Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper II. Automorphismen und Meromorphismen. Das Additionstheorem.

Von *Helmut Hasse* in Göttingen.

Wie in Teil I dieser Arbeit [1]) sei durchweg K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht 1 über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p ($= 0$ oder Primzahl).

§ 1. Die Automorphismengruppe von K.

1. Unter einem *Automorphismus* von K verstehen wir einen Isomorphismus σ von K auf sich, bei dem der Konstantenkörper k elementweise auf sich abgebildet wird. Wir schreiben $z\sigma$, $\mathfrak{p}\sigma$ für die Bilder eines Elementes z aus K und eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ von K bei σ.

Ein Automorphismus σ von K ist durch die Bilder $\mathfrak{p}\sigma$ aller Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K eindeutig festgelegt.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß ein Automorphismus von K, der alle Primdivisoren von K festläßt, der identische ist. Läßt nun σ alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K fest, so führt σ jedes Element z aus K in ein konstantes Multiplum über:

$$z\sigma = c_z z, \quad c_z \text{ in } k.$$

Aus $(az)\sigma = a(z\sigma)$ und $(z_1 + z_2)\sigma = z_1\sigma + z_2\sigma$ sieht man sofort:

$$c_{az} = c_z \quad \text{für } a \text{ in } k,$$

$$c_{z_1+z_2} = c_{z_1} = c_{z_2} \text{ für über } k \text{ linear-unabhängige } z_1, z_2.$$

Daraus folgt, daß alle Faktoren c_z einander gleich sind; wegen $c_1 = 1$ ist also $\sigma = 1$.

Ganz entsprechend ergibt sich die für später wichtige Tatsache:

Läßt ein Automorphismus σ von K alle Primdivisoren eines Teilkörpers K_0 von K fest, so läßt σ alle Elemente aus K_0 fest, ist also ein Automorphismus von K/K_0.

2. Nach dem Riemann-Rochschen Satz sind die Divisorenklassen nullten Grades von K eindeutig durch die Quotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{o}}$ repräsentiert, wo $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von K durchläuft und $\mathfrak{o}$ irgendein fester Primdivisor von K ist. Es ist für alles Folgende zweckmäßig, für die Multiplikation der Klassen bei dieser Repräsentation die additive Schreibweise einzuführen:

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 \quad \text{für} \quad \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{o}} \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{o}} \sim \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}}.$$

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung, Journ. f. Math. 175 (1936); im folgenden zitiert als H I.

Dann stellt sich die Divisorenklassengruppe nullten Grades D von K als additive Gruppe D_0 mit dem Nullelement $\mathfrak{o}$ dar.

Nach dem zuvor Bewiesenen ist ein Automorphismus σ von K durch Angabe des Bildes $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\sigma$ und des durch ihn bewirkten Automorphismus von D festgelegt. In der Darstellung D_0 schreibt sich das so:

$$\mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}^* + \mathfrak{a},$$

wo $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ ein Automorphismus von D_0 ist; durch ihn und $\mathfrak{a}$ ist σ festgelegt. Es entsteht die Frage, für welche Automorphismen $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ der Gruppe D_0 und welche Primdivisoren $\mathfrak{a}$ die Substitution $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^* + \mathfrak{a}$ wirklich aus einem (dann eindeutig bestimmten) Automorphismus σ von K entspringt.

3. Wir zeigen zunächst, daß die *Spiegelungen*

$$\mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

von D_0 für beliebiges $\mathfrak{a}$ wirklich durch Automorphismen $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ von K geliefert werden.

Nach dem Riemann-Rochschen Satz existiert nämlich ein nicht-konstantes ganzes Multiplum z von $\frac{1}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}}$ in K (eindeutig bis auf ganze Lineartransformationen). Durch $\mathfrak{o}, \mathfrak{a}$ wird dann (eindeutig) der Teilkörper $k(z)$ vom Geschlecht 0 festgelegt. $K/k(z)$ ist vom Grade 2 und separabel [2]), besitzt also einen Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ der Ordnung 2. Dieser vertauscht $\mathfrak{o}, \mathfrak{a}$ und ebenso jedes weitere Paar bzgl. $k(z)$ konjugierter Primdivisoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$. Für ein solches Paar ist aber

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}} \cong z - c, \qquad c \text{ in } k,$$

also

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}} \sim 1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}.$$

Die Gesamtheit der Spiegelungen $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ ist von der Wahl von $\mathfrak{o}$ unabhängig, denn es gilt ersichtlich die Regel:

$$\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \text{ dann (und nur dann), wenn } \mathfrak{q} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{a}, \text{ d. h. } \mathfrak{o}\mathfrak{a} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

Die aus den $\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{S}$ ist also eine Invariante von K, und daher ein Normalteiler in der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Automorphismen von K.

4. Die aus den Spiegelungen erzeugte Gruppe $\mathfrak{S}$ läßt sich aus der speziellen Spiegelung

$$\sigma_0 = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\sigma_0 = -\mathfrak{p}$$

und den Automorphismen

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_0\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

erzeugen. Auch die *Translationen* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ *von D_0 für beliebiges $\mathfrak{a}$ werden also wirklich durch Automorphismen $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ von K geliefert.* Für sie gilt die Regel:

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \text{ dann (und nur dann), wenn } \mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}, \text{ d. h. } \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} \sim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}.$$

Die von ihnen gebildete abelsche Gruppe $\mathfrak{T}$ ist hiernach wieder von der Wahl von $\mathfrak{o}$ unabhängig, also eine Invariante von K, und daher ein Normalteiler nicht nur in $\mathfrak{S}$, sondern auch in $\mathfrak{A}$.

---

[2]) Daß das auch im Falle $p = 2$ stimmt, ergibt sich aus der folgenden allgemeinen Tatsache: Über einem algebraischen Funktionenkörper K mit vollkommenen Konstantenkörper k der Primzahlcharakteristik p gibt es nur eine einzige inseparable Erweiterung vom Grade p, nämlich den Körper $K^{\frac{1}{p}}$; dieser ist zu K absolut (bzgl. des Primkörpers) isomorph, also vom gleichen Geschlecht wie K.

Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist auf Grund der Zuordnung

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} \longleftrightarrow \mathfrak{a}$$

zur Gruppe D_0 (und damit zur Divisorenklassengruppe nullten Grades D) isomorph.

$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ bewirkt in D die Multiplikation mit der Klasse von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{o}}$.

Aus der hierdurch bestimmten Struktur von $\mathfrak{T}$ ergibt sich die Struktur von $\mathfrak{S}$ auf Grund der Relationen:

$$\sigma_{\mathfrak{o}}^2 = 1, \qquad \sigma_{\mathfrak{o}}\,\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\sigma_{\mathfrak{o}};$$

das $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{T}$ aus erzeugende Element $\sigma_{\mathfrak{o}}$ transformiert also die Elemente von $\mathfrak{T}$ in ihre Entgegengesetzten.

5.[3]) Über die Struktur der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Automorphismen von K ergeben sich aus dem Vorhergehenden ohne weiteres die folgenden Aussagen:

Jeder Automorphismus σ von K besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\sigma = \zeta\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}\zeta + \mathfrak{a}$$

in einen $\mathfrak{o}$ festlassenden Automorphismus ζ und eine Translation $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$. Dabei ist $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}\zeta$ der oben mit $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ bezeichnete Automorphismus von D_0; jetzt steht fest, daß er durch einen Automorphismus ζ von K geliefert wird.

Die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ wird hiernach eindeutig repräsentiert durch die $\mathfrak{o}$ festlassenden Automorphismen ζ. Diese bilden selbst eine Gruppe $\mathfrak{A}_0$. Ist ihre Struktur bekannt, so ergibt sich die Struktur von $\mathfrak{A}$ aus der Transformationsregel

$$\zeta^{-1}\,\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\zeta = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}\zeta},$$

in der rechts gerade die durch $\mathfrak{A}_0$ gelieferten Automorphismen von D_0 auftreten (durch den Isomorphismus $\mathfrak{a} \to \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ aus der Gruppe D_0 nach der Gruppe $\mathfrak{T}$ verlagert).

Über die Struktur von $\mathfrak{A}_0$ können aus der isomorphen Darstellung als Automorphismengruppe von D_0 Aussagen gewonnen werden.

Zunächst sind die Automorphismen ζ aus $\mathfrak{A}_0$ jedenfalls mit dem speziellen solchen Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{o}}$ vertauschbar, da dieser in D_0 den Übergang zum Entgegengesetzten bewirkt.

Ferner sind die ζ auch Automorphismen für jede charakteristische Untergruppe H von D_0, also insbesondere für die Untergruppen H_n der $\mathfrak{p}$ mit $n\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ in D_0, deren Struktur in H I bestimmt wurde.

Um das auszunutzen, beweisen wir zunächst:

Läßt ein von $1, \sigma_{\mathfrak{o}}$ verschiedener Automorphismus ζ aus $\mathfrak{A}_0$ außer $\mathfrak{o}$ noch zwei verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ fest, so ist $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o}$.

