Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. I.

Von *Arnold Scholz* in Kiel.

In zyklischen Zahlkörpern K/K_0 gilt der für Primzahlgrad von Furtwängler [1]), für beliebigen Grad von Hasse [2]) bewiesene Normenrestsatz, daß jede Zahl des Grundkörpers K_0, die in K Normenrest nach allen Idealen und auch nach den unendlichen Primstellen von K_0 ist, kurz gesagt: jeder *totale Normenrest* Norm einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus K ist.

(Eine Zahl ist Normenrest nach allen unendlichen Primstellen, wenn ihre absoluten Konjugierten, soweit reell, eine Vorzeichenverteilung aufweisen, die unter Normen vorkommt. — In abelschen Körpern K/K_0 ist eine Zahl β totaler Normenrest, wenn das Hassesche Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\beta, K/K_0}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ ist [2]).

Daß dieser Normenrestsatz schon für abelsche Körper vierten Grades nicht immer gilt, zeigte Hasse [3]) bei rationalem Grundkörper am Beispiel $(\sqrt{-3}, \sqrt{13})$, dessen quadratischer Teilkörper $(\sqrt{-39})$ eine Idealklasse der Ordnung 4 aufweist, was nach Rédei [4]) dadurch bedingt ist, daß 3 in $(\sqrt{13})$ und 13 in $(\sqrt{-3})$ voll zerfällt.

Daß die Ungültigkeit des Normenrestsatzes bei abelschen Körpern sogar eine häufige Erscheinung ist, die bereits bei Produkten zweier zyklischer Körper K_1, K_2 eines beliebigen Primzahlgrades l auftritt, nämlich bei verzweigungsfremden K_1, K_2 dann und nur dann, wenn die Diskriminantenteiler von K_1 und K_2 in K_2 und K_1 voll zerfallen — $K = K_1 K_2$ heiße dann ein Rédeikörper —, ist in einer Abhandlung [5]) von mir in verschärfter Form enthalten. (Schon für $k = 1$ wäre nämlich die linke Seite der dort genannten Ungleichung durch die rechte ausdrückbar, wenn r nicht nur totaler Normenrest, sondern auch Norm wäre.) Diese Vollzerfallsbedingung, gleichzeitig die Diskrepanz zwischen Normenresten [6]) und Normen, war das Kriterium dafür, daß sich K zu einem Zweigkörper vom Typus $(l, l; l)$ erweitern läßt,

---

1) Vgl. H. Hasse, Zahlbericht II (Reziprozitätsgesetz), Jahresber. D. M. V. Erg.-Bd. VI (1930), S. 38, § 8.

2) H. Hasse, Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol, Gött. Nachr. 1931, S. 64—69.

3) H. Hasse, a. a. O. [2]), S. 68.

4) L. Rédei, Über die Klassenzahl d. quadratischen Zahlkörpers, Math. Nat. Anz. d. Ung. Akad. 1931, S. 681, 707.

5) A. Scholz, Die Kreisklassenkörper vom Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. II, Math. Ann. **110** (1934), S. 633—649, im folgenden II genannt, insbes. Satz 3 (Hauptirrealitätskriterium); vgl. auch die vorangehende Note I, Math. Ann. **109** (1934), S. 161—190.

6) Den Zusatz *total* lassen wir weg, wo es dem Inhalt nach klar ist.

und bereits notwendig zur Bildung des kleinsten normalen nichtabelschen Teiles eines Zweigkörpers; dies ist ein Körper K' mit derjenigen nichtkommutativen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung l^3, deren Elemente S in der Mehrzahl die Ordnung l besitzen (durchweg $S^l = 1$ für $l > 2$; Diedergruppe und zugleich Zweiggruppe für $l = 2$); der Kommutator der beiden Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ ist dabei die Erzeugende der Gruppe von K'/K.

Wir wollen jetzt, ohne die Theorie aus I und II heranzuziehen, zunächst an einigen die Sachlage charakterisierenden Beispielen von abelschen Körpern $K = K_1 K_2$, wo K_1 und K_2 zwei zueinander verzweigungsfremde zyklische Körper l-ten Grades mit $l = 2, 3$ sind, klarmachen, daß in einem Rédeikörper K die totalen Normenreste nicht mit den Normen zusammenfallen, und wie man in diesem eine Idealgruppe vom Index l für einen Klassenkörper K'/K mit der obengenannten Gruppe $\mathfrak{G}$ über K_0 bilden kann. Ist dabei $\mathfrak{A}$ die zu K_1 gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} = \{A\}_{\mathfrak{G}}$ mit $\operatorname{Ord} A = (l, (S-1)^2)$, S erzeugende Substitution von K_1, so hat jede Erweiterung K'' von K_1, deren Relativgruppe S-operatorisomorph zu $\mathfrak{A}$ ist, eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe über K_0, wenn nur die in K_1 verzweigten Primideale sich in K'' nicht weiter verzweigen, d. h. $S^l = 1$ auch in $\mathfrak{G}$ gilt. Eine zu K_1 führerfremde und zu $\mathfrak{A}$ operatorisomorphe Klasseneinteilung in K_1 liefert also schon immer einen passenden Klassenkörper K'.

