare inhomogene Gleichungen für die Zahlen

$$A^2, \quad 2A, \quad -4B$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau_1 x_1 + y_1 & x_1 + \tau_1 \\ 1 & \tau_1 x_2 + y_2 & x_2 + \tau_1 \\ 1 & \tau_1 x_3 + y_3 & x_3 + \tau_1 \end{vmatrix} = -d \neq 0.$$

Unser Beweis ist also auch in diesem Fall nach dem Schema aus S. I durchführbar.

Eingegangen 8. Juli 1935.