ζ läßt nämlich mit $\mathfrak{o}$ auch den Invariantenkörper $k(x)$ von $\sigma_{\mathfrak{o}}$ als Ganzes fest, bewirkt also einen Automorphismus von $k(x)$, und zwar nach Voraussetzung nicht den identischen. Mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ bleiben auch die bzgl. $k(x)$ konjugierten $\bar{\mathfrak{p}}_1 = -\mathfrak{p}_1$, $\bar{\mathfrak{p}}_2 = -\mathfrak{p}_2$ bei ζ fest. Als Automorphismus von $k(x)$ läßt dann ζ neben dem Primdivisor $\mathfrak{o}^2$ noch die beiden von $\mathfrak{o}^2$ verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}_1$ und $\mathfrak{p}_2\bar{\mathfrak{p}}_2$ von $k(x)$ fest. Nun hat aber bekanntlich ein Automorphismus $\neq 1$ von $k(x)$, als (gebrochene) lineare Substitution von x, höchstens zwei verschiedene Fixpunkte. Daraus folgt $\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}_1 = \mathfrak{p}_2\bar{\mathfrak{p}}_2$, wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ also $\mathfrak{p}_1 = \bar{\mathfrak{p}}_2$, $\mathfrak{p}_2 = \bar{\mathfrak{p}}_1$ oder also $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{o}$.

---

[3]) Die nachstehenden Ausführungen sind für das Folgende entbehrlich. Die in Rede stehenden Tatsachen können aus dem in Teil III bewiesenen Satz über die Struktur des Meromorphismenrings von K entnommen werden. Es ist aber vielleicht doch von Interesse zu sehen, wie weit man die Struktur der Automorphismengruppe schon hier bestimmen kann.

Es sei nun H eine charakteristische Untergruppe von D_0, die nicht von der Ordnung 1, 2 oder 3 ist. Dann enthält H zwei von $\mathfrak{o}$ und untereinander verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, für die auch $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 \neq \mathfrak{o}$ ist. σ_0 bewirkt den identischen Automorphismus in H oder nicht, je nachdem H nur aus Elementen der Ordnung 2 besteht oder nicht. Aus dem bewiesenen Satz ergibt sich daher, *daß* $\mathfrak{A}_0/\{\sigma_0\}$ *oder* $\mathfrak{A}_0$ *selbst sich isomorph als Automorphismengruppe von* H *darstellt, je nachdem* H *nur aus Elementen der Ordnung 2 besteht oder nicht.*

Wie in H I bewiesen wurde, ist nun speziell H_n für jedes $n \not\equiv 0 \bmod. p$ von der endlichen Ordnung n^2, besitzt also nur endlich viele Automorphismen. Daraus ergibt sich jedenfalls:

Die Gruppe $\mathfrak{A}_0$ *ist endlich; es gibt also nur endlich viele Automorphismen von* K, *die einen gegebenen Primdivisor* $\mathfrak{o}$ *von* K *festlassen.*

Genauere Aussagen über $\mathfrak{A}_0$ ergeben sich, wenn man die in H I genau bestimmte Struktur von H_n ausnutzt: H_n ist abelsch vom Typus (n, n) für jedes $n \not\equiv 0 \bmod. p$, die Automorphismengruppe von H_n ist also die Gruppe aller zweireihigen regulären Matrizen mod. n. Daraus findet man durch Ausnutzung von $n = 2, 3$ leicht:

Für $p \neq 2$ ist $\mathfrak{A}_0/\{\sigma_0\}$ zu einer Untergruppe der Dreiecksgruppe (Ordnung 6) isomorph.

Für $p \neq 3$ ist $\mathfrak{A}_0$ zu einer Untergruppe der erweiterten Oktaedergruppe (Ordnung 48), $\mathfrak{A}_0/\{\sigma_0\}$ zu einer Untergruppe der Oktaedergruppe (Ordnung 24) isomorph.

Auf die genaue Bestimmung der Struktur von $\mathfrak{A}_0$ gehe ich hier nicht ein.

§ 2. Die Meromorphismen von *K*.

1. Unter einem *eigentlichen Meromorphismus* von K verstehen wir einen Isomorphismus λ von K auf einen Teilkörper $K\lambda$, bei dem der Konstantenkörper k elementweise auf sich abgebildet wird. Wir schreiben $z\lambda$, $\mathfrak{p}\lambda$ für die Bilder eines Elementes z aus K und eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ von K bei λ.

Unter der *Norm* von λ verstehen wir den Körpergrad von $K/K\lambda$:

$$N(\lambda) = [K : K\lambda].$$

Neben den eigentlichen Meromorphismen von K, unter denen speziell die Automorphismen σ von K vorkommen — charakterisiert durch $N(\sigma) = 1$ —, führen wir noch als *uneigentliche Meromorphismen* λ die Homomorphismen von K auf den Konstantenkörper k ein. Diese λ entsprechen umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, auf Grund der Relation

$$z\lambda = z\mathfrak{p},$$

wo $z\mathfrak{p}$ den konstanten Repräsentanten der Restklasse von z mod. $\mathfrak{p}$ bezeichnet; falls z für $\mathfrak{p}$ gebrochen ist, hat man formal $z\mathfrak{p} = \infty$ zu rechnen (Jungscher Begriff des Primdivisors!). Wir schreiben $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{p}$ für diese Zuordnung.

Als Norm eines solchen uneigentlichen Meromorphismus rechnen wir

$$N(\lambda) = 0.$$

2. Das *Produkt* zweier Meromorphismen λ, λ' definieren wir durch Nacheinanderausführung:

$$z(\lambda\lambda') = (z\lambda)\lambda'.$$

Hierdurch wird $\lambda\lambda'$ eindeutig als ein Meromorphismus von K festgelegt, und zwar als ein eigentlicher oder uneigentlicher, je nachdem die Meromorphismen λ, λ' beide eigentlich sind oder mindestens einer von ihnen uneigentlich ist.

Ist λ uneigentlich, so ist $\lambda\lambda' = \lambda$, weil k bei λ' elementweise festbleibt.

Ist λ' uneigentlich, $\lambda' \longleftrightarrow \mathfrak{p}$, so bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Primdivisor, der $\lambda\lambda'$ zugeordnet ist, mit $\lambda\mathfrak{p}$. Diese für alles Folgende grundlegende Bildung $\lambda\mathfrak{p}$ ist also implizit durch

$$\lambda\lambda' \longleftrightarrow \lambda\mathfrak{p}, \quad \text{wenn} \quad \lambda' \longleftrightarrow \mathfrak{p},$$

d. h. durch

$$z(\lambda\mathfrak{p}) = (z\lambda)\mathfrak{p}$$

definiert.

Explizit bestimmt sich $\lambda\mathfrak{p}$ folgendermaßen:

a) Wenn λ eigentlich ist, so ist

$$\lambda\mathfrak{p} = (N_\lambda \mathfrak{p})\lambda^{-1},$$

wo N_λ die Norm für $K/K\lambda$ bezeichnet. Dann ist nämlich $N_\lambda\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$ enthaltende Primdivisor von $K\lambda$, und es wird behauptet, daß $\lambda\mathfrak{p}$ aus diesem durch rückwärtige Ausführung des Isomorphismus λ entsteht. In der Tat, sei

$$z\lambda \equiv c \text{ mod. } \mathfrak{p}, \quad c \text{ in } k,$$

dann folgt auch

$$z\lambda \equiv c \text{ mod. } N_\lambda\mathfrak{p},$$

weil $z\lambda$ in $K\lambda$ liegt, und daraus durch λ^{-1} weiter

$$z \equiv c \text{ mod. } (N_\lambda\mathfrak{p})\lambda^{-1},$$

weil c bei λ^{-1} festbleibt, zusammengenommen also

$$(z\lambda)\mathfrak{p} = z(N_\lambda\mathfrak{p})\lambda^{-1}.$$

b) Wenn λ uneigentlich, $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ ist, so ist

$$\lambda\mathfrak{p} = \mathfrak{a};$$

denn dann ist ja, wie zuvor festgestellt, $\lambda\lambda' = \lambda$, was hier

$$(z\lambda)\mathfrak{p} = (z\mathfrak{a})\mathfrak{p} = z\mathfrak{a}$$

besagt.

Für einen Automorphismus $\lambda = \sigma$ gilt nach obigem

$$\sigma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\sigma^{-1},$$

also z. B.

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{p}}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\tau_{\mathfrak{p},\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}.$$

Auf Grund der Definition durch Nacheinanderausführung ist das Meromorphismenprodukt *assoziativ*:

$$(\lambda\lambda')\lambda'' = \lambda(\lambda'\lambda'').$$

Darin steckt insbesondere die Regel

$$(\lambda\lambda')\mathfrak{p} = \lambda(\lambda'\mathfrak{p}).$$

Ferner gilt die *Normenproduktregel*

$$N(\lambda\lambda') = N(\lambda)N(\lambda').$$

Nach dem schon Bemerkten sind nämlich beide Seiten 0, wenn λ oder λ' uneigentlich ist; es genügt also, diese Regel für zwei eigentliche Meromorphismen λ, λ' zu bestätigen. Da folgt sie ohne weiteres aus

$$K(\lambda\lambda') = (K\lambda)\lambda';$$

denn danach hat man

$$K \geqq K\lambda' \geqq K\lambda\lambda'$$

und

$$[K\lambda' : K\lambda\lambda'] = [K : K\lambda],$$

weil $K\lambda'/K\lambda\lambda'$ aus $K/K\lambda$ durch Anwendung des Isomorphismus λ' entsteht.

