Differentialrechnung bei Charakteristik p.

Von *Oswald Teichmüller* in Göttingen.

Vor kurzer Zeit hat H. Hasse in einer in diesem Journal erschienenen Arbeit [1]) die Theorie der höheren Ableitungen in algebraischen Funktionenkörpern begründet. Er benutzt dazu die aus der Analysis bekannten Formeln für höhere Differentialquotienten impliziter Funktionen. In Körpern der Charakteristik 0 treten keine Schwierigkeiten auf, weil man dort mit Iteration der gewöhnlichen Differentiation durchkommt. Interessant sind daher hauptsächlich die Verhältnisse in algebraischen Funktionenkörpern der Primzahlcharakteristik p. Es ist mir nun gelungen, auch in diesen Körpern die immerhin komplizierten Formeln der Differentiation impliziter Funktionen zu vermeiden. Ich betrachte den algebraischen Funktionenkörper nämlich als inseparablen Oberkörper eines passend gewählten birational invarianten Unterkörpers und kann bei dieser Betrachtungsweise die sämtlichen höheren Differntialquotienten einführen und ihre Haupteigenschaften ableiten, ohne auf Potenzreihenentwicklungen an den einzelnen Primstellen eingehen zu müssen. Dadurch wird die Theorie nicht nur einfacher, sondern man erhält auch nebenher eine Differentiationstheorie für die einfachsten inseparablen Oberkörper beliebiger Körper von Primzahlcharakteristik auf rein algebraischer Grundlage. In diesem Sinne mag die vorliegende Arbeit zugleich als Vorbereitung auf eine in einiger Zeit zu veröffentlichende Arbeit über „p-Algebren" angesehen werden; denn dort sollen die einfachen und normalen Algebren, die rein inseparable Zerfällungskörper besitzen, studiert werden, und zwar werde ich dort einige spezielle Rechnungen mit Hilfe der hier zuerst eingeführten allgemeinen Differentiation bei Charakteristik p durchführen.

I.

Ω sei irgendein Körper der Charakteristik $p > 0$. Durch Adjunktion einer Unbestimmten x entsteht der rationale Funktionenkörper $\Omega(x)$, der Quotientenkörper des Polynomrings $\Omega[x]$. Durch eine endliche und separable Erweiterung entsteht aus $\Omega(x)$ der algebraische Funktionenkörper K.

Für die meisten Anwendungen genügt es, Ω als vollkommen vorauszusetzen. Dann hat jeder algebraische Funktionenkörper K über Ω von selbst diese Form:

$$K/\Omega(x) \text{ separabel}, \qquad \Omega(x)/\Omega \text{ transzendent}.$$

Wenn Ω unvollkommen sein sollte, muß man sich auf die Körper beschränken, die in diese Form gebracht werden können.

[1]) Hasse, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik, dieses Journal **175** (1936), S. 50.

Nach dem bekannten Satz vom primitiven Element ist K eine einfache algebraische Erweiterung von $\Omega(x)$:

$$K = \Omega(x, \vartheta),$$

wo ϑ einer separablen algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\Omega(x)$ genügt.

Erhebt man jedes Element des Körpers K der Charakteristik $p > 0$ in die p^n-te Potenz, so ist das bekanntlich ein Isomorphismus von K auf den Teilkörper K^{p^n} aller p^n-ten Potenzen in K. Wir bilden nun das Kompositum Σ_n von K^{p^n} und Ω (d. h. den von K^{p^n} und Ω erzeugten Unterkörper von K). Aus $K = \Omega(x, \vartheta)$ folgt

$$K^{p^n} = \Omega^{p^n}(x^{p^n}, \vartheta^{p^n});$$

Σ_n ist also der von Ω^{p^n}, x^{p^n}, ϑ^{p^n} und Ω erzeugte Unterkörper von K:

$$\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}).$$

Wir behaupten nun:

$$K = \Sigma_n(x).$$

Beweis. $\Sigma_n(x) \leqq K$ ist trivial. y sei irgendein Element von K. Dann ist einerseits $y^{p^n} \in K^{p^n} \leqq \Sigma_n(x)$, also y eine p^n-te Wurzel aus $\Sigma_n(x)$. Andererseits ist $\Omega(x)(y)/\Omega(x)$ nach Voraussetzung separabel; weil nun $\Sigma_n(x)$ Oberkörper von $\Omega(x)$ ist, muß auch $\Sigma_n(x)(y)/\Sigma_n(x)$ separabel sein [2]). Die p^n-te Wurzel y eines Elements von $\Sigma_n(x)$ kann aber nur dann einer separablen Gleichung mit Koeffizienten aus $\Sigma_n(x)$ genügen, wenn $y \in \Sigma_n(x)$ [3]). Jedes $y \in K$ liegt also in $\Sigma_n(x)$, daher $K = \Sigma_n(x)$.

