Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum.

Von *Max Deuring* in Leipzig.

1. K sei eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers k. Die Klassen der einfachen normalen Algebra über k, die von K zerfällt werden, bilden eine Gruppe. In dem besonderen Fall, daß k ein endlicher Zahlkörper und K/k galoissch ist, kennzeichnet diese Gruppe den Körper K[1]). Wenn man diese Kennzeichnung zur Untersuchung der Eigenschaften von K verwenden will, so stellt sich als eine der ersten Fragen die nach der Beziehung der zu K gehörigen Algebrenklassengruppe zu den Algebrenklassengruppen, die zu den Teilkörpern von K gehören.

Wir bezeichnen die einfachen normalen Algebren über k, in denen K als maximaler Teilkörper enthalten ist, mit $\mathfrak{A}_k^K, \mathfrak{B}_k^K, \ldots$, und die Gruppe der von K zerfällten einfachen normalen Algebrenklassen über k mit G_k^K.

2. Es sei jetzt $k_0 \leqq k_1 \leqq k_2$. In einer Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ bildet die Gesamtheit aller mit k_1 elementweise vertauschbaren Elemente eine einfache Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$. Das folgt aus einem bekannten Satz der Algebrentheorie[2]). Über diese Zuordnung einer Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ zu jeder Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ gilt der folgende

Satz 1. *k_2 sei separabel von endlichem Grade über k_0, $k_0 \leqq k_1 \leqq k_2$. Die Zuordnung $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} \to \overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ ist ein Isomorphismus der Faktorgruppe $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ mit einer Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß der Satz wohl auch für inseparable k_2 richtig ist. Jedoch ist der folgende Beweis auf separable k_2 zugeschnitten.

Wir zeigen zuerst, daß die Klasse der Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ durch die Klasse von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ eindeutig bestimmt ist: jeder zu k_2 isomorphe Teilkörper k_2' von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ ist von der Gestalt $g^{-1}k_2 g$, das zugehörige $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2'}$ ist dann $g^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2} g$, also eine zu $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ isomorphe Algebra.

Wir betten k_2 in einen über k_0 galoisschen Körper K mit der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ ein. k_i gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{G}_i$.

$G_{k_0}^{k_i}$ ist isomorph zu der Gruppe solcher Klassen assoziierter Faktorensysteme von K/k_0, die Faktorensysteme $a_{\sigma,\tau}^{(i)}$ mit $a_{\sigma,\tau}^{(i)} = 1$ für σ und τ aus $\mathfrak{G}_i$ enthalten:

$$G_{k_0}^{k_i} \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)}\, c_\sigma^T)/(c_\sigma^T) \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)})/(a_{\sigma,\tau}^{(i)} \frown c_\sigma^T).$$

$c_\sigma^T = c_\sigma^\tau c_\tau / c_{\sigma\tau}$ liegt dann und nur dann in $a_{\sigma,\tau}^{(i)}$, wenn es ein b gibt, mit dem sich die c_σ für σ aus $\mathfrak{G}_i$ in der Form $c_\sigma = b^{1-\sigma}$ darstellen lassen. Für $c_\sigma^* = c_\sigma b^{\sigma-1}$ (σ aus $\mathfrak{G}_i$) ist dann $c_\sigma^{*T} = c_\sigma^T$, aber $c_\sigma^* = 1$ für σ aus $\mathfrak{G}_i$. Daher ist

1) Vgl. R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, J. f. reine u. angew. Math. **167** (1932), 399—404; vgl. auch M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. IV, 1 (1935), S. 122, Satz 11.

2) Vgl. etwa M. Deuring, loc. cit. S. 44, Satz 6.

$$G_{k_0}^{k_i} \cong (a_{\sigma,\tau}^{(i)})/(c_\sigma^{(i)T})$$

mit $a_{\sigma,\tau}^{(i)} = c_\sigma^{(i)} = 1$ für σ und τ aus $\mathfrak{G}_i$.

Die in Satz 1 beschriebene Zuordnung $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} \to \overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ vollzieht sich an den Faktorensystemen, indem der Klasse $(a_{\sigma,\tau}^{(2)})$ die Klasse des nur auf die Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ sich beziehenden Teils $(a_{\sigma,\tau}^{(2)*})$ zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist ein Homomorphismus, bei dem gerade die Klassen $(a_{\sigma,\tau}^{(1)})$ in 1 übergehen. Das ist die Behauptung [3]).