3. Ein Meromorphismus μ heiße *normiert* in bezug auf einen festen Primdivisor $\mathfrak{o}$, wenn

$$\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$$

ist. Für eigentliches μ bedeutet das $(N_\mu \mathfrak{o})\mu^{-1} = \mathfrak{o}$ oder also

$$N_\mu \mathfrak{o} = \mathfrak{o}\mu,$$

d. h. der $\mathfrak{o}$ enthaltende Primdivisor von $K\mu$ stimmt mit dem Bild von $\mathfrak{o}$ bei μ überein. Für uneigentliches μ bedeutet es

$$\mu \longleftrightarrow \mathfrak{o};$$

denn für $\mu \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ gilt ja durchweg $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, also speziell auch $\mu\mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, so daß μ dann und nur dann normiert ist, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist.

Für zwei normierte Meromorphismen μ, μ' folgt aus dem Assoziativgesetz, daß auch

$$(\mu\mu')\mathfrak{o} = \mu(\mu'\mathfrak{o}) = \mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$$

ist. Das Produkt normierter Meromorphismen ist also wieder normiert, die normierten Meromorphismen bilden ein *multiplikativ abgeschlossenes System* M.

Der uneigentliche normierte Meromorphismus $\mu_0 \longleftrightarrow \mathfrak{o}$ ist *Nullelement* von M. Denn man hat einerseits durchweg $\mu_0\mu = \mu_0$, andererseits durchweg $\mu\mu_0 \longleftrightarrow \mu\mathfrak{o} = \mathfrak{o} \longleftrightarrow \mu_0$, d. h. $\mu\mu_0 = \mu_0$. Wir schreiben daher einfach $\mu_0 = 0$.

Wegen des Normenproduktsatzes besitzt das System M *keine echten Nullteiler.*

Jeder Meromorphismus λ besitzt eine *eindeutige Zerlegung*

$$\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\mu$$

in einen Translationsautomorphismus $\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}$ und einen normierten Meromorphismus μ. In der Tat, $\mu = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\lambda$ ist dann und nur dann normiert, wenn

$$\mathfrak{o} = \mu\mathfrak{o} = (\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\lambda)\mathfrak{o} = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,(\lambda\mathfrak{o}) = (\lambda\mathfrak{o})\,\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}} = \lambda\mathfrak{o} - \mathfrak{a}$$

ist, wenn also der verfügbare Primdivisor $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{o}$ gewählt wird. Für uneigentliches $\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{a}$ ist gerade $\mathfrak{a}$ der zur Normierung führende Primdivisor, denn man hat dafür

$$\mu = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,\lambda \longleftrightarrow \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}.$$

$K\lambda$ und somit N_λ und $N(\lambda)$ hängen nur von dem normierten Bestandteil μ von λ ab.

Die eindeutige Zerlegung $\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\,\mu$ entspricht dem in § 1 auftretenden Spezialfall $\sigma = \zeta\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$, also $\sigma^{-1} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\zeta^{-1}$ für Automorphismen. Das System M der auf $\mathfrak{o}$ normierten μ umfaßt die Gruppe $\mathfrak{A}_\mathfrak{o}$ der $\mathfrak{o}$ festlassenden ζ.

4. Für einen normierten Meromorphismus μ gilt die Regel

$$\mu(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) = \mu\mathfrak{p}_1 + \mu\mathfrak{p}_2,$$

d. h. die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ stellt einen *Homomorphismus der Gruppe D_0 in sich* dar.

Für uneigentliches μ, also $\mu = 0$, ist das der Nullhomomorphismus; denn aus $0 \longleftrightarrow \mathfrak{o}$ folgt $0\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für jedes $\mathfrak{p}$.

Für eigentliches μ folgt die Regel aus der Zerlegung der Abbildung gemäß $\mu\mathfrak{p} = (N_\mu\mathfrak{p})\mu^{-1}$ in die beiden durch N_μ und μ^{-1} gelieferten Abbildungen. Aus der Relation

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2}{\mathfrak{o}\mathfrak{p}_3} \cong z \text{ in } K,$$

ergibt sich nämlich durch N_μ die Relation

$$\frac{N_\mu \mathfrak{p}_1 \cdot N_\mu \mathfrak{p}_2}{N_\mu \mathfrak{o} \cdot N_\mu \mathfrak{p}_3} \cong N_\mu z \text{ in } K\mu,$$

also wegen $N_\mu \mathfrak{p}_i = (\mu \mathfrak{p}_i)\mu$ und der Normierungsbedingung $N_\mu \mathfrak{o} = \mathfrak{o}\mu$

$$\frac{(\mu\mathfrak{p}_1)\mu \cdot (\mu\mathfrak{p}_2)\mu}{\mathfrak{o}\mu \cdot (\mu\mathfrak{p}_3)\mu} \cong N_\mu z, \quad \text{d. h.} \quad (\mu\mathfrak{p}_1)\mu + (\mu\mathfrak{p}_2)\mu = (\mu\mathfrak{p}_3)\mu$$

in der Gruppe $D_{0\mu}$ von $K\mu$, und daraus durch μ^{-1} weiter

$$\mu\mathfrak{p}_1 + \mu\mathfrak{p}_2 = \mu\mathfrak{p}_3$$

in der Gruppe D_0 von K.

Durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von K, so durchläuft $N_\mu \mathfrak{p}$ alle Primdivisoren von $K\mu$, also $(N_\mu \mathfrak{p})\mu^{-1} = \mu\mathfrak{p}$ wieder alle Primdivisoren von K. Der durch eigentliches normiertes μ bewirkte Homomorphismus $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ von D_0 in sich erfolgt also sogar auf die volle Gruppe D_0.

Ist λ ein beliebiger Meromorphismus und

$$\lambda = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\mu$$

seine eindeutige Zerlegung, so hat man

$$\lambda\mathfrak{p} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}(\mu\mathfrak{p}) = (\mu\mathfrak{p})\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}.$$

Die durch $\mathfrak{p} \to \lambda\mathfrak{p}$ gelieferte Abbildung der Gruppe D_0 in sich stellt sich also, unter Berücksichtigung der Homomorphie-Eigenschaft von $\mu\mathfrak{p}$, als eine *lineare Substitution* dar, die sich dann und nur dann auf das konstante Glied $\mathfrak{a}$ reduziert, wenn λ uneigentlich ist, und dann und nur dann auf das lineare Glied $\mu\mathfrak{p}$, wenn λ normiert ist.

Dem Meromorphismenprodukt $\lambda\lambda'$ entspricht dabei die Zusammensetzung der linearen Substitutionen nach dem Schema

$$\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$
$$\lambda'\mathfrak{p} = \mu'\mathfrak{p} + \mathfrak{a}'$$
$$\lambda\lambda'\mathfrak{p} = \mu(\mu'\mathfrak{p} + \mathfrak{a}') + \mathfrak{a} = \mu\mu'\mathfrak{p} + (\mu\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}).$$

Die lineare Substitution $\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ entspricht dem in § 1 auftretenden Spezialfall $\mathfrak{p}\sigma = \mathfrak{p}\zeta + \mathfrak{a}$ für Automorphismen, wenn man dafür gemäß der obigen Bemerkung $\sigma^{-1}\mathfrak{p} = \zeta^{-1}\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ schreibt.

5. In Verallgemeinerung der in § 1 bewiesenen Festlegung der Automorphismen durch die ihnen zugeordneten linearen Substitutionen in D_0 beweisen wir hier:

Ein Meromorphismus λ von K ist durch Angabe der $\lambda\mathfrak{p}$ für unendlich viele $\mathfrak{p}$ eindeutig festgelegt.

Seien nämlich λ_1, λ_2 zwei Meromorphismen von K mit

$$\lambda_1\mathfrak{p} = \lambda_2\mathfrak{p}$$

für unendlich viele $\mathfrak{p}$. Dann hat man für jedes z aus K

$$z(\lambda_1\mathfrak{p}) = z(\lambda_2\mathfrak{p}),$$

also

$$(z\lambda_1)\mathfrak{p} = (z\lambda_2)\mathfrak{p}.$$

Daher ist

$$(z\lambda_1 - z\lambda_2)\mathfrak{p} = 0$$

jedenfalls für alle diejenigen unserer $\mathfrak{p}$, die von den endlich vielen Nennerprimteilern von $z\lambda_1, z\lambda_2$ verschieden sind. Alle diese unendlich vielen $\mathfrak{p}$ sind also Zählerprimteiler von $z\lambda_1 - z\lambda_2$, und das geht nur für

$$z\lambda_1 - z\lambda_2 = 0.$$

Es folgt also

$$z\lambda_1 = z\lambda_2 \quad \text{für jedes } z \text{ aus } K,$$

d. h.

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Wir haben damit insbesondere die in § 1 vorangestellte Tatsache über Automorphismen auf etwas andere Art bewiesen; auch die dort anschließend angegebene Tatsache für Teilkörper kann nach diesem modifizierten Schema bewiesen werden.