x genügt der über Σ_n irreduziblen Gleichung

$$t^{p^n} - x^{p^n} = 0.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $x^{p^{n-1}}$ nicht in Σ_n liegt [3]). Weil ϑ über $\Omega(x)$ einer separablen Gleichung genügt, ist ϑ^{p^n} Nullstelle eines über $\Omega^{p^n}(x^{p^n})$ separablen Polynoms. Erst recht wird ϑ^{p^n} über $\Omega(x^{p^n}) \geqq \Omega^{p^n}(x^{p^n})$ einer separablen Gleichung genügen [2]), d. h. $\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n})$ ist über $\Omega(x^{p^n})$ separabel. Aber $x^{p^{n-1}}$ ist eine wirkliche p-te Wurzel aus $\Omega(x^{p^n})$, also inseparabel [3]). Das inseparabel algebraische Element $x^{p^{n-1}}$ kann nicht in dem separablen Oberkörper Σ_n von $\Omega(x^{p^n})$ liegen.

Wenn Ω vollkommen ist, dann ist $\Omega = \Omega^p$, darum $\Omega = \Omega^{p^n}$, mithin

$$\Sigma_n = \Omega(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}) = \Omega^{p^n}(x^{p^n}, \vartheta^{p^n}) = K^{p^n}.$$

Wir haben also einen *Körper K der Charakteristik p, der über einem Körper $\Sigma (= \Sigma_n)$ inseparabel ist, und zwar ist $K = \Sigma(x)$, wo x Nullstelle des über Σ irreduziblen Polynoms $t^{p^n} - \alpha = 0$ ist* ($\alpha = x^{p^n} \in \Sigma$). Wir wollen nun vorläufig alle übrigen Eigenschaften unserer Funktionenkörper vergessen und nur diesen einfachen algebraischen Sachverhalt zugrunde legen. Er genügt nämlich bei Charakteristik $p > 0$, um hinreichend viele höhere Differentialquotienten in K in vernünftiger Weise erklärbar zu machen.

Bekanntlich ist

$$K \cong \Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha.$$

Dieser Isomorphismus entsteht, wenn man jeder Restklasse des Polynomrings

$$\Sigma[t] \bmod t^{p^n} - \alpha,$$

[2]) Ist T ein Oberkörper von P und liegt y in einem Oberkörper von T und ist $\mathsf{P}(y)/\mathsf{P}$ separabel, so ist auch $\mathsf{T}(y)/\mathsf{T}$ separabel.

[3]) Liegt u in einem Oberkörper des Körpers P der Charakteristik $p > 0$ und liegt eine $p^{\overline{m}}$-te Potenz von u in P, so sei zuerst $u^{p^m} = \alpha \in \mathsf{P}$, dann ist das Polynom $t^{p^m} - \alpha$, dessen Nullstelle u ist, in $\mathsf{P}[t]$ irreduzibel. u ist demnach nur dann über P separabel, wenn $u \in \mathsf{P}$.

die ein $c \in \Sigma$ enthält, das (schon in Σ enthaltene) Element c von K zuordnet und wenn man der Restklasse mod $t^{p^n} - \alpha$, die das spezielle Polynom t enthält, das Element x von K zuordnet. Dieser Isomorphismus wird ja gerade beim Beweis der Wurzelexistenz jedes nichtkonstanten Polynoms in einem passenden Oberkörper verwendet [4]). Wir werden nun zuerst die höheren Differentialquotienten im Polynomring $\Sigma[t]$ ohne Schwierigkeit einführen und dann versuchen, durch Restklassenbildung mod $t^{p^n} - \alpha$ zur Differentialrechnung in K zu gelangen. Dabei wird die Inseparabilität von $t^{p^n} - \alpha$ wesentlich benutzt werden.

II.

Σ sei jetzt irgendein kommutativer Ring mit Einselement (z. B. der Körper Σ_n von vorhin). Es soll eine Theorie der höheren Differentialquotienten im Polynomring $\Sigma[t]$ entwickelt werden.

Bei Charakteristik 0 definiert man bekanntlich

$$\frac{d}{dt} t^r = r t^{r-1}, \quad \frac{d}{dt} \sum_r c_r t^r = \sum_r c_r r t^{r-1}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^k}{dt^k} t^r = r(r-1)\cdots(r-(k-1))\, t^{r-k}.$$

Aber die Koeffizienten $r(r-1)\cdots(r-(k-1)) = \binom{r}{k} k!$ sind für $k \geqq p$ alle durch p teilbar. Deshalb ist es bei Charakteristik $p > 0$ praktisch, nicht die k-te Ableitung $\frac{d^k}{dt^k}$, sondern den Ausdruck $D^k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}$ von den Polynomringen mit der Charakteristik 0 zu übertragen. So kommt man zu der

Definition.

$$D_t^k t^r = \binom{r}{k} t^{r-k}, \qquad D_t^k \sum_r c_r t^r = \sum_r c_r \binom{r}{k} t^{r-k}.$$

Wir haben an das D^k einen Index t angehängt, zum Zeichen, daß nach t differenziert wird. D_t^k ist als Operation im Polynomring $\Sigma[t]$ erklärt; wir haben uns zu überzeugen, daß es wirklich im wesentlichen die Eigenschaften hat, die dem $\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}$ bei Charakteristik 0 zukommen.