3. Die Bestimmung der genauen Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$, die zu $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ isomorph ist, gelingt nicht allgemein. Wir führen sie zuerst für $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper, und dann darauf aufbauend für algebraische Zahlkörper durch [4]).

Die Körper k_i seien jetzt $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper. Das Primideal eines Körpers $k_i, W, T, \ldots$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_{k_i}, \mathfrak{p}_W, \mathfrak{p}_T, \ldots$

Die Gruppe $G_{k_0}^{k_i}$ ist zyklisch von der Ordnung $(k_i : k_0)$ und ebenso ist $G_{k_1}^{k_2}$ zyklisch von der Ordnung $(k_2 : k_1)$. Daraus folgt, daß $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ mit der ganzen Gruppe $G_{k_1}^{k_2}$ isomorph ist.

Die $\mathfrak{p}$-adischen Algebren können durch ihre *Invarianten* gekennzeichnet werden. Die Invariante von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ muß daher aus der Invariante von $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ abgeleitet werden können. Das geschieht durch

Satz 2. *$\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ bestimmt sich aus $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ mittels der Beziehung*

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_1}}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) (k_1 : k_0) \pmod 1. \tag{1}$$

Beweis. Für eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ handelt es sich um endlich viele triviale Fälle. Daher setzen wir $\mathfrak{p}$ als endliche Primstelle voraus.

In k_1 liegt ein Körper T, der unverzweigt über k_0 ist, während k_1 rein verzweigt über T ist; d. h. es ist $\mathfrak{p}_{k_0} = \mathfrak{p}_T$ und $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_{k_1}^{(k_1:T)}$. Wir beweisen zuerst

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) (T : k_0) \pmod 1. \tag{2}$$

$\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ enthält einen über k_0 unverzweigten Teilkörper W', und W' enthält einen zu T isomorphen Teilkörper T'. In $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ gibt es also ein Element g, das T' in T transformiert: $g^{-1}\, T'g = T$. Wir setzen $g^{-1}W'g = W$.

Ist φ die Frobeniussubstitution von W/k_0, so kann $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ als zyklische Algebra

$$\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2} = (a, W, \varphi)$$

geschrieben werden, und wenn a genau die Potenz $\mathfrak{p}_{k_0}^s$ von $\mathfrak{p}_{k_0}$ enthält, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) \equiv \frac{s}{(W : k_0)} \pmod 1.$$

W ist offenbar auch ein maximaler Teilkörper von $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$, und $\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2}$ hat die zyklische Darstellung

$$\overline{\mathfrak{A}}_T^{k_2} = (a, W, \varphi^{(T:k_0)}).$$

[3]) Für diesen Beweis vergleiche man die Theorie der Faktorensysteme etwa bei Deuring, loc. cit. Kap. V.

[4]) Für die Theorie der $\mathfrak{p}$-adischen Algebren muß verwiesen werden auf H. Hasse, Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495—534, oder auf Deuring, loc. cit. Kap. VII § 2.

Da $\varphi^{(T:k_0)}$ gerade die Frobeniussubstitution von W/T ist, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \frac{s}{(W:T)} \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right)(T:k_0) \pmod 1.$$

Das ist (2).

Zum Beweis von (1) muß jetzt

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_0}}\right) \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right)(k_1:T) \pmod 1 \tag{3}$$

gezeigt werden. Nach Satz 1 genügt es, diesen Nachweis für eine Divisionsalgebra $\mathfrak{A}_T^{k_2}$ zu führen; denn jede Algebra $\mathfrak{A}_T^{k_2}$ ist einer Potenz einer Divisionsalgebra äquivalent.