Die Diskrepanz zwischen Normen und Normenresten kann sich bereits bei den Einheiten äußern, oder es ist zwar noch jede Normenrest-Einheit eine Zahlnorm, wie beim Hasseschen Beispiel [3]) und den Konstruktionen in I und II 1, aber nicht mehr jeder Normenrest; im letzten Falle handelt es sich also um eine Eigenschaft von Hauptidealen.

Wir nennen nun in K_0 die Restklassengruppe der Normenreste nach den Zahlnormen überhaupt den (Gesamt-, Zahl-) *Knoten* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\alpha$ von K, innerhalb der Einheitengruppe von K_0 den *Einheitsknoten* $\mathfrak{K}_\varepsilon$ von K und bei den Hauptidealen die Gruppe der aus Normenresten erzeugbaren nach den aus Zahlnormen erzeugbaren den *Idealknoten* $\mathfrak{K}_{(\alpha)}$ von K. Es ist der Einheitsknoten einer Untergruppe des Gesamtknotens isomorph, deren Faktorgruppe der Idealknoten ist. Für die einzelnen Gruppenordnungen, die *Knotungen* k_α, k_ε, $k_{(\alpha)}$ gilt daher die Relation

$$(1) \qquad k_{(\alpha)} \cdot k_\varepsilon = k_\alpha .$$

($k_{(\alpha)} = 1$ ist gleichbedeutend damit, daß in K jede Klasse des Hauptgeschlechts sich aus $(S-1)$-ten Potenzklassen zusammensetzt.)

Bei rationalem Grundkörper ist für ungerades l immer $k_\varepsilon = 1$, und dann muß der Rédeikörper einen Idealknoten $\neq 1$ besitzen ($k_{(\alpha)} = l$), der so zustande kommt: ein gewisser totaler Normenrest γ ist zwar in K_1 und K_2, aber nicht mehr in K Hauptidealnorm, sondern dort nur Norm eines (ganzen oder gebrochenen) Ideals $\mathfrak{j}$, dessen Idealklasse, die ich in II, S. 645 Kommutatorklasse nannte, eine durch l teilbare Ordnung hat und in der Gruppe eines absoluten Klassenkörpers über K von obengenanntem Typus K' dem Kommutator zweier Trägheitssubstitutionen von K_1 und K_2 entspricht.

Bei irrationalem Grundkörper oder $l = 2$ besteht aber auch die Möglichkeit [7]) $k_{(\alpha)} = 1$, $k_\varepsilon = l$, die wir wegen ihrer größeren Versteckheit hier vorzugsweise betrachten wollen. Das Beispiel A der folgenden Tabelle von Rédeikörpern K entstammt einer ersten Suche nach $k_\varepsilon \neq 1$, die ich gemeinsam mit H. Nehrkorn anstellte.

Den Beispielen füge ich zum Abschluß einen kurzen Beweis an, daß sich außer bei rationalem und imaginär-quadratischem K_0 für jedes l abelsche Körper K/K_0 vom Grade l^2 mit Einheitsknoten bilden lassen, wenn die Klassenzahl von K_0 nicht durch l teilbar

[7]) Angegeben in II, S. 646, vorletzter Satz; der letzte Satz muß gestrichen werden.

ist, und stets solche mit Idealknoten. Das Bildungsprinzip tritt schon bei den Beispielen A — G hervor; bei H muß es wegen gleichzeitiger Bildung von zueinander konjugierten K_1 und K_2 versagen.

K_0	K_1	K_2	K	$k_{(\alpha)}$	k_ε	k_α
(1)	$(\sqrt{13})$	$(\sqrt{17})$	A	1	2	2
$(\sqrt{-3})$	$(\sqrt[3]{17})$	$(\sqrt[3]{1+9\varrho})$	B	1	3	3
		O 73	C			
		$(\sqrt[3]{73})$	D	3	1	3
		$(\sqrt[3]{71})$	E			
		O 79	F			
$(\sqrt{17})$	$x^3 - 11x - 11 = 0$	O 61	G	1	3	3
$(\sqrt{-3})$	$(\sqrt[3]{2-3\varrho})$	$(\sqrt[3]{2-3\varrho^2})$	H	1	3	3

(ϱ dritte Einheitswurzel; OQ Kreiserweiterung mit dem kubischen Unterkörper der Q-ten Einheitswurzeln.)