Trivial sind die Rechenregeln:

(1) $$D_t^k(f+g) = D_t^k f + D_t^k g.$$

(2) $$D_t^k(cf) = c D^k f \quad (c \in \Sigma).$$

(3) $$D_t^k c = 0 \quad (c \in \Sigma).$$

Ferner gilt die Leibnizsche Regel:

(4) $$D_t^k(fg) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i f \cdot D_t^{k-i} g.$$

---

[4]) S. z. B. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, dieses Journal 137 (1910), § 6.

Beweis. Nach (1) und (2) genügt es, (4) nur für $f = t^r$, $g = t^s$ nachzuweisen. Es ist aber

$$D_t^k(t^r t^s) = \binom{r+s}{k} t^{r+s-k},$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_t^i t^r \cdot D_t^{k-i} t^s = \sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} t^{r-i} \binom{s}{k-i} t^{s-k+i},$$

und bekanntlich ist

$$\binom{r+s}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{r}{i} \binom{s}{k-i}.$$

Hieraus folgt

$$D_t^k(f_1 \cdots f_r) = \sum_{\substack{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_r = k \\ \varkappa \geqq 0}} D_t^{\varkappa_1} f_1 \cdots D_t^{\varkappa_r} f_r \tag{5}$$

sofort durch Induktion nach r.

$$D_t^k f(g(t)) = \sum_{i=1}^{k} D_{g(t)}^i f(g(t)) \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g \qquad (k > 0). \tag{6}$$

Hierin ist $u = g(t)$ in ein Polynom $f(u)$ eingesetzt zu denken, es handelt sich also um die *Kettenregel* für höhere Ableitungen. Unter $D_g^i f$ ist natürlich $D_u^i f(u)|_{u=g(t)}$ zu verstehen.

Beweis. Es genügt, $f(u) = u^r$ anzunehmen. Nach (5) ist dann

$$D_t^k g(t)^r = \sum_{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_r = k} D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g.$$

Rechts bezeichnen wir in jedem Summanden, ohne die Reihenfolge zu stören, die positiven unter den $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Dann ist $1 \leqq i \leqq k$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k$ und

$$D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g = g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g.$$

Aber jedes Glied $g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g$ $(1 \leqq i \leqq k,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k,\ \lambda > 0)$ entsteht aus genau $\binom{r}{i}$ Gliedern $D_t^{\varkappa_1} g \cdots D_t^{\varkappa_r} g$ [5]. Daher ist

$$D_t^k g^r = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} \binom{r}{i} g^{r-i} D_t^{\lambda_1} g \cdots D_t^{\lambda_i} g.$$

Es ist aber

$$\binom{r}{i} g^{r-i} = D_g^i g^r.$$

Schließlich sei $F(t, u)$ ein Polynom in zwei Unbestimmten. Dann kann man einerseits F „partiell" nach t und nach u differenzieren, andererseits kann man $u = t$ setzen und das entstehende Polynom differenzieren. Hier gilt nun die *Spaltungsregel* [6])

$$D_t^k F(t, t) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i D_u^{k-i} F(t, u)|_{u=t}. \tag{7}$$

---

[5]) Denn auf $\binom{r}{i}$ verschiedene Arten kann man die Reihe $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ durch $r - i$ Nullen zu einer Reihe $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ auffüllen.

[6]) Behmann, Zur Technik des Differenzierens, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **40** (1931), S. 160—162, für $k = 1$.

Beweis. Nach (1) und (2) genügt es, (7) für $F(t, u) = t^r u^s$ zu beweisen. Dann reduziert sich (7) aber auf (4).

Durch Kombination von (6) und (7) erhält man die explizite Formel für die Ableitungen eines zusammengesetzten Polynoms $F(f(t), g(t))$: man braucht nur (7) auf $F(f(t), g(u))$ anzuwenden und die höheren partiellen Ableitungen dieses Polynoms nach (6) zu berechnen.

Damit sind die Hauptrechenregeln für die höheren Ableitungen im Polynomring ohne jede Charakteristikvoraussetzung abgeleitet.

III.

Kehren wir jetzt zu der Fragestellung vom Ende des ersten Teils der Arbeit zurück! Es sei also ein Körper Σ der Charakteristik $p > 0$ vorgelegt, und K sei ein inseparabler Oberkörper $K = \Sigma(x)$ von Σ, x genüge über Σ der irreduziblen Gleichung $t^{p^n} - \alpha = 0$. Wie schon dort ausgeführt wurde, ist $K \cong \Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ i. b. a. [7]) Σ.