$\mathfrak{A}_T^{k_2}$ enthält einen Teilkörper V, der zu der unverzweigten Erweiterung $(k_2:k_1)$-ten Grades von k_1 isomorph ist. Wir können annehmen, daß k_1 in V enthalten ist, indem wir nötigenfalls wie beim Beweis von (2) noch zu $g^{-1}Vg$ übergehen. Der Trägheitskörper U von $\mathfrak{p}_V$ hat wegen $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_{k_1}^{(k_1:T)} = \mathfrak{p}_V^{(k_1:T)}$ den Grad $(V:k_1)$ über k_1. Da er galoissch über T ist und mit k_1 wegen seiner Unverzweigtheit den Durchschnitt T hat, so ist $V = k_1U$. U können wir wie beim Beweis von (2) in einen unverzweigten Teilkörper $(k_2:T)$-ten Grades W von $\mathfrak{A}_T^{k_2}$ einbetten. Ist jetzt x ein solches Element von $\mathfrak{A}_T^{k_2}$, das als Transformator den Frobeniusautomorphismus φ von W/T erzeugt, und enthält x die r-te Potenz des Primideals $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{A}_T^{k_2}$, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right) \equiv \frac{r}{(k_2:T)} \pmod 1.$$

Denn es ist $\mathfrak{A}_T^{k_2} = (a, W, \varphi)$ mit $x^{(k_2:T)} = a$ und $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{P}^{(k_2:T)}$, weil $\mathfrak{A}_T^{k_2}$ als Divisionsalgebra vorausgesetzt worden ist. φ ist, allein für U betrachtet, die Frobeniussubstitution von U/T. φ kann dann auf V/k übertragen werden, und da k_1 die gleiche Restklassenzahl wie T hat, so ist φ auch die Frobeniussubstitution von V/k_1. y sei ein Element von $\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2} = \mathfrak{A}_{k_1}^{V}$, das als Transformator diesen Automorphismus von V/k_1 erzeugt. $z = x^{-1}y$ ist dann mit U elementweise vertauschbar, liegt also in $\mathfrak{A}_U^{k_2}$. Bedeutet $\mathfrak{P}'$ das Primideal von $\mathfrak{A}_U^{k_2}$, so gilt $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p}_U = \mathfrak{P}'^{(k_2:U)} = \mathfrak{P}'^{(k_1:T)}$, also $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^{(k_2:k_1)}$. Geht $\mathfrak{P}$ in y mit der Potenz $\mathfrak{P}^t$ ein, so muß demnach

$$r \equiv t \pmod{(k_2:k_1)}$$

gelten. Das Primideal von $\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2}$ ist $\mathfrak{P}$, weil seine $(k_2:k_1)$-te Potenz gleich $\mathfrak{p}_{k_1} = \mathfrak{p}_T^{\frac{1}{(k_1:T)}}$ sein muß. Demnach haben wir

$$\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_{k_1}}\right) \equiv \frac{t}{(k_2:k_1)} \equiv \frac{r}{(k_2:k_1)} \equiv \left(\frac{\mathfrak{A}_T^{k_2}}{\mathfrak{p}_T}\right)(k_1:T) \pmod 1.$$

Das ist (3).

4. Wir behandeln jetzt den Fall, daß die k_i endliche algebraische Zahlkörper sind[5]). $\mathfrak{p}$ sei eine Primstelle von k_0, $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_g'$ ihre Primteiler in k_1 und $\mathfrak{p}_{i1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{iG_i}''$ die Primteiler von $\mathfrak{p}_i'$ in k_2. Ferner bezeichnen wir den $\mathfrak{p}_i'$-Grad von k_1/k_0 mit $n(\mathfrak{p})_i$ und den $\mathfrak{p}_{ij}''$-Grad von k_2/k_0 mit $N(\mathfrak{p})_{ij}$. Eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ ist durch ihre Invarianten $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ gekennzeichnet. Dabei erfüllen die Invarianten die drei Bedingungen:

[5]) Für das Folgende: H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe, Math. Ann. **107** (1933), 731—760, und Deuring, loc. cit. Kap. VII, § 5.

(4) nur endlich viele Invarianten sind $\not\equiv 0 \pmod 1$,

$$N(\mathfrak{p})_{ij}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1, \tag{5}$$

$$\sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1. \tag{6}$$

Aber diese Bedingungen sind die einzigen: zu jedem Invariantensystem, das (4), (5), (6) erfüllt, gibt es eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$.

Die in einer Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ durch k_1 festgelegte Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ finden wir nach Satz 2 durch die Invariantenrelationen

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \equiv n(\mathfrak{p})_i\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \pmod 1, \tag{7}$$

die zur Bestimmung der Klasse von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ hinreichen.