A. Weil 13 biquadratischer Rest von 17, aber nicht umgekehrt, hat der dritte quadratische Unterkörper $K_3 = (\sqrt{221})$ von K die Zweierklassenzahl $h = 2$, im engeren Sinne 4, und es ist in ihm -1 keine Einheitsnorm [8]). Es ist daher $-1 = N(\mu)$ in K_3 nur für Zahlen $\mu = \mathfrak{j}^{S-1}$, wo $\mathfrak{j}$ selbst kein Hauptideal. Wegen $h = 2$ enthält $\mathfrak{j}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$, das im absoluten Klassenkörper K nicht zerfällt, in ungerader Potenz; $\mathfrak{p}^2 \neq 13, 17$. Also ist von K_3 aus μ in K nicht einmal Idealnorm. Demnach ist von K_0 aus auch -1 in K keine Zahlnorm. Wohl aber Normenrest; nämlich -1 ist Norm in K_1, K_2, also dort Normenrest und daher auch in K.

(Allgemein überträgt sich die Normenrest-Eigenschaft von den Komponenten K_1, K_2 auf K; vgl. Hasse, Bericht II, § 6, Formel (9). — Eine Einheit ist totaler Normenrest in K, wenn sie es nach dem Führer $\mathfrak{f}$ von K ist oder e-ter Potenzrest nach den Teilern von $\mathfrak{f}$ ist, die sich e-fach in K verzweigen.)

Der zur engeren Klasseneinteilung in $(\sqrt{221})$ gehörige imaginäre Klassenkörper K' hat die Diedergruppe achter Ordnung als absolute Galoisgruppe.

Zu B — F. Hier wird es sich entsprechend um die Normeigenschaft von ϱ in K handeln. Durch die Wahl von $K_1 = K_0(\sqrt[3]{17})$ mit Primidealführer $17 \equiv -1 \pmod 9$ erreichen wir jedenfalls, daß $\varrho = N(\varepsilon)$ ausfällt, wo ε die Grundeinheit in K_1 ist [9]). Ferner muß die leichter zu bestimmende Grundeinheit η des absolut kubischen Zahlkörpers $(\sqrt[3]{17})$ eine $(S-1)$-te Potenz von ε sein, wo S erzeugende Substitution von K_1/K_0 ist [10]).

[8]) A. Scholz, Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Z. **39** (1934), S. 95—111, insbes. S. 97.

[9]) A. Scholz, Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm, J. f. M. **161** (1929), S. 201—207, insbes. S. 205, 2. und 1., zweiter Absatz.

[10]) A. Scholz, Idealklassen und Einheiten in kubischen Körpern, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), S. 211—222; hier S. 213.

Für die Wahl von K_2 ergeben sich folgende Möglichkeiten: Soll der Führer von K_2 ebenfalls ein Primideal $\mathfrak{q}$ sein, so muß ϱ kubischer Rest mod $\mathfrak{q}$ sein, d. h. $N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod 9$. Wegen $\varrho = N(\varepsilon)$ in K_1 muß dort, da $\mathfrak{q}$ voll zerfallen soll, ε ein $(3, S-1)$-ter Potenzrest werden:

$$(2) \qquad \varepsilon \equiv \mu^{S-1} \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}} \longleftrightarrow \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}}\right)_3 = 1\,,$$

und dann hat ε nach den drei Primteilern von $\mathfrak{q}$ entweder denselben kubischen Restcharakter, nämlich, wenn sogar

$$(3) \qquad \varepsilon \equiv \mu^{(S-1)^2} \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}}$$

darstellbar ist, sonst verschiedene Restcharaktere $1, \varrho, \varrho^2$ [11]).

Definieren wir als *kubischen Rang* $r(\alpha, \mathfrak{q})$ einer zu $\mathfrak{q}$ primen Zahl α mod $\mathfrak{q}$ den Rang der Restklassengruppe aller primen Reste mod $\mathfrak{q}$ nach den durch $\alpha^a \nu^3$ ausdrückbaren, so hat α den Rang 0, wenn (2) nicht gilt; den Rang 1, wenn (2), aber nicht (3) gilt; den Rang 2, wenn (3) gilt, aber α kein kubischer Rest ist; den Rang 3, wenn α kubischer Rest ist. Wir werden uns meistens dieser kurzen Ausdrucksweise bedienen.