Es ist unser Ziel, die D_t^k aus dem Polynomring $\Sigma[t]$ in den Restklassenring $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ und von dort nach K zu übertragen. Dazu müssen wir erst die $D_t^k(t^{p^n} - \alpha)$ berechnen.

Es ist nach Definition

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha) = \binom{p^n}{k} t^{p^n-k} \qquad (k > 0).$$

Für $k > p^n$ ist natürlich $\binom{p^n}{k} = 0$, dagegen ist $\binom{p^n}{p^n} = 1$. Für $1 \leqq k \leqq p^n - 1$ ist schließlich

$$\binom{p^n}{k} = \binom{p^n - 1}{k - 1} \frac{p^n}{k} \equiv 0 \pmod p.$$

Daher ist

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p^n - 1 \text{ und } k > p^n),$$

dagegen

$$D_t^{p^n}(t^{p^n} - \alpha) = 1.$$

Hieraus folgt nach (4) für $0 \leqq k \leqq p^n - 1$:

$$D_t^k(t^{p^n} - \alpha) h(t) = \sum_{i=0}^{k} D_t^i(t^{p^n} - \alpha) \cdot D_t^{k-i} h(t) = (t^{p^n} - \alpha) D_t^k h(t),$$

der Operator D_t^k führt also für $k < p^n$ ein durch $t^{p^n} - \alpha$ teilbares Polynom stets wieder in ein ebensolches Polynom über. Man kann dasselbe auch so ausdrücken:

Aus $f(t) \equiv g(t) \pmod{t^{p^n} - \alpha}$ folgt

(8) $$D_t^k f(t) \equiv D_t^k g(t) \pmod{t^{p^n} - \alpha} \qquad (k < p^n).$$

Für $k \geqq p^n$ ist dagegen z. B.

$$D_t^k t^{k-p^n}(t^{p^n} - \alpha) = 1,$$

die Einschränkung $k < p^n$ in (8) war also durchaus notwendig.

Nun ordnen wir jedem $f(t) \in \Sigma[t]$ seine Restklasse $\overline{f(t)}$ mod $t^{p^n} - \alpha$ zu, d. i. die Menge aller mod $t^{p^n} - \alpha$ zu $f(t)$ kongruenten Polynome. So entsteht der Restklassenkörper

[7]) In bezug auf.

$\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$. *Für $k < p^n$ setzen wir*

$$D_{\bar{t}}^k \overline{f(t)} = \overline{D_t^k f(t)}.$$

Diese Definition ist *widerspruchsfrei*, denn aus

$$\overline{f(t)} = \overline{g(t)}$$

folgt nach (8)

$$\overline{D_t^k f(t)} = \overline{D_t^k g(t)} \qquad (k < p^n).$$

Die Rechenregeln (1) bis (5) übertragen sich ohne weiteres in den Restklassenkörper. Auf (6) und (7) müssen wir nachher noch eingehen.

Der Übergang zu K ist nun klar: *Bei dem schon mehrfach erwähnten Isomorphismus $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha \cong K$ möge dem Operator $D_{\bar{t}}^k$ in $\Sigma[t]/t^{p^n} - \alpha$ der Operator D_x^k entsprechen* ($k < p^n$). In Formeln sieht das so aus: Für jedes Polynom $f(t) \in \Sigma[t]$ werde definiert:

$$D_x^k f(x) = D_t^k f(t)|_{t=x} \qquad (k < p^n).$$

K besteht ja gerade aus allen Ausdrücken $f(x)$ ($f(t) \in \Sigma[t]$), wo es auf $f(t)$ genau nur mod $t^{p^n} - \alpha$ ankommt. Jedem solchen $f(x) \in K$ wird durch unsere Definition ein $D_x^k f(x)$ zugeordnet, und zwar, wie bewiesen, eindeutig zugeordnet. Wieder gelten ohne weiteres (1) — (5), worin jetzt nur t durch x zu ersetzen ist.