6. Wir wollen noch die *Struktur von* $K/K\mu$ für einen eigentlichen Meromorphismus μ untersuchen, den wir dabei ohne Einschränkung als normiert annehmen dürfen.

Die beim Homomorphismus $\mathfrak{p} \to \mu\mathfrak{p}$ von D_0 in $\mathfrak{o}$ abgebildeten Primdivisoren von K bilden eine Untergruppe H_μ von D_0. Es sind das die Primdivisoren $\mathfrak{o}^{(i)}$ mit

$$\mu\mathfrak{o}^{(i)} = \mathfrak{o}, \quad \text{oder also} \quad N_\mu \mathfrak{o}^{(i)} = \mathfrak{o}\mu,$$

somit gerade die Primteiler in K des Primdivisors $\mathfrak{o}\mu$ von $K\mu$. Für irgendeinen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K bilden dann die Primdivisoren $\mathfrak{p}^{(i)}$ mit

$$\mu\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}, \quad \text{oder also} \quad N_\mu \mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}\mu,$$

d. h. die Primteiler in K des Primdivisors $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu$, eine Nebengruppe nach H_μ in D_0:

$$\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}^{(0)} + \mathfrak{o}^{(i)}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{o}^{(0)} = \mathfrak{o}.$$

Daß H_μ von endlicher Ordnung m ist, ist natürlich auch schon auf Grund der zuvor bewiesenen Festlegung von μ durch die $\mu\mathfrak{p}$ klar.

Für die endlich-algebraische Erweiterung $K/K\mu$ vom Grade $N(\mu)$ existiert nun ein eindeutig bestimmter Teiler p^e von $N(\mu)$ (für $p = 0$ der Teiler $p^0 = 1$) derart, daß

$$K \geqq K^{p^e} \geqq K\mu$$

und

$$K^{p^e}/K\mu \quad \text{separabel}$$

ist [4]). Wir nennen

$$J(\mu) = p^e$$

den *Inseparabilitätsexponenten* von μ und

$$N_0(\mu) = [K^{p^e} : K\mu]$$

die *reduzierte Norm* von μ, und haben dann die Zerlegung

$$N(\mu) = J(\mu) N_0(\mu).$$

Da $K\mu$ zu K isomorph und K^{p^e} zu K absolut-isomorph ist, haben $K\mu$ und K^{p^e} beide das Geschlecht 1. Aus der Formel für das Relativgeschlecht [5]) folgt daher, daß

$$K^{p^e}/K\mu \quad \text{unverzweigt}$$

---

[4]) Siehe dazu die obige Fußnote 2.

[5]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. Math. **172** (1934), 43. Ganz analog wie im dortigen Spezialfall beweist man allgemein: Sind K, K_0 algebraische Funktionenkörper über demselben vollkommenen Konstantenkörper k, mit den Geschlechtern g, g_0, ist ferner $K \geqq K_0$ und $n = [K : K_0]$, sowie d der Grad der Differente von K/K_0, so gilt:

$$g = ng_0 + \gamma,$$

$$\gamma = \frac{d}{2} - (n - 1) \quad \text{(Relativgeschlecht von } K/K_0\text{)}.$$

ist. Daraus ergibt sich für die Primzerlegung für $K/K\mu$ das Gesetz

$$\mathfrak{p}\mu = \Big(\prod_{i=0}^{m-1} \mathfrak{p}^{(i)}\Big)^{p^e}, \qquad m = N_0(\mu), \qquad p^e = J(\mu),$$

wo die $\mathfrak{p}^{(i)}$ jeweils eine Nebengruppe nach H_μ in D_0 durchlaufen. Insbesondere haben wir daher:

Die reduzierte Norm $N_0(\mu)$ ist gleich der Ordnung von H_μ, also gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung $\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ in der Gruppe D_0.

Ferner ergibt sich hieraus, daß auch die beiden Komponenten $J(\mu)$ und $N_0(\mu)$ von $N(\mu)$ multiplikativ sind:

$$J(\mu\mu') = J(\mu)\,J(\mu'), \qquad N_0(\mu\mu') = N_0(\mu)\,N_0(\mu').$$

Dies stimmt auch für μ oder $\mu' = 0$, wenn man die formale Festsetzung $N(0) = 0$ durch die formalen Festsetzungen $J(0) = 0$ und $N_0(0) = 0$ ergänzt.

Auf Grund des in § 1 besprochenen Isomorphismus $\mathfrak{a} \longleftrightarrow \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ zwischen D_0 und der Translationsautomorphismengruppe $\mathfrak{T}$ entspricht der Untergruppe H_μ von D_0 eine Untergruppe $\mathfrak{G}_\mu$ von $\mathfrak{T}$ bestehend aus den Translationsautomorphismen $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}^{(i)}}$. Bei diesen Automorphismen bleiben alle Primdivisoren $\mathfrak{p}\mu$ von $K\mu$ fest, denn ihre Primfaktoren $\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{p}^{(0)} + \mathfrak{o}^{(i)}$ werden nur permutiert; wie in § 1 festgestellt, bleibt daher der Körper $K\mu$ elementweise fest. Damit sind für $K/K\mu$ ebenso viele verschiedene Automorphismen festgestellt, wie der reduzierte Grad m beträgt. Daher gilt:

$K/K\mu$ ist galoissch mit der zu H_μ isomorphen abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ als reduzierter Galoisgruppe.

Bekanntlich kann man $K/K\mu$ auch so aufbauen:

$$K \geqq (K\mu)^{p^{-e}} \geqq K\mu, \qquad K/(K\mu)^{p^{-e}} \text{ separabel.}$$

Dabei ist dann auch wieder $K/K(\mu)^{p^{-e}}$ unverzweigt.

§ 3. Das Additionstheorem für die Meromorphismen von *K*.

1. Sei $\mathfrak{o}$ ein fester Primdivisor von K. Nach dem Riemann-Rochschen Satz existiert eine k-Basis $1, x, y$ der ganzen Multipla von $\dfrac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in K derart, daß x, y die (genauen) Nenner $\mathfrak{o}^2, \mathfrak{o}^3$ haben. Es bilden dann für jedes $n \geqq 0$ die Potenzprodukte

$$x^i y^j \text{ mit } 0 \leqq i, \quad 0 \leqq j \leqq 1, \quad 2i + 3j \leqq n$$

eine Basis der ganzen Multipla von $\dfrac{1}{\mathfrak{o}^n}$ in K.

Daraus ergibt sich sofort:

$K/k(x)$ ist vom Grade 2 und separabel;

$K = k(x, y)$ mit einer irreduziblen Grundgleichung $f(x, y) = 0$ von den Graden 3, 2 in x, y;

$J_\mathfrak{o} = k[x, y] = k[x] + k[x]y = J_x$,

d. h. der Integritätsbereich $J_\mathfrak{o}$ der höchstens für $\mathfrak{o}$ gebrochenen Elemente aus K fällt mit dem Integritätsbereich J_x der in bezug auf $k[x]$ ganz-algebraischen Elemente aus K zusammen, stellt sich als der Polynombereich in x, y über k dar und hat über $k[x]$ die Basis $1, y$.

Wir arbeiten im folgenden mit einer festen Basis $1, x, y$ und der zugehörigen Grundgleichung $f(x, y) = 0$. Wir nennen das eine *normierte Erzeugung* von K. Unsere Feststellungen werden aber durchweg invariant gegenüber den linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_0 &= a_{00} \\ x_1 &= a_{10} + a_{11} x \qquad\qquad (a_{00} a_{11} a_{22} \neq 0) \\ x_2 &= a_{20} + a_{21} x + a_{22} y \end{aligned}$$

sein, die die feste Normalbasis $1, x, y$ der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in irgendeine andere Normalbasis x_0, x_1, x_2 dieser ganzen Multipla überführen.

Auf Grund der Translationsautomorphismen $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$ ist ferner auch die Auszeichnung von $\mathfrak{o}$ unwesentlich.

Jedem Primdivisor $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ entspricht eindeutig eine konstante Lösung der Grundgleichung, nämlich die Lösung $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p})$.

Hiervon gilt auch die Umkehrung:

Jeder konstanten Lösung (a, b) der Grundgleichung entspricht eindeutig ein Primdivisor $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ derart, daß $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$ ist.

Durch $(x, y) \rightarrow (a, b)$ wird nämlich ein Homomorphismus des Integritätsbereichs $k[x, y]$ auf den Körper k festgelegt. Die dabei annullierten Elemente bilden ein Prim ideal $[\mathfrak{p}]$ von $k[x, y]$. Wegen $k[x, y] = J_x = J_{\mathfrak{o}}$ entsprechen aber bekanntlich die Primideale $[\mathfrak{p}]$ von J_x umkehrbar eindeutig den Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ von K derart, daß $[\mathfrak{p}]$ die Gesamtheit der Elemente $\equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}$ aus $k[x, y]$ ist. Somit existiert ein und nur ein $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ mit $(x\mathfrak{p}, y\mathfrak{p}) = (a, b)$.

Dem Primdivisor $\mathfrak{o}$ hätte man, entsprechend der früheren formalen Festsetzung $z\mathfrak{p} = \infty$, falls z gebrochen für $\mathfrak{p}$, die uneigentliche Lösung

$$(x\mathfrak{o}, y\mathfrak{o}) = (\infty, \infty)$$

zuzuordnen. Wir werden das aber gar nicht brauchen.