Wir erhalten nun, wenn auch umgekehrt $\mathfrak{p} = 17$ in K_2 voll zerfällt, in K einen Einheitsknoten der Ordnung 3, wenn oben $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ ist, hingegen einen Idealknoten für $r > 1$:

Es ist ϱ Normenrest in K, weil Norm in K_1 und K_2. Gilt auch $\varrho = N(\gamma)$ in K, so muß die Teilnorm von γ nach K_1

$$(4) \qquad N_{K_1}(\gamma) = \varepsilon \alpha^{S-1}\,, \qquad \alpha < K_1$$

ausfallen und zwar ein kubischer Rest mod $\mathfrak{q}$ sein. Hätte ε hier nur den Rang 1, so müßte $r(\alpha) = 0$ sein. Für $r(\alpha, \mathfrak{q}) = 0$ gehörte aber α nicht einmal zur Idealgruppe von K/K_1, enthielte also wenigstens einen Primidealpotenzteiler $\mathfrak{z}$, der in K nicht Idealnorm ist, und dieser könnte auch aus α^{S-1} nicht herausfallen; denn sonst müßte er gegen S invariant sein; invariante Primideale sind aber, da K_0 einklassig, nur die in K_1 unzerfallenen aus K_0, die dann in K zerfallen müssen, und $17^{1/3}$, das aber in K voll zerfällt. Für $r(\alpha, \mathfrak{q}) = 0$ ist also auch α^{S-1} nicht Idealnorm. — Also muß schon $r(\varepsilon) \geqq 2$ sein, damit eine Gleichung (4) gilt; $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ führt demnach auf einen Einheitsknoten.

$r(\varepsilon, \mathfrak{q}) > 1$ liefert hingegen einen Idealknoten: Da die Idealgruppe von K/K_1 aus den (α) mit $r(\alpha, \mathfrak{q}) > 0$ besteht, läßt sich ein $\beta = N(\mathfrak{k})$ in K mit $r(\beta, \mathfrak{q}) = 1$ bestimmen. Für eine passende symbolische Potenz α von β ist dann $\varepsilon \alpha^{S-1} \equiv \nu^3$, d. h. Normenrest mod $\mathfrak{q}$, und dann, als Idealnorm, totaler Normenrest. Somit gilt (4), und es ist $k_\varepsilon = 1$, weil $\varrho = N(\gamma)$. Wegen $r(\beta) = 1$ gilt aber für β anstatt ε keine Gleichung (4), und die K_0-Norm $\beta_0 = \beta^{1+S+S^2} \equiv \nu^3 \pmod{\mathfrak{q}}$ ist dann Normenrest-Nichtnorm in K, was zu $k_{(\alpha)} = k_\alpha = 3$ führt.

(Beide Male wird der Gesamtknoten in seiner Abbildung in K_1 durch die Klasseneinteilung der Zahlen mit $r \geqq 1$ nach denen mit $r \geqq 2$ geliefert!)

Die Beschaffenheit des Knotens bestimmt nun die Art der Erweiterungen K' mit der Gruppe $\mathfrak{S}$ (s. o). Für $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) > 1$ bilden die Ideale (α') mit $r(\alpha', \mathfrak{q}) > 1$ eine Gruppe, zu der ein Klassenkörper K' gehört, der eine unverzweigte Erweiterung von K ist, die wir oben schon nannten. Diese spezielle Erweiterung K'/K läßt sich noch so variieren, daß man sie mit einer zu K fremden Kreis- oder K_0-Ringklassenkörperer-

[11]) Vgl. A. Scholz — O. Taussky, Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf den Klassenkörperturm, J. f. M. **171** (1934), S. 19—41, insbes. S. 21, 22.

weiterung durchkreuzt. — Für $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ erhält man andersgeartete Erweiterungen K': es ist hier schon die Klassenzahl von K nicht durch 3 teilbar, weil in K_1 die Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{q}$ zyklisch ist [9]), und K'/K kann als Klassenkörper mit irgendeiner invarianten Idealgruppe vom Index 3 gewählt werden, die ein Ideal (γ) mit $N(\gamma) \equiv \varepsilon$ in K_1, $\equiv \varrho$ in K_0, *nicht* enthält. Als Führer für K'/K kommen hier alle zu $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ fremden K_0-Ideale in Frage, die einen Primteiler enthalten, dessen absolute Norm $\equiv 4, 7 \bmod 9$ ist. Im Falle eines Primführers $\mathfrak{f}$ (z. B. $\mathfrak{f} = 5$) läßt sich die zu K' gehörige Klasseneinteilung in K_1 so herstellen: gehört $\mathfrak{a}_1$ in K_1 zur Idealgruppe von K, so läßt sich $\mathfrak{a}_1$ wegen $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ durch eine Zahl α_1 von einem Range > 1 erzeugen; dann gehört weiter (α_1) zur Idealgruppe von K', wenn $r(\alpha_1, \mathfrak{f}) > 0$.