Versuchen wir nun, die Kettenregel (6) aus dem Polynomring nach K zu übertragen! Da ist natürlich zu beachten, daß man wohl ein Polynom in ein anderes einsetzen kann, daß man mit Körperelementen jedoch etwas vorsichtiger umgehen muß. Der Sinn der Kettenregel kann also nur der sein:

y und z seien Elemente von K. Dann kann man sicher y in der Form

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma[t]$$

darstellen. Wir wollen annehmen, es sei auch eine Darstellung

$$z = f(y), \qquad f(t) \in \Sigma[t]$$

möglich, d. h. es sei $z \in \Sigma(y)$. Wegen $y^{p^n} \in \Sigma$ genügt dann y einer über Σ irreduziblen Gleichung $y^{p^m} - \beta = 0$ ($0 \leqq m \leqq n$)[3]). In $\Sigma(y)$ sind dann also die Ableitungen $D_y^0, \ldots, D_y^{p^m-1}$ erklärt. *Aus der Gültigkeit von* (6) *im Polynomring folgt nun durch Übergang zu den Restklassen sofort*

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y \qquad (k = 1, \ldots, p^m - 1).$$

Diese Kettenregel gilt insbesondere dann, wenn $K = \Sigma(x) = \Sigma(y)$ ist[8]), und zwar ist sie dann für $k = 1, \ldots, p^n - 1$ anwendbar. Wir wollen dafür gleich zwei Kriterien aufstellen.

Dann und nur dann ist $\Sigma(x) = \Sigma(y)$, wenn y nicht in $\Sigma(x^p)$ liegt. „Nur dann" ist trivial; wäre $\Sigma(y) < \Sigma(x)$, so hätte $\Sigma(y)$ über Σ einen Grad $p^m < p^n$, es wäre schon $y^{p^{n-1}} \in \Sigma$[3]). Entwickelt man nun y:

$$y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r x^r,$$

so sieht man, daß $y^{p^{n-1}} \in \Sigma$ nur dann gelten kann, wenn alle c_r für $r \not\equiv 0 \pmod p$ verschwinden, wenn also $y \in \Sigma(x^p)$ ist.

[8]) Dann hat nämlich $\Sigma(y)$ über Σ den Grad p^n, während y^{p^n} in Σ liegt, deshalb muß in diesem Falle $t^{p^n} - y^{p^n}$ selbst irreduzibel sein.

Dann und nur dann ist $\Sigma(x) = \Sigma(y)$, *wenn* $D_x^1 y \neq 0$ *ist.* Aus

$$y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r x^r$$

folgt nämlich

$$D_x^1 y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r r x^r .$$

Dann und nur dann ist $y \in \Sigma(x^p)$, wenn alle $rc_r = 0$ sind.

Es bedarf wohl keiner besonderen Begründung, daß man durch Kombination von (6) und (7) sofort die expliziten Formeln erhält, nach denen man eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ mit Koeffizienten aus Σ „k-mal differenziert" ($k < p^n$), und daß man aus diesen Formeln sukzessive $D_x^1 y, \ldots, D_x^{p^n-1} y$ berechnen kann, sofern $D_u^1 F(t, u)\big|_{\substack{t=x\\u=y}} \neq 0$.

IV.

Nachdem nun die Differentialrechnung in beliebigen rein inseparablen einfach algebraischen Körpererweiterungen [9]) begründet worden ist, wenden wir uns wieder den speziellen zu Anfang betrachteten Körpern, den Funktionenkörpern, zu. Es war K ein separabler endlicher Oberkörper des Körpers $\Omega(x)$, der seinerseits transzendent über Ω war. Wir haben damals eine monoton abnehmende Folge $\Sigma_0 = K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots$ von Unterkörpern in K erklärt: Σ_n war das Kompositum von Ω und K^{p^n}, also birational invariant. Es ist dann $K = \Sigma_n(x)$, wo x der über Σ_n irreduziblen Gleichung

$$t^{p^n} - \alpha = 0 \qquad\qquad (\alpha = x^{p^n} \in \Sigma_n)$$

genügt. Wir können also in dem Oberkörper K von Σ_n all die eben angestellten Überlegungen durchführen und gelangen zu Operationen D_x^k ($k = 0, 1, \ldots, p^n - 1$), die die oben aufgezählten Eigenschaften haben. In Formeln lautet die Definition so:

Ist

$$y = \sum_r c_r x^r \qquad\qquad (c_r \in \Sigma_n),$$

so sei

$$D_x^k y = \sum_r c_r \binom{r}{k} x^{r-k} \qquad\qquad (k < p^n).$$

Dazu müssen noch einige Bemerkungen gemacht werden.

D_x^k wurde eingeführt, indem K als einfach algebraische rein inseparable Erweiterung von Σ_n angesehen wurde. Dabei war nur die eine Bedingung $k < p^n$ gestellt. Für jedes feste k gibt es aber unendlich viele n, die dieser Bedingung genügen. Wir haben uns daher zu überzeugen, daß $D_x^k y$ von dem gewählten n nicht abhängt.

In der Tat: Ist $k < p^n$ und $k < p^m$ und etwa $n < m$, so kann man jedes $y \in K$ in der Form

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma_m[t]$$

darstellen. Von selbst ist dann auch

$$y = g(x), \qquad g(t) \in \Sigma_n[t].$$

---

[9]) K heißt über Σ rein inseparabel, wenn K/Σ algebraisch ist und jedes in bezug auf Σ separable Element von K in Σ liegt. Eine einfache algebraische Erweiterung $\Sigma(x)$ von Σ ist dann und nur dann ein rein inseparabler Oberkörper von Σ, wenn eine p^n-te Potenz von x in Σ liegt.

