Eine neue Eigenschaft der pseudosphärischen Strahlenkongruenzen.

Von *Hans Jonas* in Berlin-Steglitz.

1. *Ziel der Untersuchung; einleitende Bemerkungen.* — Wir werden die folgenden Sätze beweisen:

I. *Legt man in einer pseudosphärischen Kongruenz durch den Mittelpunkt des Strahls die beiden zum Strahl und zueinander senkrechten, den Halbierungsebenen der Brennebenenwinkel angehörenden Querstrahlen, so durchlaufen diese zwei W-Kongruenzen, in denen die Asymptotenlinien der Brennmäntel denjenigen der pseudosphärischen Flächen entsprechen.*

II. *Wird die pseudosphärische Kongruenz durch simultane Bäcklund-Transformationen ihrer Brennflächen unter Heranziehung des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes in eine neue derartige Kongruenz übergeführt, so erfahren auch die Brennmäntelpaare der beiden, von den Querstrahlen gebildeten W-Kongruenzen asymptotische Transformationen; d. h. also: eine jede dieser vier Hilfsflächen hängt mit der durch analoge Konstruktion aus der transformierten pseudosphärischen Kongruenz erhaltenen durch eine sie beide berührende W-Kongruenz zusammen.*

Da man Satz II im Anschluß an die Zusammensetzung der Bäcklund-Transformationen nicht mühelos bestätigt, lag der Gedanke nahe, eine auf die sphärische Abbildung gegründete Transformationstheorie der pseudosphärischen Kongruenzen an den Anfang zu stellen. Es ist bekannt, daß auf der Bildkugel der Strahlrichtung den Asymptotenlinien der pseudosphärischen Brennflächen ein orthogonales Kurvennetz entspricht [1]); die rechtwinkligen Querstrahlen sind den beiden Kurventangenten parallel. Der gesuchte Prozeß, der sich auch unmittelbar auf den nicht uninteressanten Fall konjugiert-imaginärer Brennflächen ausdehnen läßt, ergibt sich in Gestalt einer Ribaucour-Transformation des sphärischen Orthogonalnetzes, also einer Spiegelung des begleitenden rechtwinkligen Dreikants an einer variablen Ebene. Für den gegenwärtigen Zweck erschien es mir allerdings vorteilhafter, diese Methode nicht unabhängig, sondern aus den Formeln des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes zu entwickeln.

Hingewiesen sei hier noch auf die bedeutsame Rolle, die das von uns betrachtete rechtwinklige Dreikant, von drei Parametern abhängig, in der Theorie der schiefen Weingartenschen Systeme spielt [2]). Es sind dies von Bianchi entdeckte, aus den Wein-

[1]) Die gleiche Eigenschaft kommt der allgemeineren Klasse von *W*-Kongruenzen zu, deren Brennmäntel in korrespondierenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß besitzen.

[2]) Bianchi, Sui sistemi obliqui di Weingarten, Annali di Mat. (3) **19** (1912), S. 251; ferner: Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, Annali di Mat. (3) **25** (1916), S. 129.

gartenschen Systemen mit konstanter Flexion durch simultane Liesche Transformation entstehende Scharen pseudosphärischer Flächen, die Bertrandsche Kurven zu Trajektorien haben. Sie treten wie jene in Paaren auf; dazwischen vermittelt eine bereits durch die Bestimmungselemente gegebene, von keinerlei Integration abhängende Bäcklund-Transformation. Aus der eigenartigen Tatsache, daß sich mit diesen geometrischen Gebilden noch zwei Scharen pseudosphärischer Kongruenzen mit paarweise konjugiert-imaginären Brennflächen verbinden [3]), entspringt ein Seitenstück zu dem Ergebnis der vorliegenden Untersuchung. Näheres hierüber wird ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der W-Kongruenzen enthalten [4]).

2. *Formeln für die simultane Bäcklund-Transformation der pseudosphärischen Brennflächen.* — Es empfiehlt sich, im Gegensatz zu Bianchi und übereinstimmend mit der Darstellung, deren ich mich bei den schiefen Weingartenschen Systemen bedient habe [5]), die Differentialgleichungen für das Funktionenpaar θ, ω von der charakteristischen Konstanten c der zwischen den pseudosphärischen Brennflächen vermittelnden Bäcklund-Transformation frei zu halten. Das bedeutet eine von der üblichen etwas verschiedene Auffassung der Lieschen Transformation, durch die das Brennflächenpaar aus einem durch die Komplementärtransformation (für $c = 1$) verbundenen hervorgeht. Wir schreiben also die Differentialgleichungen in der Form:

$$(1) \qquad \theta_\alpha + \omega_\alpha = \sin(\theta - \omega), \qquad \theta_\beta - \omega_\beta = \sin(\theta + \omega).$$

Dabei sind 2θ und 2ω auf den Brennflächen die Winkel der Asymptotenlinien, α und β die diesen entsprechenden Parameter. Als Folgerung ergibt sich:

$$2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta, \qquad 2\omega_{\alpha\beta} = \sin 2\omega.$$

(x) und $(\bar{x})$ seien die pseudosphärischen Brennflächen. Unter Bevorzugung der ersteren führen wir das zugehörige, mit dem Koordinatenkreuz gleichstimmige rechtwinklige Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ ein, gebildet von den Hauptkrümmungsrichtungen $X^{(1)}, X^{(2)}$ und der Richtung $X^{(3)}$ der Flächennormalen [6]). Es ist dann:

$$(2) \qquad x_\alpha = c(\cos\theta X^{(1)} + \sin\theta X^{(2)}), \qquad x_\beta = \frac{1}{c}(\cos\theta X^{(1)} - \sin\theta X^{(2)}),$$

$$(3) \qquad \Sigma\, dx^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + \frac{1}{c^2}\, d\beta^2.$$