2. Die Additionsrelation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ in der Gruppe D_0 läßt sich durch eine Relation zwischen den Grundgleichungslösungen $(x\mathfrak{p}_i, y\mathfrak{p}_i)$ ausdrücken, die den Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ zugeordnet sind. Aus Symmetriegründen legen wir besser die Relation

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o},$$

zugrunde. Wir haben dabei einige Fälle zu unterscheiden, je nach den Verschiedenheiten oder Gleichheiten der $\mathfrak{p}_i$ untereinander und mit $\mathfrak{o}$.

a) (*Hauptfall*) *$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ untereinander und von $\mathfrak{o}$ verschieden.* Dann ist die Relation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ gleichbedeutend mit der Determinantenrelation

$$\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 1 & x\mathfrak{p}_3 & y\mathfrak{p}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Denn aus dieser folgt die Existenz eines nicht verschwindenden ganzen Multiplums

$$z = \gamma + \alpha x + \beta y$$

von $\frac{1}{\mathfrak{o}^3}$ in K mit

$$z\mathfrak{p}_1 = 0, \quad z\mathfrak{p}_2 = 0, \quad z\mathfrak{p}_3 = 0,$$

also

$$z \cong \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{o}^3},$$

und daher

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o};$$

und umgekehrt. — Entsprechend ergibt sich, daß die Relation $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ in den weiteren Spezialfällen gleichbedeutend mit der jeweils angegebenen Determinantenrelation ist; bei der Angabe dieser Spezialfälle genügt es, die vorausgesetzten Gleichheiten zu nennen, während im übrigen die Verschiedenheiten des Hauptfalles bestehen sollen.

b) $\underline{\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3}$. $\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 0 & (dx)\mathfrak{p}_2 & (dy)\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 & y\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 & y\mathfrak{p}_2 \\ 0 & f_y\mathfrak{p}_2 & -f_x\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} = 0.$

c) $\underline{\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}}$. $\begin{vmatrix} 1 & x\mathfrak{p}_1 \\ 1 & x\mathfrak{p}_2 \end{vmatrix} = 0.$

Für die noch spezielleren Fälle $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ (also $3\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$) und $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$ (also $2\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$) brauchen wir die entsprechenden Determinantenrelationen (in H I gegeben) hier nicht. Abgesehen von Vertauschungen bleibt dann nur noch der triviale Fall $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$.

3. Wir betrachten jetzt den durch dieselbe Grundgleichung $f(X, Y) = 0$, aber über K als Konstantenkörper, definierten algebraischen Funktionenkörper $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = K(X, Y) \quad \text{mit} \quad f(X, Y) = 0.$$

Daß der neue Konstantenkörper K nicht algebraisch-abgeschlossen ist, macht für die Anwendung unserer Theorie auf $\mathfrak{K}/K$ statt K/k nur den Unterschied, daß wir uns durchweg auf Primdivisoren ersten Grades zu beschränken haben. Daß K für $p \neq 0$ nicht einmal vollkommen ist, macht gar nichts aus; die bösartigen Abweichungen der Theorie bei unvollkommenem Konstantenkörper treten hier deshalb nicht auf, weil die Grundgleichung Koeffizienten in k (nicht nur in K) hat.

Aus der zuvor entwickelten Charakterisierung der Primdivisoren durch konstante Grundgleichungslösungen ergibt sich hiernach ohne weiteres:

Zwischen den Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ und den Meromorphismen λ von K besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, auf Grund der Relation

$$(X\mathfrak{P}, Y\mathfrak{P}) = (x\lambda, y\lambda).$$

Dabei sind den Primdivisoren $\mathfrak{P}$, für die die Reste von X, Y bereits in k liegen, die uneigentlichen Meromorphismen λ zugeordnet, und insbesondere dem Nennerprimdivisor $\mathfrak{O}$ von X, Y der Nullmeromorphismus 0.

Wir definieren auf Grund dieser Zuordnung die *Summe* $\lambda_1 + \lambda_2$ zweier Meromorphismen von K als denjenigen Meromorphismus von K, der der Summe $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ in der Gruppe $\mathfrak{D}_{\mathfrak{O}}$ von $\mathfrak{K}$ zugeordnet ist. Die Gesamtheit der Meromorphismen von K wird so zu einer mit $\mathfrak{D}_{\mathfrak{O}}$ (also mit der Gruppe $\mathfrak{D}$ der Divisorenklassen nullten Grades von $\mathfrak{K}$) isomorphen additiven abelschen Gruppe Λ.

4. Das *Additionstheorem* der klassischen Theorie formuliert sich bei dieser Einkleidung folgendermaßen:

Die Addition der Meromorphismen λ liefert die Addition der zugeordneten linearen Substitutionen $\lambda\mathfrak{p}$:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p} = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p}\,.$$ [6])

Zum Beweis legen wir besser die symmetrische Fassung zugrunde:

$$\text{Aus} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{folgt} \quad \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} + \lambda_3\mathfrak{p} = 0\,.$$

---

[6]) Diese Formulierung entspricht einer Kombination des Homomorphiesatzes und des Klassensatzes in der Terminologie meiner Arbeit in den Abh. Math. Sem. Hamburg **10**. Ich bin hier den dort im Anschluß an diese beiden Sätze skizzierten Weg gegangen.

Seien $\mathfrak{P}_i$ die den λ_i zugeordneten Primdivisoren ersten Grades von $\mathfrak{K}$, also nach Voraussetzung

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{O},$$

und sei $\lambda_i \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ gesetzt, so daß also

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{o}$$

behauptet wird.

Wir nehmen die Spezialfälle vorweg, wo die Anzahl der untereinander und von $\mathfrak{O}$ verschiedenen unter den $\mathfrak{P}_i$ gleich 0 oder 1 ist.

Sind alle $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{O}$, also alle $\lambda_i = 0$, so sind alle $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}$, also stimmt dann die Behauptung.

Ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$, also $3\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{O}$, oder $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{O}$, also $2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{O}$, so ist λ_1 nach H I uneigentlich, einem Primdivisor $\mathfrak{p}_1^*$ mit $3\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{o}$ oder $2\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{o}$ entsprechend. Da für diesen dann $\mathfrak{p}_1 = \lambda_1 \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^*$ gilt, stimmt auch hier die Behauptung $3\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$ oder $2\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$.

Liege jetzt einer der obigen Fälle a)—c) für die $\mathfrak{P}_i$ vor. Dann besteht also die entsprechende Determinantenrelation für die $X\mathfrak{P}_i$, $Y\mathfrak{P}_i$. Auf Grund des Zusammenhangs der $\mathfrak{P}_i$ mit den λ_i hat man

$$(X\mathfrak{P}_i,\ Y\mathfrak{P}_i) = (x\lambda_i,\ y\lambda_i)$$

und weiter auch

$$(f_y(X, Y)\mathfrak{P}_i,\ -f_x(X, Y)\mathfrak{P}_i) = (f_y(x, y)\lambda_i,\ -f_x(x, y)\lambda_i).$$

Demgemäß kann in der Determinantenrelation $x\lambda_i$, $y\lambda_i$ für $X\mathfrak{P}_i$, $Y\mathfrak{P}_i$ geschrieben werden. Wir gehen dann in dieser Relation weiter zu den konstanten Resten mod. $\mathfrak{p}$ über, unter Beachtung der Regel $(z\lambda_i)\mathfrak{p} = z(\lambda_i\mathfrak{p}) = z\mathfrak{p}_i$.

Dabei beschränken wir uns auf solche $\mathfrak{p}$, für welche die $\mathfrak{p}_i$ genau derselben Voraussetzung a)—c) wie die $\mathfrak{P}_i$ unterliegen (keiner spezielleren). Ausgenommen werden also genau diejenigen $\mathfrak{p}$, für welche entweder eine Relation

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o} \quad \text{bei} \quad \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{O}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \quad \text{bei} \quad \lambda_i \neq 0$$

oder eine Relation

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j \quad \text{bei} \quad \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_j, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i\mathfrak{p} = \lambda_j\mathfrak{p} \quad \text{bei} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

besteht. Die Ausnahme der ersteren Fälle stellt gleichzeitig sicher, daß kein in der Determinantenrelation auftretender konstanter Rest das Symbol ∞ wird.

Wir erhalten dann genau die obige Determinantenrelation a)—c) für die $x\mathfrak{p}_i$, $y\mathfrak{p}_i$ mit der zugehörigen Voraussetzung für die $\mathfrak{p}_i$. Daraus ergibt sich die Behauptung für alle $\mathfrak{p}$ bis auf die genannten Ausnahmen.