Denn für $n < m$ ist ja $\Sigma_n > \Sigma_m$. Dann ist aber

$$D_x^k y = D_t^k g(t)\big|_{t=x},$$

einerlei ob K als Oberkörper von Σ_n oder von Σ_m betrachtet wird.

Obgleich wir lauter körpertheoretische Überlegungen angestellt haben, ergibt sich nachträglich, daß $D_x^k y$ gar nicht von dem Körper K, sondern nur von der zwischen x und y über Ω bestehenden irreduziblen Gleichung $F(x, y) = 0$, die in y separabel sein sollte, abhängt. Man kann dies einsehen, indem man nach (7) und (6) die $D_x^1 y, D_x^2 y, \ldots$ aus $F(x, y) = 0$ berechnet. Besser ist aber folgender Beweis:

Sei $K' = \Omega(x, y)$, dann ist sicher $K'/\Omega(x)$ separabel und $K \geqq K'$. Ferner sei Σ_n' das Kompositum von Ω und K'^{p^n}. Ist dann

$$y = g(x), \quad g(t) \in \Sigma_n'[t],$$

so ist auch

$$y = g(x), \quad g(t) \in \Sigma_n[t].$$

Wie oben folgt, daß $D_x^k y$ in K und in K' denselben Wert

$$D_x^k y = D_t^k g(t)\big|_{t=x}$$

hat.

Im Funktionenkörper K legt man vor allem auf das Verhalten aller Bildungen bei birationalen Transformationen Wert. Neben x haben wir also die Gesamtheit aller $y \in K$ zu betrachten, für die $K/\Omega(y)$ separabel ist. Ist nun $F(x, y) = 0$, $F(t, u)$ in $\Omega[t, u]$ irreduzibel, so ist

$$D_t^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x\\u=y}} + D_x^1 y \cdot D_u^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x\\u=y}} = 0.$$

Weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist $D_u^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x\\u=y}} \neq 0$. Daß aber $K/\Omega(y)$ separabel sei, besagt genau Separabilität von $\Omega(x, y)/\Omega(y)$ oder $D_t^1 F(t, u)\Big|_{\substack{t=x\\u=y}} \neq 0$. *Dann und nur dann ist also $K/\Omega(y)$ separabel, wenn $D_x^1 y \neq 0$* ist.

$D_x^1 y \neq 0$ war aber genau die Bedingung für $\Sigma_n(y) = K$. Nach den oben im Falle allgemeiner Körper über die Kettenregel gemachten Ausführungen gilt also

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k\\ \lambda > 0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y$$

ganz allgemein, sowie $K/\Omega(x)$ und $K/\Omega(y)$ separabel ist.

Durch genauere Betrachtung des Gliedes mit $i = k$ in dieser Formel erhält man ohne weiteres die bekannte Transformationsformel für die Wronskische Determinante, die ein Hauptziel der Arbeit von Hasse war [1]).

Der *genaue Konstantenkörper* Ω^* von K ist als Gesamtheit aller i. b. a. Ω algebraischen Elemente von K definiert. Weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist offenbar auch Ω^*/Ω separabel. Jedes $y \in \Omega^*$ genügt also einer irreduziblen Gleichung $F(u) = 0$ mit Koeffizienten aus Ω, wo

$$D_u^1 F(u)\big|_{u=y} \neq 0$$

ist; hieraus folgt, daß alle $D_x^k y = 0$ sind.

y liege nun nicht in Ω^*. Es gibt dann einen *kleinsten Exponenten e so, daß $\Omega(y)(x^{p^e})/\Omega(y)$ separabel ist.* Offenbar ist dies e zugleich der kleinste Exponent, für den

$\Sigma_e/\Omega(y)$ separabel ist, denn es ist ja

$$\Sigma_e = \Omega(x^{p^e}, \vartheta^{p^e})/\Omega(x^{p^e}) \text{ separabel.}$$

e ist auch die größte Zahl, für die y in Σ_e liegt.

Beweis. Bekanntlich ist $\Omega(x^{p^e})(y)/\Omega(x^{p^e})$ separabel [10]), erst recht [2]) ist $\Sigma_e(y)/\Sigma_e$ separabel. y ist aber eine p^e-te Wurzel aus Σ_e, darum ist [3]) $y \in \Sigma_e$.

Wäre $y \in \Sigma_{e+1}$, so wäre [2]) Σ_e/Σ_{e+1} separabel. Denn Σ_e ist über $\Omega(y)$ separabel.