Betrachten wir jetzt mit Rücksicht auf die Beispiele C, D, F unserer Tabelle den Fall eines zusammengesetzten Führers $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_m$ für K_2/K_0! Hier lassen sich in K_1 sogar verschiedene Rangfunktionen $r(\alpha)$ so bilden, daß wieder $r(\alpha) > 0$ für die α der Idealgruppe von K/K_1 ist und die Faktorgruppe nach den α' mit $r(\alpha') > 1$ operatorisomorph mit der obengenannten Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ ist. Und zwar führen wir, unsern Beispielen angepaßt, einen Rang so ein, daß wir, wenn gerade das kubische Potenzrestsymbol mit dem Nenner $\mathfrak{q}_1^{c_1} \cdots \mathfrak{q}_m^{c_m}$ die zu K_2/K_0 gehörige Idealgruppe ausscheidet, in K_1 ein ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ mit der Norm $\Pi \mathfrak{q}_\mu^{c_\mu}$ wählen und dann den Rang von α in K_1 durch die Verteilung der kubischen Restcharaktere

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}^S}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{c}^{S^2}}\right) \tag{5}$$

wie oben im Primfalle $\mathfrak{q}$ bestimmen. (Wir erhalten 3^{m-1} wesentlich verschiedene Möglichkeiten, eine Funktion $r(\alpha)$ zu bestimmen, wenn wir zwei Funktionen $r(\alpha)$ unserer Fragestellung gemäß als äquivalent ansehen, sobald die α' mit $r(\alpha') \geqq 2$ bei beiden übereinstimmen.)

Ob $r(\alpha) = 0$ oder > 0, lag schon durch K_2 fest. Ist dann β eine Zahl, für die einzeln $r(\beta, \mathfrak{q}_\mu) \geqq k$ ist ($\mu = 1, \ldots m$), so gilt

$$\beta \equiv \mu^{(S-1)^k} \nu^3 \qquad (\bmod \mathfrak{q})\,,$$

und es liegt bereits durch K_2 fest, ob $r(\beta) = k$ oder $> k$.

Nun mehr erhalten wir folgendes

Kriterium. K besitzt einen Einheitsknoten, wenn in K_1 einzeln $r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) \geqq 1$ und $r(\varepsilon) = 1$ ist, sonst einen Idealknoten.

Beweis. $r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) \geqq 1$ bedeutete nur, daß ϱ Norm in K_2 ist, ist also notwendig dafür, daß ϱ Normenrest in K ist, und dies wiederum für $k_\varepsilon > 1$. Ist unter dieser Bedingung $r(\varepsilon) = 1$, so folgt wörtlich wie oben die Existenz eines Einheitsknotens.

Für $r(\varepsilon) \geqq 2$ hingegen bilden die α' mit $r(\alpha') \geqq 2$ eine Idealgruppe für einen K', der über K unverzweigt ist. Dasselbe gilt im Falle $\Pi\, r(\varepsilon, \mathfrak{q}_\mu) = 0$ für das Drittel aller Rangfunktionen mit $r(\varepsilon) \geqq 2$ (vgl. F). Der Nachweis der Existenz eines Idealknotens aus der Existenz der Idealgruppe $\{(\alpha')\}$, der noch zu liefern wäre, gelingt mit einem β, für das etwa $r(\beta, \mathfrak{q}_1) = 1$ und sonst $r(\beta, \mathfrak{q}_\mu) > 1$, genau wie oben hinter (4).

Infolge des kubischen Reziprozitätsgesetzes zerfällt bei den Beispielen B — F, die wir jetzt einzeln betrachten werden, schon immer 17 in K_2, wenn die $\mathfrak{q}_\mu$ in K_1 zerfallen.

B. Die Lösung (18, 7) der diophantischen Gleichung $x^3 - 17y^3 = 1$ liefert uns die Einheit

$$\eta = 18 - 7\sqrt[3]{17}\,.$$

Der Führer $1 + 9\varrho$ von K_2 hat die Norm 73. Es gilt

$$11^3 \equiv 17; \quad 8^3 \equiv -9^3 \equiv 1 \pmod{73}.$$

Das liefert

$$\eta \equiv 14, \quad -14, \quad 54$$

nach den Primteilern von 73, und diese Zahlen haben alle denselben nichtkubischen Restcharakter mod $1 + 9\varrho$. Also ist η Grundeinheit in $(\sqrt[3]{17})$ und $r(\eta) = 2$; $r(\varepsilon) = 1$. Das ergibt einen Einheitsknoten.