Die Anzahl dieser Ausnahmen ist nun nach der oben bewiesenen Festlegung eines Meromorphismus λ durch die zugeordnete lineare Substitution $\lambda\mathfrak{p}$ jedenfalls endlich. Um die Richtigkeit der Behauptung auch für sie einzusehen, gehen wir folgendermaßen vor:

Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda_3 = 0$, also $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Nach dem Bewiesenen gilt dann $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für fast alle $\mathfrak{p}$. Anders gesagt, für jeden Meromorphismus λ gilt

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = -(\lambda\mathfrak{p}) \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p}.$$

Nun ist nach unseren Rechenregeln

$$-(\lambda\mathfrak{p}) = (\lambda\mathfrak{p})\sigma_0 = \sigma_0(\lambda\mathfrak{p}) = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p}.$$

Damit schreibt sich die letzte Aussage als

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt die Meromorphismengleichung

$$-\lambda = \sigma_0\lambda,$$

und diese liefert

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = (\sigma_0\lambda)\mathfrak{p} \quad \text{für alle } \mathfrak{p},$$

also

$$(-\lambda)\mathfrak{p} = -(\lambda\mathfrak{p}) \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Damit ist zunächst die ausnahmslose Gültigkeit von $\lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ bewiesen.

Ferner ergibt sich daraus, daß die Behauptung im allgemeinen Fall $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ gleichwertig in der Form

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p} = \lambda_1\mathfrak{p} + \lambda_2\mathfrak{p}$$

ausgedrückt werden kann; denn man hat ja jetzt

$$-(\lambda_3\mathfrak{p}) = (-\lambda_3)\mathfrak{p} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{p}.$$

Schließlich ergibt sich die Richtigkeit der Umkehrung:

Aus $\lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} + \lambda_3'\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ für fast alle $\mathfrak{p}$ folgt $\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' = 0$. Denn einerseits hat man nach Voraussetzung

$$(-\lambda_3')\mathfrak{p} = \lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

und andererseits nach dem Bewiesenen auch

$$(\lambda_1' + \lambda_2')\mathfrak{p} = \lambda_1'\mathfrak{p} + \lambda_2'\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

zusammengenommen also

$$(-\lambda_3')\mathfrak{p} = (\lambda_1' + \lambda_2')\mathfrak{p} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

was die Meromorphismengleichung

$$-\lambda_3' = \lambda_1' + \lambda_2'$$

zur Folge hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Beseitigung der endlich vielen Ausnahmen im allgemeinen Fall $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Sei dazu $n \not\equiv 0 \bmod. p$ eine natürliche Zahl. Nach H I ist dann die Gruppe der Primdivisoren $\mathfrak{q}$ mit $n\mathfrak{q} = \mathfrak{o}$ vom Typus (n, n). Es existieren also zwei unabhängige $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ von der Ordnung n; setzt man $\mathfrak{q}_3 = -(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)$, so ist

$$\sum_i \mathfrak{q}_i = \mathfrak{o},$$

und es sind durchweg

$$\mathfrak{q}_i \text{ und } \mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}_j \ (i \neq j) \text{ von der Ordnung } n.$$

Mit diesen $\mathfrak{q}_i$ bilden wir die Meromorphismen

$$\lambda_i' = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{q}_i}\lambda_i,$$

für die also

$$\lambda_i'\mathfrak{p} = \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{q}_i}(\lambda_i\mathfrak{p}) = (\lambda_i\mathfrak{p})\tau_{\mathfrak{q}_i,\mathfrak{o}} = \lambda_i\mathfrak{p} - \mathfrak{q}_i$$

ist. Nach Konstruktion ist dann

$$\sum_i \lambda_i'\mathfrak{p} = \sum_i \lambda_i\mathfrak{p}.$$

Daraus folgt zunächst

$$\sum_i \lambda_i' \mathfrak{p} = \mathfrak{o} \quad \text{für fast alle } \mathfrak{p},$$

also nach dem zuvor Bewiesenen auch

$$\sum_i \lambda_i' = 0.$$

Weiter folgt dann, daß die Behauptung $\sum_i \lambda_i \mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ auch für alle diejenigen $\mathfrak{p}$ stimmt, die keine Ausnahmen für die λ_i' sind. Unser Beweis wird also erbracht sein, wenn wir gezeigt haben, daß sich n so wählen läßt, daß die für die λ_i auszunehmenden $\mathfrak{p}$ keine Ausnahmen für die λ_i' sind. Dies erreichen wir sicher, wenn wir dafür sorgen, daß für jedes der endlich vielen bei den λ_i auszunehmenden $\mathfrak{p}$ durchweg

$$\lambda_i' \mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i$$

und für $i \neq j$ durchweg

$$\lambda_i' \mathfrak{p} \neq \lambda_j' \mathfrak{p}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_i \mathfrak{p} - \lambda_j \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}_j$$

gilt. Wählt man nun n größer als die sämtlichen endlich vielen Ordnungen der $\lambda_i \mathfrak{p}$ und $\lambda_i \mathfrak{p} - \lambda_j \mathfrak{p}$ (soweit diese überhaupt endlich sind), so ist dies auf Grund der Wahl der $\mathfrak{q}_i$ erfüllt.

Damit ist das Additionstheorem in obiger Formulierung bewiesen.

Als Folgerung sei noch angeführt: Ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

und sind

$$\lambda_i = \tau_{\mathfrak{a}_i, \mathfrak{o}} \mu_i$$

die zugehörigen eindeutigen Zerlegungen, so ist auch

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$$

und

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Denn für die zugeordneten linearen Substitutionen hat man nach dem Additionstheorem

$$\mathfrak{o} = \Big(\sum_i \lambda_i\Big) \mathfrak{p} = \sum_i (\lambda_i \mathfrak{p}) = \sum_i (\mu_i \mathfrak{p}) + \sum_i \mathfrak{a}_i = \Big(\sum_i \mu_i\Big) \mathfrak{p} + \sum_i \mathfrak{a}_i .$$

Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ ergibt das die erste Behauptung. Dann folgt die zweite Behauptung wegen der Festlegung jedes Meromorphismus durch seine lineare Substitution.

5. Aus dem Additionstheorem folgt weiter, daß mit μ auch $-\mu$ normiert ist, und mit μ_1, μ_2 auch $\mu_1 + \mu_2$ normiert ist. Also:

Das multiplikativ abgeschlossene System M *der normierten Meromorphismen ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe.*

Wir beweisen ferner die Gültigkeit der *Distributivgesetze*

$$(\mu_1 + \mu_2)\mu = \mu_1 \mu + \mu_2 \mu$$
$$\mu(\mu_1 + \mu_2) = \mu\mu_1 + \mu\mu_2$$

in M.

Es genügt dazu, die Gleichheit der beiden Seiten zugeordneten linearen Substitutionen zu zeigen. In der Tat ist auf Grund unserer Rechenregeln (unter Weglassung der nach dem Bisherigen entbehrlichen Assoziativklammern)

$$(\mu_1 + \mu_2)\mu\mathfrak{p} = \mu_1\mu\mathfrak{p} + \mu_2\mu\mathfrak{p} = (\mu_1\mu + \mu_2\mu)\mathfrak{p}$$
$$\mu(\mu_1 + \mu_2)\mathfrak{p} = \mu(\mu_1\mathfrak{p} + \mu_2\mathfrak{p}) = \mu\mu_1\mathfrak{p} + \mu\mu_2\mathfrak{p} = (\mu\mu_1 + \mu\mu_2)\mathfrak{p}.$$

Das erste Distributivgesetz gilt übrigens sogar ohne die Beschränkung auf normierte Meromorphismen, während im zweiten jedenfalls μ normiert sein muß.

Wir haben damit:

Das System M *der normierten Meromorphismen ist auf Grund der gegebenen Definitionen von Produkt und Summe ein Ring.*

Nullelement dieses Ringes M ist, wie hinsichtlich der Multiplikation bereits in § 2 festgestellt wurde und hinsichtlich der Addition unmittelbar ersichtlich ist, der einzige uneigentliche normierte Meromorphismus 0, der dem Bezugsprimdivisor $\mathfrak{o}$ zugeordnet ist. In § 2 wurde aus dem Normenproduktsatz gefolgert:

Der Ring M *besitzt keine echten Nullteiler.*

Der Ring M besitzt ferner ein *Einselement* 1, den identischen Automorphismus von K, und damit dann auch dessen natürliche Vielfache n, mit dem zugeordneten Homomorphismus

$$n\mathfrak{p} = \mathfrak{p} + \cdots + \mathfrak{p} \quad (n\text{-mal})$$

in der Gruppe D_0, und ihre Entgegengesetzten $-n$. Wir zeigen:

Der Ring M *hat die Charakteristik* 0.

Sei nämlich n eine natürliche Zahl und μ ein normierter Meromorphismus. Nach dem Additionstheorem und wegen der Homomorphieeigenschaft von μ gilt dann durchweg

$$(n\mu)\mathfrak{p} = n(\mu\mathfrak{p}) = \mu(n\mathfrak{p}).$$

Ist also $n\mu = 0$, d. h. $(n\mu)\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, so folgt durchweg

$$\mu(n\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}.$$

Nach H I fallen nun bei der homomorphen Abbildung $\mathfrak{p} \to n\mathfrak{p}$ der Gruppe D_0 immer höchstens n^2 Primdivisoren zusammen. Daher folgt aus der letzten Relation weiter, daß

$$\mu\mathfrak{q} = \mathfrak{o}$$

für endlich viele Primdivisoren $\mathfrak{q}$ gilt. Dann muß aber $\mu = 0$ sein. Somit ist für jedes natürliche n in der Tat

$$n\mu \neq 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq 0.$$

Nach § 1 gilt schließlich:

Der Ring M *besitzt nur endlich viele Einheiten.*

Hiervon werden wir aber, wie schon gesagt, keinen Gebrauch zu machen haben.