Nach (3) ist $D_x^k y = 0$ für $1 \leqq k \leqq p^e - 1$. Dagegen ist

$$D_x^{p^e} y \neq 0.$$

Beweis. Es sei

$$y = \sum_{r=0}^{p-1} c_r x^{rp^e} \qquad (c_r \in \Sigma_{e+1}).$$

Dann ist

$$D_x^{p^e} y = \sum_{r=1}^{p-1} c_r \binom{rp^e}{p^e} x^{(r-1)p^e};$$

weil y nicht in Σ_{e+1} liegt, sind nicht alle $c_1, \ldots, c_{p-1}$ gleich 0, und bekanntlich ist [11])

$$\binom{rp^e}{p^e} \not\equiv 0 \pmod p \qquad (r = 1, \ldots, p-1).$$

Zusammengefaßt:

Liegt y nicht in Ω^*, so gibt es ein e, für das y zwar in Σ_e, nicht aber in Σ_{e+1} liegt. Dies e ist auch das kleinste e, für das $\Sigma_e/\Omega(y)$ separabel ist. p^e ist die kleinste positive Zahl k mit $D_x^k y \neq 0$.

Ω^* ist demnach der Durchschnitt aller Σ_n und zugleich der Körper aller der y, für die $D_x^k y = 0$ für alle $k > 0$ gilt.

Hieraus ergibt sich nun die folgende allgemeinste Form der Kettenregel:

Ist e zu $y \notin \Omega^*$ wie eben bestimmt und liegt z in Σ_e, so gilt

$$D_x^k z = \sum_{i=1}^{k} D_y^i z \sum_{\substack{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = k \\ \lambda > 0}} D_x^{\lambda_1} y \cdots D_x^{\lambda_i} y \qquad (k > 0).$$

V.

Zum Schluß wollen wir noch kurz auf die $\mathfrak{p}$-adischen Erweiterungskörper $K_\mathfrak{p}$ des Funktionenkörpers K eingehen, das sind die perfekten Hüllen von K hinsichtlich der Bewertungen, die den Konstantenkörper trivial bewerten. Wir setzen dabei voraus, daß der *Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}$ *über* Ω *separabel* sei.

$K_\mathfrak{p}$ hat dann folgende Struktur: *π sei eine Ortsuniformisierende an der Primstelle $\mathfrak{p}$, d. h. $\mathfrak{p}$ gehe genau einmal in π auf. $\Omega^\mathfrak{p}$ sei der Körper aller i. b. a. Ω algebraischen Elemente von K, $\Omega^\mathfrak{p}$ ist dann isomorph i. b. a. Ω^* zum Restklassenkörper* mod $\mathfrak{p}$. *Und $K_\mathfrak{p}$ ist dann der Körper aller formalen Potenzreihen $\sum_{r=w}^{\infty} c_r \pi^r$ $(c_r \in \Omega^\mathfrak{p})$* [12]).

[10]) Denn weil zuerst x^{p^e} über $\Omega(y)$ separabel sein sollte, besteht zwischen x und y eine Gleichung der Form $G(x^{p^e}, y) = 0$, $G(t^{p^e}, u)$ in $\Omega[t, u]$ irreduzibel; weil $K/\Omega(x)$ separabel ist, ist $D_u^1 G \neq 0$.

[11]) Man entwickle z. B. $(a + b)^{rp^e} \equiv (a^{p^e} + b^{p^e})^r \pmod p$ nach dem binomischen Satz.

[12]) S. Anm. [2]) der unter 1) zitierten Arbeit.

$\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ sei der Körper aller formalen Potenzreihen $\sum_{h=v}^{\infty} c_{hp^n}\pi^{hp^n}$ $(c \in \Omega^{\mathfrak{p}})$. Wegen der eindeutigen Zerlegung

$$\sum_r c_r \pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1} \left(\sum_h c_{hp^n+s} \pi^{hp^n} \right) \pi^s$$

ist

$$K = \Sigma_{n\mathfrak{p}} + \Sigma_{n\mathfrak{p}}\pi + \cdots + \Sigma_{n\mathfrak{p}}\pi^{p^n-1},$$

d. h. $K = \Sigma_{n\mathfrak{p}}(\pi)$, wo π Nullstelle des in $\Sigma_{n\mathfrak{p}}[t]$ irreduziblen Polynoms $t^{p^n} - \pi^{p^n}$ ist. Wir können deshalb die bisher für K, Σ_n und x angestellten Überlegungen direkt auf $K_{\mathfrak{p}}$, $\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ und π übertragen und so eine Differentialrechnung in $K_{\mathfrak{p}}$ begründen.

Wenn Ω vollkommen ist, ist $\Sigma_{n\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}^{p^n}$. Im allgemeinen Fall ist wenigstens $\Sigma_{n\mathfrak{p}}$ die abgeschlossene Hülle des Kompositums von Ω und $K_{\mathfrak{p}}^{p^n}$ (und zugleich die abgeschlossene Hülle von Σ_n).