C — D. In dem vorigen Beispiel, das uns nur einen absoluten Nichtnormalkörper K mit Einheitsknoten lieferte, ersetzen wir jetzt den Führer $1 + 9\varrho$ von K_2 durch seine Norm 73 und können auf diese Weise einen Kreiskörper $K_2 = K_0\left(\sqrt[3]{(1 + 9\varrho)^{-1}(1 + 9\varrho^2)}\right)$ oder einen Ringklassenkörper $K_2 = K_0(\sqrt[3]{73})$ erhalten. Für die zugehörige Klasseneinteilung in K_0 ist im ersten Falle (C) der Quotient, im zweiten Falle (D) das Produkt der kubischen Restcharaktere mod $1 + 9\varrho$ und $1 + 9\varrho^2$ maßgebend. Hatte nun die Einheit η in $(\sqrt[3]{17})$, die vom Range 2 mod $1 + 9\varrho$ war, die Charaktere $\varrho, \varrho, \varrho$ mod $1 + 9\varrho$, so hat sie, da die Reste rational waren, die Charaktere $\varrho^2, \varrho^2, \varrho^2$ mod $1 + 9\varrho^2$. In K_1 fallen daher die Charaktere (5) unabhängig davon, wie man $\mathfrak{c}$ als Quotient oder Produkt je eines Primteilers von $1 + 9\varrho$ und $1 + 9\varrho^2$ koppelt, stets $\varrho, \varrho, \varrho$ für C und 1, 1, 1 für D aus. Im Falle C der Kreiserweiterung K_2 haben wir infolgedessen wieder $r(\eta) = 2$, $r(\varepsilon) = 1$ und daher einen Einheitsknoten; im Falle D der Ringerweiterung $r(\eta) = 3$, $r(\varepsilon) > 1$ und einen Idealknoten.

Abhängig von der obigen Primteilerkoppelung sind jedoch die Körper K'; infolgedessen erhält man im Falle D drei unverzweigte K'/K und im Falle C beispielsweise zum Führer 2 auch drei.

E. Ein Einheitsknoten kommt nicht in Frage, sondern es liegt stets ein Idealknoten vor, wenn beim Grundkörper $K_0 = (\sqrt{-3})$ die Führer von K_1 und K_2, wie hier, beides rationale Primzahlen $p \equiv q \equiv -1 \pmod 9$ sind, was schon gegenseitigen Vollzerfall bedingt. Die Einheit η aus dem reinen kubischen Körper $(\sqrt[3]{p})$ hat jedenfalls einen rationalen Rest nach dem Primteiler ersten Grades von q in $(\sqrt[3]{p})$. Dies ist wegen $q \equiv -1 \pmod 3$ ein kubischer Rest. Also muß $r(\eta, q) \neq 2$ sein und dann $r(\eta) = 3$, was zu einem Idealknoten führt.

F. Weil $79 \not\equiv \pm 1 \pmod 9$, ist ϱ schon kein Normenrest in K_2. Mangels Einheiten-Normenresten in K/K_0 ist also $k_\varepsilon = 1$, $r(\varepsilon, 7 - 3\varrho) = 0$. η hat dann Restcharaktere

$$1, \varrho, \varrho^2 \bmod \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1^S, \mathfrak{q}_1^{S^2}$$

und in derselben Reihenfolge mod $\mathfrak{q}_1^T, \mathfrak{q}_1^{TS}, \mathfrak{q}_1^{TS^2}$, wo $\mathfrak{q}_1$ ein Primteiler von $7—3\varrho$ ist und T die Substitution der Ordnung 2 in K_1, die η invariant läßt, und der Quotientencharakter fällt $\varrho^a, \varrho^a, \varrho^a$ mit $a = 0, 1, 2$ je nach der Koppelung $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1^{TS^a}$ aus. Nur die eine Koppelung ($a = 0$) liefert hier einen unverzweigten K'/K (Idealknoten!), während es zwei Körper K' mit dem Führer 2 gibt [11a]).

G. Nun wollen wir noch zeigen, daß die Möglichkeit, einen Einheitsknoten von der Ordnung 3 zu bilden, durchaus nicht vom Vorhandensein dritter Einheitswurzeln

[11a]) Trotzdem gehen diese drei Körper K'/K noch ineinander über, wenn man sie mit dem Körper $(\sqrt[3]{316})$ passend durchkreuzt, ebenso unter C und D bei Durchkreuzung mit $(\sqrt[3]{73})$ und O 73.

im Grundkörper abhängt. Im Fall eines reellen quadratischen Grundkörpers ergibt sich sogar die Möglichkeit, einen absolut normalen Körper K zu bilden, dessen zyklische Teilkörper K_1 und K_2 *beide rationale Primführer* $p \equiv -1$, $q \equiv +1 \pmod 3$ haben, sodaß wieder K_1 Ringklassenkörper, K_2 Kreiskörper wird.

Um verhältnismäßig einfach zu einem passenden Körper K zu kommen, gehen wir aus von einer Gleichung $F(x) = x^3 - px - p = 0$ mit der Diskriminante $(4p - 27)p^2$, die uns einen kubischen Klassenkörper K_1 mit dem Führer p über $K_0 = (\sqrt{4p-27})$ liefert. p ist gleichzeitig die Norm der Gleichungswurzel ϑ und zwar ihr Idealkubus. Ferner ist p noch unzerfallen in K_0, wenn $p \equiv -1 \pmod 3$, und $\vartheta + 1$ eine Einheit.