5. Die im Titel dieser Arbeit formulierte Frage, das heißt also die Bestimmung der genauen Untergruppe von $G_{k_1}^{k_2}$, die zu $G_{k_0}^{k_2}/G_{k_0}^{k_1}$ isomorph ist, läuft für den Fall der Zahlkörper darauf hinaus, das Kongruenzensystem (7) bei gegebenen $\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right)$ nach den $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ so aufzulösen, daß die Lösungen $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ die Bedingungen (4), (5) und (6) erfüllen. Es ergibt sich also sofort

Satz 3. *Damit die Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ eingebettet werden kann, müssen die Kongruenzensysteme — zu jedem $\mathfrak{p}$ eines —*

$$n(\mathfrak{p})_i\, x_{\mathfrak{p}} \equiv \left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \pmod 1$$

verträglich sein.

Insbesondere: Wenn k_1 über k_0 galoissch ist, so ist es für die Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ notwendig, daß $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ an bezüglich k_0 konjugierten Primstellen gleiche Invarianten hat.

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ immer so bestimmen kann, daß sie (4) und (5) erfüllen. Die Schwierigkeit liegt bei (6). Aus der Voraussetzung

$$\sum_{\mathfrak{p}_i'}\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}}{\mathfrak{p}_i'}\right) \equiv 0 \pmod 1$$

folgt nämlich durch Addition der Kongruenzen (7) nur

$$(k_1 : k_0)\sum_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1. \tag{8}$$

Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Bedingung von Satz 3 im allgemeinen zur Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ nicht ausreicht.

q sei eine Primzahl. Es sei k_1/k_0 abelsch vom Typus (q, q) und k_2/k_1 zyklisch vom Grade q^2. Wir betrachten eine feste Primstelle $\mathfrak{p}$ von k_0, deren Zerlegung in k_1 durch $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1' \cdots \mathfrak{p}_{q^2}'$ gegeben sei, während die $\mathfrak{p}_i'$ in k_2 unzerlegt bleiben. Es gibt eine Algebra $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$, deren Invarianten an den Stellen $\mathfrak{p}_i'$ sämtlich $\frac{1}{q^2}$ sind, während die Invarianten an allen übrigen Primstellen 0 sind. Die Bedingung von Satz 3 ist erfüllt. Für $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ erhalten wir aus (7) eindeutig den Wert $\frac{1}{q^2}$. Für alle übrigen $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{r}}\right)$, $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{p}$, folgt aus (7) $q\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1$. Es ist daher

$$q \sum_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \frac{1}{q^2} \pmod 1$$

und gewiß nicht

$$\sum_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \pmod 1.$$

Es gilt indessen der

Satz 4. *Wenn k_1 über k_0 zyklisch ist, so ist $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ dann und nur dann in eine Algebra $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ einbettbar, wenn $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ an in bezug auf k_0 konjugierten Primstellen gleiche Invarianten hat.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Vorhandensein unendlich vieler Primideale $\mathfrak{p}$ von k_0, die in k_1 nicht zerfallen. Hat man die $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ irgendwie so bestimmt, daß (4), (5) und (7) erfüllt sind, so kann man wegen (8) für ein unzerlegt bleibendes $\mathfrak{p}$ die Invariante $\left(\frac{\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}}{\mathfrak{p}}\right)$ um ein solches ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{(k_1 : k_0)}$ abändern, daß (6) erfüllt wird [6]).

Es zeigt sich also hier ähnlich wie in der Klassenkörpertheorie ein besonders einfaches Verhalten der zyklischen Körper.

Die in Satz 3 ausgesprochene Bedingung für die Einbettbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}^{k_2}$ in $\mathfrak{A}_{k_0}^{k_2}$ reicht auch dann hin, wenn $(k_2 : k_1)$ zu $(k_1 : k_0)$ teilerfremd ist. Das folgt aus (8).

[6]) Die Existenz der unzerlegt bleibenden Primideale kann nur transzendent bewiesen werden. Indessen kommt man, wie leicht zu sehen, auch mit der arithmetisch beweisbaren Existenz von Primidealen in k_0 aus, deren Primfaktoren in k_1 Grade haben, die durch eine gegebene in $(k_1 : k_0)$ aufgehende Primzahlpotenz teilbar sind.

Eingegangen 8. Januar 1936.