Wir wollen nun die expliziten Differentiationsformeln in $K_{\mathfrak{p}}$ aufstellen. Aus

$$\sum_r c_r \pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1} \left(\sum_h c_{hp^n+s} \pi^{hp^n} \right) \pi^s$$

folgt für $k < p^n$ nach Definition von D_π^k

$$D_\pi^k \sum_r c_r \pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1} \sum_h c_{hp^n+s} \pi^{hp^n} \binom{s}{k} \pi^{s-k}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\binom{hp^n+s}{k} \equiv \binom{s}{k} \pmod p \qquad (k < p^n)\ [13],$$

daher

$$D_\pi^k \sum_r c_r \pi^r = \sum_{s=0}^{p^n-1} \sum_h c_{hp^n+s} \binom{hp^n+s}{k} \pi^{hp^n} \pi^{s-k}$$

oder

$$D_\pi^k \sum_r c_r \pi^r = \sum_r c_r \binom{r}{k} \pi^{r-k}.$$

Das ist die gesuchte Formel.

x sei wie immer in K so gewählt, daß $K/\Omega(x)$ separabel ist. Wir nehmen an, π liege nicht nur in $K_{\mathfrak{p}}$, sondern auch in K. Dann besteht eine algebraische Gleichung

$$F(x, \pi) = 0, \qquad F(t, u) \text{ in } \Omega[t, u] \text{ irreduzibel.}$$

Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen $D_t^1 F(t, u)\big|_{\substack{t=x\\u=\pi}}$ und $D_u^1 F(t, u)\big|_{\substack{t=x\\u=\pi}}$ kurz mit F_x bzw. F_π. Weil $\Omega(x)(\pi)/\Omega(x)$ separabel ist, ist $F_\pi \neq 0$. Es ist aber

$$F_x \cdot D_\pi^1 x + F_\pi = 0,$$

worin $D_\pi^1 x$ in $K_{\mathfrak{p}}$ zu berechnen ist. Hieraus folgt erstens $F_x \neq 0$, also ist $K/\Omega(\pi)$ separabel. Zweitens folgt aber $D_\pi^1 x \neq 0$, man darf also auch in $K_{\mathfrak{p}}$ nach x differenzieren. D_x^k und D_π^k sind demnach beide sowohl in K wie in $K_{\mathfrak{p}}$ erklärte Operationen. Wir behaupten nun:

---

[13]) Z. B. wegen $(1+\pi)^{hp^n+s} = (1+\pi)^s (1 + h\pi^{p^n} + \cdots)$.

Für alle $y \in K$ hat $D_x^k y$ in K und in $K_{\mathfrak{p}}$ denselben Wert. Das gleiche gilt dann natürlich auch für $D_\pi^k y$, π ist ja selbst ein spezielles x.

Beweis. Wegen $K^{p^n} < K_{\mathfrak{p}}^{p^n} \leqq \Sigma_{n\mathfrak{p}}$ und $\Omega \leqq \Omega^{\mathfrak{p}} < \Sigma_{n\mathfrak{p}}$ ist $\Sigma_n \leqq \Sigma_{n\mathfrak{p}}$. Aus

$$y = \sum_r c_r x^r, \qquad c_r \in \Sigma_n$$

folgt daher

$$y = \sum_r c_r x^r, \qquad c_r \in \Sigma_{n\mathfrak{p}},$$

in K und in $K_{\mathfrak{p}}$ ergibt sich daraus derselbe Wert

$$D_x^k y = \sum_r c_r \binom{r}{k} x^{r-k} \qquad (k < p^n).$$

Zum Schluß beweisen wir noch einen trivialen Satz, der ganz deutlich den tiefen Unterschied zwischen unserer Differentialrechnung bei Charakteristik $p > 0$ und der klassischen Differentialrechnung zeigt.

Ist ein Differential des Funktionenkörpers $K_{\mathfrak{p}}$ auch nur an einer Stelle $\mathfrak{p}$ integrabel, so ist es auch in K integrabel.

Beweis. Wir schreiben das Differential in der Form $yd\pi$. π sei Ortsuniformisierende an der Stelle $\mathfrak{p}$, wo $yd\pi = d\bar{z}$ $(\bar{z} \in K_{\mathfrak{p}})$ sei. Ist

$$y = \sum_{r=0}^{p-1} c_r \pi^r, \qquad z = \sum_{r=0}^{p-1} d_r \pi^r \qquad (c_r \in \Sigma_1,\ d_r \in \Sigma_{1\mathfrak{p}}),$$

so ist $y = \sum_{r=0}^{p-1} d_r r \pi^{r-1}$, also $c_{p-1} = 0$. Darum ist $y = D_\pi^1 z$, $y\,d\pi = dz$ mit

$$z = \sum_{r=0}^{p-2} c_r (r+1)^{-1} \pi^{r+1} \in K.$$

Eingegangen 20. Dezember 1935.