Wir wählen nun $p = 11$, also $K_0 = (\sqrt{17})$. Neben $\omega_1 = \vartheta + 1$ finden wir eine Einheit $v_1 = (\vartheta - 2)^{-1}(\vartheta + 3)^2$. Weil K_0 die Klassenzahl 1 hat und K_1/K_0 einen Primführer $p \equiv -1 \pmod 3$, müssen v_1 und ω_1 beides $(S-1)$-te Potenzen [12]) von Einheiten in K_1 sein, der zwei relative Grundeinheiten ε_1 und η_1 über K_0 besitzt mit

$$N(\varepsilon_1) = \varepsilon = 4 + \sqrt{17} \text{ und } N(\eta_1) = 1$$

in K_0, wo dann $\eta_1 = \vartheta^{S-1}$ ausfällt wegen $(\vartheta) = 11^{1/3}$. Nun läßt sich durch Prüfung mod 5 und 7 feststellen, daß v_1 und ω_1 unabhängig sind, und daß, abgesehen etwa von kubischen Faktoren, $v_1 = \varepsilon_1^{S-1}$ und $\omega_1 = \eta_1^{S-1}$ wird: In K_0 ist ε nichtkubischer Rest mod 5; in K_1 gilt daher $r(\varepsilon_1, 5) = 0$, wogegen $\eta_1 = \vartheta^{S-1}$ einen positiven Rang hat. Nun ist

$$\begin{array}{ccc} \vartheta \equiv 2, -1 \pm \sqrt{17}; & \omega_1 \equiv 3, \pm\sqrt{17}; & v_1 \equiv \text{rat.}, 2 \pm \sqrt{17}; \\ \text{Charaktere:} & 1, 1, 1; & 1, \varrho, \varrho^2. \end{array}$$

Also muß $v_1 = \varepsilon_1^{S-1}$ sein und $\omega_1 = \eta_1^{S-1}$, wenn nicht $\omega_1 = v_1^{3a}$. Das letzte wird aber dadurch ausgeschlossen, daß 1 eine Wurzel von $F(x) \equiv 0 \pmod 7$, demnach $\omega_1 \equiv 2 \not\equiv a^3$ nach einem Primteiler von 7.

Wählen wir jetzt $q = 61$ als Führer von K_2, so erhalten wir in K einen Einheitsknoten: 11 ist kubischer Rest mod 61, daher $r(\vartheta, 61) > 0$, $r(\eta_1) > 1$. Weil ferner ε in K_0 kubischer Rest nach unzerfallenem $q \equiv +1 \pmod 3$, gilt $r(\varepsilon_1, 61) \geqq 1$. Um festzustellen, daß der totale Normenrest ε Nichtnorm in K ist, genügt der Nachweis von $r(\varepsilon_1, 61) = 1$ oder, daß v_1 nichtkubischer Rest. Tatsächlich folgt aus $F(\frac{5}{2}) \equiv 0 \pmod{61}$, daß $v_1 \equiv -\frac{1}{2} \not\equiv a^3$ nach einem Primteiler von 61. — Ein passender Führer für K' ist 5, wegen $\varepsilon \not\equiv a^3 \pmod 5$.

H. Bei den kubischen Beispielen, in denen wir nur einen Teil der möglichen Typen charakterisierten, waren die Idealknotenfälle bereits durch Restcharaktere der Führer im Grundkörper charakterisierbar; in den Einheitsknotenfällen boten diese jedoch erst die Chance 2 : 3, und es mußte noch der Restcharakter einer Einheit in K_1 herangezogen werden. Ein besonderes Interesse verdient noch der Fall konjugierter Primführer für K_1, K_2 bei quadratischem Grundkörper. Hier fällt K normal aus und besitzt bei $K_0 = (\sqrt{-3})$, Führer $p = \pi\pi' \equiv 1 \pmod 9$, stets einen Knoten. Wie aber die Verteilung auf Einheits- und Idealknoten ausfällt, läßt sich aus den klassischen Dichtesätzen nicht ablesen, jedenfalls nicht unmittelbar, da K_1 und K_2 gleichzeitig gebildet werden.

Wählen wir also wieder $K_0 = (\sqrt{-3})$ und jetzt $p = \pi\pi'$ als Führer von $K = K_1 K_2$, so wird, wenn $\pi\pi'$ Primärzerlegung von p, d. h. $\pi \equiv \alpha^3 \pmod{3^{3/2}}$ ist, $K_1 = K_0(\sqrt[3]{\pi})$, $K_2 = K_0(\sqrt[3]{\pi'})$. Nach dem Reziprozitätsgesetz ist $\left(\frac{\pi}{\pi'}\right)_3 = \left(\frac{\pi'}{\pi}\right)_3$; andererseits sind

[12]) a. a. O. [10]), S. 216, Typus $D = 148$.