Es sei noch bemerkt, daß die Struktur des Ringes $\mathsf{M} = \mathsf{M}_0$ nicht von der Wahl des Bezugsprimdivisors $\mathfrak{o}$ abhängt, also eine Invariante von K ist. In der Tat hat man ohne weiteres die Transformationsbeziehung

$$\mathsf{M}_\mathfrak{a} = \tau_{\mathfrak{a},\mathfrak{o}}\, \mathsf{M}_\mathfrak{o}\, \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}\,.$$

6. Der Ring M enthält jedenfalls den Integritätsbereich Γ der *ganzrationalzahligen Meromorphismen m.* Ob weitere normierte Meromorphismen vorhanden sind, hängt von der Struktur von k ab. Für den klassischen Fall — k der Körper aller komplexen Zahlen — weiß man aus analytischer Quelle, daß K dann und nur dann nicht ganzrationalzahlige normierte Meromorphismen, also echte komplexe Multiplikationen besitzt, wenn das Periodenverhältnis imaginär-quadratisch ist, und daß dann die normierten Meromorphismen eine Ordnung im Körper des Periodenverhältnisses bilden. Der Formalismus der klassischen Theorie ergibt sich aus unserer, wenn man unseren unbestimmten Primdivisor $\mathfrak{p}$ als variablen Punkt des Gebildes deutet und demgemäß durch den variablen Punkt u der universellen Überlagerungsfläche, reduziert nach dem Modul der Perioden, ersetzt. Dann entsprechen unsere linearen Substitutionen $\lambda\mathfrak{p} = \mu\mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ den linearen Substitutionen $\lambda(u) = \mu u + \alpha$ in der u-Ebene.

§ 4. Das Additionstheorem für das ganze Differential von *K*.

1. Für das Folgende ist das Verhalten des wesentlich einzigen *ganzen Differentials* du von K bei den Meromorphismen von K wichtig.

Ist $K = k(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$ eine normierte Erzeugung von K, so ist

$$du = \frac{dx}{f_y(x, y)} = -\frac{dy}{f_x(x, y)}$$

das wesentlich einzige ganze Differential von K; der zugeordnete Divisor ist

$$du \cong 1.$$

Zum Beweis betrachten wir K als separabel-algebraische Erweiterung vom Grade 2 über $k(x)$. Als Divisor ist

$$f_y(x, y) \cong y - y',$$

wo y' die zu y konjugierte über $k(x)$ bezeichnet. Es kommt also auf den Nachweis der Divisorengleichung

$$dx \cong y - y'$$

an. Weil x den Nenner $\mathfrak{o}^2$ hat, ist

$$dx \cong \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{o}^4},$$

wo $\mathfrak{d}_x$ den Differentendivisor für $K/k(x)$ bezeichnet. Dieser kann aus der Elementdifferente $y - y'$ berechnet werden. Wie bereits in § 2 festgestellt wurde, hat $J_x = k[x, y] = J_0$ über $k[x]$ die Basis $1, y$. Daher stimmt für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ der Beitrag zu $\mathfrak{d}_x$ mit dem Beitrag zu $y - y'$ überein. Es bleibt also zu zeigen, daß für $\mathfrak{o}$ der Beitrag zu $\frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{o}^4}$ mit dem Beitrag zu $y - y'$ übereinstimmt. Nun ist $\frac{x}{y}$ Primelement für $\mathfrak{o}$; der $\mathfrak{o}$-Beitrag zu $\mathfrak{d}_x$ ist daher gleich dem $\mathfrak{o}$-Beitrag zur Differente $\frac{x}{y} - \frac{x}{y'} = -x\frac{y - y'}{yy'}$. Dieser $\mathfrak{o}$-Beitrag ist aber ersichtlich um den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{o}^2}\mathfrak{o}^3\mathfrak{o}^3 = \mathfrak{o}^4$ von dem $\mathfrak{o}$-Beitrag zu $y - y'$ unterschieden.

2. Als *Bild des ganzen Differentials du von K bei einem Meromorphismus λ von K* definieren wir:

$$(du)\lambda = \frac{d(x\lambda)}{f_y(x\lambda, y\lambda)}, \quad \text{wenn } \lambda \text{ eigentlich,}$$

$$(du)\lambda = 0, \quad \text{wenn } \lambda \text{ uneigentlich.}$$

Bei der Betrachtung des hierdurch für eigentliches λ definierten Differentials $(du)\lambda$ müssen wir unterscheiden, ob wir $(du)\lambda$ als Differential von $K\lambda$ oder als Differential von K ansehen.

Als Differential von $K\lambda$ ist $(du)\lambda$ das entsprechend zu du gebildete ganze Differential von $K\lambda$, insbesondere also

$$(du)\lambda \cong 1 \text{ in } K\lambda.$$

Als Differential von K ist

$$(du)\lambda = 0 \text{ in } K, \quad \text{wenn } K/K\lambda \text{ inseparabel,}$$

$$(du)\lambda \neq 0 \text{ in } K, \quad \text{wenn } K/K\lambda \text{ separabel.}$$

Im letzten Fall ist die Unterscheidung zwischen der Betrachtung in $K\lambda$ oder K unwesentlich. Auf Grund der in § 2 festgestellten Unverzweigtheit von $K/K\lambda$ stimmen dann nämlich die lokalen Entwicklungen von $(du)\lambda$ in $K\lambda$ mit denen in K bei Wahl der Primelemente innerhalb $K\lambda$ überein; insbesondere ist also auch

$$(du)\lambda \cong 1 \text{ in } K.$$

Für uneigentliches λ ist $K\lambda = k$, so daß von Differentialen von $K\lambda$ nicht die Rede sein kann. Als Differential von K ist $d(x\lambda) = 0$ jedenfalls dann, wenn $x\lambda \neq \infty$, d. h. $\lambda \neq 0$ ist. Wir haben demgemäß $(du)\lambda = 0$ definiert, und zwar ausdrücklich auch für den Fall $\lambda = 0$, sowie für den Fall, daß $\lambda \neq 0$ uneigentlich ist und die bei eigentlichem λ gegebene Definitionsformel dadurch versagt, daß auch ihr Nenner $f_y(x\lambda, y\lambda) = 0$ wird.

Hiernach gilt in jedem Falle eine Relation

$$(du)\lambda = c_\lambda du \text{ in } K,$$

mit einer durch λ bestimmten Konstanten c_λ, und es ist

$c_\lambda \neq 0$, wenn $K/K\lambda$ separabel-algebraisch,

$c_\lambda = 0$, wenn $K/K\lambda$ inseparabel-algebraisch oder transzendent.

Aus der Definition des Meromorphismenproduktes durch Nacheinanderausführung ergibt sich:

Der Multiplikation der Meromorphismen λ entspricht die Multiplikation der Faktoren c_λ:

$$c_{\lambda\lambda'} = c_\lambda c_{\lambda'}.$$

Aus

$$(du)\lambda = c_\lambda du \text{ in } K$$

folgt nämlich durch Anwendung von λ'

$$\begin{aligned}(du)\lambda\lambda' &= c_\lambda (du)\lambda' \text{ in } K\lambda' \\ &= c_\lambda c_{\lambda'} du \text{ in } K.\end{aligned}$$

3. Wir beweisen jetzt *das Additionstheorem für das ganze Differential*:

Der Addition der Meromorphismen λ entspricht die Addition der zugeordneten ganzen Differentiale $(du)\lambda$ als Differentiale von K:

$$(du)(\lambda_1 + \lambda_2) = (du)\lambda_1 + (du)\lambda_2 \quad \textit{in } K,$$

oder also

$$c_{\lambda_1+\lambda_2} = c_{\lambda_1} + c_{\lambda_2}.$$

Zum Beweis legen wir wieder besser die symmetrische Fassung zugrunde:

Aus $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ folgt $(du)\lambda_1 + (du)\lambda_2 + (du)\lambda_3 = 0$ in K,

also

$$c_{\lambda_1} + c_{\lambda_2} + c_{\lambda_3} = 0.$$

Wir zeigen zunächst, daß es für $(du)\lambda$ und somit c_λ nur auf den normierten Bestandteil μ von λ ankommt. Es gilt nämlich:

du ist bei den Translationsautomorphismen τ invariant:

$$(du)\tau = du, \quad d.\,h. \quad c_\tau = 1.$$

Auf Grund der in § 1 gegebenen Konstruktion dieser Translationsautomorphismen als Produkte

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}}\sigma_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}$$

zweier Spiegelungsautomorphismen genügt es dazu zu zeigen:

du bekommt bei den Spiegelungsautomorphismen σ den Faktor -1:

$$(du)\sigma = -du, \quad d.\,h. \quad c_\sigma = -1.$$

Jeder Spiegelungsautomorphismus σ läßt sich nach § 1 in der Form $\sigma = \sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ darstellen und ist dann der nicht identische Automorphismus von $K/k(z)$, wo z ein nicht-konstantes ganzes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in K ist. Das mit diesem z gebildete Differential $z\,du$ von K hat genau zwei von Null verschiedene Residuen, nämlich bei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und diese sind nach dem Residuensatz [7]) entgegengesetzt, also etwa (bei geeigneter Normierung von z)

$$\varrho_{\mathfrak{a}}(z\,du) = +1, \qquad \varrho_{\mathfrak{b}}(z\,du) = -1.$$

Wendet man hierauf σ an und beachtet

$$\mathfrak{a}\sigma = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{b}\sigma = \mathfrak{a}, \qquad z\sigma = z, \qquad (du)\sigma = c_\sigma\,du,$$

so erhält man

$$c_\sigma \varrho_{\mathfrak{b}}(z\,du) = +1, \qquad c_\sigma \varrho_{\mathfrak{a}}(z\,du) = -1,$$

also in der Tat

$$c_\sigma = -1.$$

Hat λ die eindeutige Zerlegung

$$\lambda = \tau\mu,$$

so gilt hiernach

$$(du)\,\lambda = (du)\,\tau\mu = (du)\,\mu,$$

und daher

$$c_\lambda = c_\mu.$$

$(du)\,\lambda$ und c_λ hängen demnach in der Tat nur von dem normierten Bestandteil μ von λ ab.