beide Restcharaktere zueinander konjugiert; also sind beide $= 1$, was den Vollzerfall von π' in K_1 und π in K_2 und damit den oben behaupteten Knoten liefert. — Wir wählen als Beispiele $p = 19, 37, 163, 199$ und erhalten, wenn ε Grundeinheit in K_1 bedeutet, der Reihenfolge nach

$$\begin{aligned}
\pi &= 2 - 3\varrho; & \varepsilon\sqrt{-3} &= 1 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 5,\ 7, 10 \pmod{\pi'}; & r(\varepsilon, \pi') &= 1\,.\\
& 7 + 3\varrho; & & -1 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 10, 13, 17 \pmod{\pi'}; & r(\varepsilon, \pi') &= 1\,.\\
& 14 + 3\varrho; & & -2 + \sqrt[3]{\pi} \equiv 44, 55, 58 \pmod{\pi'}; & r(\varepsilon, \pi') &= 1\,.\\
& 2 + 15\varrho; & & 2 - \varrho + \sqrt[3]{\pi} \equiv 24, 50, 54 \pmod{\pi'}; & r(\varepsilon, \pi') &> 1\,.
\end{aligned}$$

Also haben wir, wie in der obigen Tabelle vermerkt, bei $p = 19$ einen Einheitsknoten, ebenso bei $p = 37$ und 163, dagegen bei $p = 199$ einen Idealknoten.

Zum Schluß bringen wir noch die angekündigte allgemeine Konstruktion eines Einheitsknotens der Ordnung l bei gegebenem Grundkörper K_0 nicht durch l teilbarer Klassenzahl mit wenigstens einer Grundeinheit — wie sie im wesentlichen schon durch das Beispiel G angedeutet ist — und für einen Idealknoten ohne diese Nebenbedingungen.

Man bestimme zuerst ein Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades in K_0 als Führer für einen (rein verzweigten) zyklischen K_1 vom Grade l, nach der bekannten Bedingung, daß $\mathfrak{p}$ im l-Primärkörper[13]) von K_0 voll zerfällt. Wählt man dann ein $\mathfrak{q}$ in K_0 als Führer von K_2, das sogar im l-Primärkörper von K_1 voll zerfällt, so erfüllt $K = K_1 K_2$ die Bedingungen für einen *Idealknoten* schon reichlich: man erhält hier sogar einen Dispositionskörper[13]) $\widetilde{K}$ zum Führer $\mathfrak{q}$ über K_1, über K ein unverzweigter Körper vom Grade l^{l-1}, dessen über K_0 normaler Unterkörper vom Grade l über K ein Körper K' ist. Die zu $\widetilde{K}$ und K' gehörigen Hauptidealgruppen $\{(\tilde{\alpha})\}$ und $\{(\alpha')\}$ in K_1 sind, bei entsprechender l-Rangdefinition wie oben für $l = 3$, die mit $r(\tilde{\alpha}, \mathfrak{q}) = l$ und die mit $r(\alpha', \mathfrak{q}) \geqq 2$. Solange noch $r(\gamma, \mathfrak{q}) \geqq 2$ für alle Einheiten und l-ten Idealpotenzen γ, bleibt der Idealknoten daher bestehen; ein Einheitsknoten kann erst durch Rangherabsetzung für ein γ entstehen.

Hat nun K_0 eine nicht durch l teilbare Klassenzahl, so ist[9]) jede Grundeinheit ε_0 aus K_0 Norm einer relativen Grundeinheit ε_1 in K_1, und außerdem hat man nur eine weitere relative Grundeinheit η_1 in K_1 mit der Norm 1 in K_0. Es ist $\eta_1 = \pi_1^{S-1}$, wo $N(\pi_1) = \pi_0$, $(\pi_0) = \mathfrak{p}^a$ in K_0. Wegen des Vollzerfalls von $\mathfrak{p}$ in K_2 muß $r(\eta_1, \mathfrak{q}) \geqq 2$ bleiben. Hingegen dürfen wir $r(\varepsilon_1, \mathfrak{q}) = 1$ für irgendeines der ε_1 ansetzen, und erhalten dann wie oben für $l = 3$ einen Einheitsknoten. Dieser Ansatz verknüpft die Nichtrestbedingung

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^{(S-1)^{l-2}} \not\equiv \nu^l \pmod{\mathfrak{q}_1} \tag{6}$$

für einen Primteiler $\mathfrak{q}_1$ von $\mathfrak{q}$ in K_1 mit $\tilde{\varepsilon}_1^{S-1} = \varepsilon_0 \mu^l \equiv \nu^l \pmod{\mathfrak{q}_1}$ und den anderen positiven Restbedingungen und ist erfüllbar, weil $\tilde{\varepsilon}_1$ von all' diesen anderen Einheiten l-unabhängig ist.

[13]) A. Scholz, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe, Math. Z. **30** (1929), S. 332—356, insbes. S. 349; Körper $K^{(l)}$. Vgl. auch die auf S. 350 folgende Konstruktion des Dispositionskörpers.

Eingegangen 21. Dezember 1935.