Dies machen wir uns für unseren Beweis des oben ausgesprochenen Additionstheorems für das ganze Differential zu Nutze, um jegliche Spezialfälle der beim Beweis des Additionstheorems in § 3 auftretenden Art auszuschließen. Wir ersetzen nämlich die gegebenen λ_i mit $\sum_i \lambda_i = 0$ durch abgeänderte $\lambda_i' = \tau_{\mathfrak{a}_i,\mathfrak{o}}\lambda_i$. Nach dem Additionstheorem erfüllen auch diese die Relation $\sum_i \lambda_i' = 0$, wenn nur über die $\mathfrak{a}_i$ so verfügt wird, daß $\sum_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$ ist. Offenbar lassen sich die Primdivisoren $\mathfrak{a}_i$ mit $\sum_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}$ stets (auf unendlich viele Arten) so bestimmen, daß die λ_i' untereinander und von 0 verschieden sind. Wir dürfen dies ohne Einschränkung bereits für die λ_i voraussetzen.

Wir ziehen nun wieder den Körper $\mathfrak{K} = K(X, Y)$ und die den λ_i entsprechenden Primdivisoren ersten Grades $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{K}$ heran. Diese $\mathfrak{P}_i$ sind dann untereinander und von $\mathfrak{O}$ verschieden und genügen der Relation $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{O}$. Daher existiert wesentlich eindeutig ein Element Z in $\mathfrak{K}$ mit der Divisorendarstellung

$$Z \cong \frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{O}^3}.$$

Dieses ist durch die K-Basis $1, X, Y$ der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{O}^3}$ in $\mathfrak{K}$ darstellbar, und zwar wegen der Verschiedenheit der $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{O}$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten

[7]) Anstatt den Residuensatz anzuwenden, kann man auch ganz analog wie unten vorgehen, nämlich davon ausgehen, daß $S_z\left(z\frac{du}{dz}\right) = 0$ ist, weil $S_z\left(z\frac{du}{dz}\right)dz$ ein ganzes Differential von $k(z)$ ist.

von Y. Es kann also eindeutig als

$$Z = Y - vX - w, \qquad v, w \text{ in } K,$$

normiert werden.

Wir betrachten den Körper $\mathfrak{K}$ als separabel-algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}/K(Z)$ vom Grade 3. Multiplizieren wir das ganze Differential dU von $\mathfrak{K}$ mit irgendeinem linearen Kompositum $v'X + w'$ (v', w' in K), so entsteht ein Differential $(v'X + w')dU$ von $\mathfrak{K}$, das höchstens den Nenner $\mathfrak{O}^2$ hat. Da $\mathfrak{O}^2$ im Beitrag von $\mathfrak{O}$ zur Differente von $\mathfrak{K}/K(Z)$ aufgeht (für $p \neq 3$ ist es sogar der genaue Beitrag, für $p = 3$ ein echter Teiler), ist die für $\mathfrak{K}/K(Z)$ gebildete Spur dieses Differentials, d. h. der Ausdruck

$$S_Z\left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right) dZ,$$

ein ganzes Differential von $K(Z)$ und daher gleich 0, denn $K(Z)$ hat das Geschlecht 0. Wir haben also

$$S_Z\left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right) = 0.$$

Unsere Behauptung wird sich als wesentlich identisch mit dieser Gleichung, als Kongruenz nach dem Zählerprimdivisor $\mathfrak{P}_Z$ von Z in $K(Z)$ betrachtet, ergeben, also mit der aus ihr durch Übergang zum konstanten Rest mod. $\mathfrak{P}_Z$ entstehenden Gleichung in K.

Nach der lokal-arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper ist entsprechend der Primzerlegung

$$\mathfrak{P}_Z = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \text{ in } \mathfrak{K}$$

jener konstante Rest mod. $\mathfrak{P}_Z$ die Summe der konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ des Arguments der Spur. Wir haben also die Summenrelation

$$\sum_i \left((v'X + w')\frac{dU}{dZ}\right)\mathfrak{P}_i = 0.$$

Man beachte, daß die konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ in dieser Relation nicht das Symbol ∞ sind, weil der Nenner dZ wegen der Verschiedenheit der $\mathfrak{P}_i$ untereinander prim zu den $\mathfrak{P}_i$ ist.

Die fraglichen konstanten Reste mod. $\mathfrak{P}_i$ berechnen sich wie folgt:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{dY}{dX} - v = -\frac{f_x(X, Y)}{f_y(X, Y)} - v,$$

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{1}{f_y(X, Y)}\frac{dX}{dZ} = -\frac{1}{f_x(X, Y) + vf_y(X, Y)},$$

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ} = -\frac{v'X + w'}{f_x(X, Y) + vf_y(X, Y)},$$

$$(X\mathfrak{P}_i, Y\mathfrak{P}_i) = (x\lambda_i, y\lambda_i),$$

also

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = -\frac{v'(x\lambda_i) + w'}{f_x(x\lambda_i, y\lambda_i) + vf_y(x\lambda_i, y\lambda_i)}.$$

Aus

$$0 = Z\mathfrak{P}_i = Y\mathfrak{P}_i - v \cdot X\mathfrak{P}_i - w$$

folgt nun

$$y\lambda_i - v \cdot x\lambda_i - w = 0,$$

und daraus durch Differentiation in K

$$d(y\lambda_i) - v\, d(x\lambda_i) = dv \cdot x\lambda_i + dw.$$

Nimmt man also

$$v' = \frac{dv}{du}, \qquad w' = \frac{dw}{du},$$

so wird

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = \frac{1}{du}\,\frac{-d(y\lambda_i) + v\,d(x\lambda_i)}{f_x(x\lambda_i, y\lambda_i) + v f_y(x\lambda_i, y\lambda_i)}.$$

Wegen

$$f_x dx + f_y dy = 0$$

oder vielmehr der daraus durch Anwendung von λ_i entstehenden Relation, ist der Bruch rechts

$$= \frac{d(x\lambda_i)}{f_y(x\lambda_i, y\lambda_i)} = (du)\,\lambda_i.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$(v'X + w')\frac{dU}{dZ}\mathfrak{P}_i = \frac{(du)\,\lambda_i}{du} = c_{\lambda_i}.$$

Die hergeleitete Summenrelation für die konstanten Reste links ergibt also in der Tat die Behauptung.

4. Wir ziehen aus diesem Beweis noch folgende für später wichtige Folgerung: Es sei K_0 irgendein Teilkörper von K, der die Körper K_{λ_i} enthält, und es sei du_0 ein ganzes Differential von K_0. Man hat dann auch Relationen

$$(du)\,\lambda_i = c^{(0)}_{\lambda_i} du_0 \text{ in } K_0$$

mit durch λ_i und du_0 bestimmten Konstanten $c^{(0)}_{\lambda_i}$. Nimmt man nun oben

$$v' = \frac{dv}{du_0}, \qquad w' = \frac{dw}{du_0},$$

so ergibt sich ganz analog

$$\sum_i c^{(0)}_{\lambda_i} = 0,$$

anders ausgedrückt

$$\sum_i (du)\,\lambda_i = 0 \text{ in } K_0.$$

Für den Übergang zur unsymmetrischen Fassung beachten wir, daß ein $K\lambda_1$ und $K\lambda_2$ enthaltender Teilkörper K_0 von K auch $K(\lambda_1 + \lambda_2)$ enthält. Denn $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ sind auch Primdivisoren ersten Grades des Teilkörpers $\mathfrak{K}_0 = K_0(X, Y)$, und daher ist auch $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ ein Primdivisor ersten Grades von $\mathfrak{K}_0$.

In Verallgemeinerung unserer obigen Fassung des Additionstheorems für das ganze Differential haben wir also:

Ist K_0 ein $K\lambda_1$ und $K\lambda_2$ enthaltender Teilkörper von K, so enthält K_0 auch $K(\lambda_1 + \lambda_2)$, und die Relation

$$du(\lambda_1 + \lambda_2) = (du)\,\lambda_1 + (du)\,\lambda_2$$

gilt auch in K_0.

Eingegangen 20. November 1935.