Für das Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ gelten die Differentialrelationen:

$$(4) \qquad \begin{cases} X^{(1)}_\alpha = \theta_\alpha X^{(2)} + c\sin\theta X^{(3)}, & X^{(1)}_\beta = -\theta_\beta X^{(2)} + \dfrac{1}{c}\sin\theta X^{(3)}, \\ X^{(2)}_\alpha = -c\cos\theta X^{(3)} - \theta_\alpha X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = \dfrac{1}{c}\cos\theta X^{(3)} + \theta_\beta X^{(1)}, \\ X^{(3)}_\alpha = -c\sin\theta X^{(1)} + c\cos\theta X^{(2)}, & X^{(3)}_\beta = -\dfrac{1}{c}\sin\theta X^{(1)} - \dfrac{1}{c}\cos\theta X^{(2)}. \end{cases}$$

---

[3]) Jonas, Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen- und Strahlensysteme, Math. Ann. **103** (1930), S. 720.

[4]) Jonas, Ein allgemeiner Satz über W-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme, erscheint in den Math. Ann.

[5]) Vgl. § 2 der unter [3]) angeführten Arbeit.

[6]) Eine in x geschriebene Gleichung ist im folgenden durchweg vektoriell aufzufassen. Entsprechend schreibe ich auch Fläche (x) statt (x, y, z), Richtung X, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus sind, usw. Die Ableitungen nach den Variablen α und β werden durch Indizes bezeichnet.

Der zweite Brennmantel $(\bar{x})$ der pseudosphärischen Kongruenz ist durch

$$(5)\qquad \bar{x} = x - \frac{2c}{1+c^2}(\cos\omega X^{(1)} + \sin\omega X^{(2)})$$

gegeben; er hat das zu (3) analoge Quadrat des Linienelements:

$$(6)\qquad \Sigma\, d\bar{x}^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta + \frac{1}{c^2}\, d\beta^2 .$$

Es genügt, für $(\bar{x})$ noch die Normalenrichtung anzumerken:

$$(7)\qquad \bar{X}^{(3)} = \frac{2c}{1+c^2}(\sin\omega X^{(1)} - \cos\omega X^{(2)}) + \frac{1-c^2}{1+c^2}X^{(3)} .$$

Wir unterwerfen die pseudosphärische Fläche (x) einer Bäcklund-Transformation B_σ [7]), die durch eine Lösung θ_1 der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichung (gleichwertig mit dem Riccatischen Typus):

$$(8)\qquad (\theta_1)_\alpha = -\theta_\alpha + k\sin(\theta_1 - \theta), \qquad (\theta_1)_\beta = \theta_\beta + \frac{1}{k}\sin(\theta_1 + \theta)$$

definiert sei, wobei die Konstante $k \neq \pm 1$ vorausgesetzt wird. Die in geometrischer Hinsicht für die Operation B_σ charakteristische Bianchische Konstante σ drückt sich durch k und c folgendermaßen aus:

$$(9)\qquad \cos\sigma = \frac{2kc}{c^2+k^2}, \qquad \sin\sigma = \frac{c^2-k^2}{c^2+k^2} .$$

Für die transformierte Fläche haben wir die Darstellung:

$$(10)\qquad x_1 = x + \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)}) .$$

Ihr Hauptdreikant $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)})$ geht aus dem Dreikant $(X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$ durch die orthogonale Substitution

$$(11)\qquad \begin{cases} X_1^{(1)} = \alpha_{11}X^{(1)} + \alpha_{12}X^{(2)} + \alpha_{13}X^{(3)}, \qquad X_1^{(2)} = \alpha_{21}X^{(1)} + \alpha_{22}X^{(2)} + \alpha_{23}X^{(3)}, \\ \qquad X_1^{(3)} = \alpha_{31}X^{(1)} + \alpha_{32}X^{(2)} + \alpha_{33}X^{(3)} \end{cases}$$

hervor, deren Koeffizienten die folgenden Werte haben [8]):

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\sigma\sin\theta\sin\theta_1, \quad \alpha_{12} = \cos\theta\sin\theta_1 + \sin\sigma\sin\theta\cos\theta_1, \\ \qquad \alpha_{13} = \cos\sigma\sin\theta, \\ \alpha_{21} = \sin\theta\cos\theta_1 + \sin\sigma\cos\theta\sin\theta_1, \quad \alpha_{22} = \sin\theta\sin\theta_1 - \sin\sigma\cos\theta\cos\theta_1, \\ \qquad \alpha_{23} = -\cos\sigma\cos\theta, \\ \alpha_{31} = -\cos\sigma\sin\theta_1, \quad \alpha_{32} = \cos\sigma\cos\theta_1, \quad \alpha_{33} = -\sin\sigma. \end{cases}$$

Zu (x_1) gehört als zweiter Brennmantel der transformierten pseudosphärischen Kongruenz eine vierte pseudosphärische Fläche $(\bar{x}_1)$. Die zu ihrer Bestimmung erforderliche Größe ω_1 wird durch die fundamentale Relation des Vertauschbarkeitssatzes geliefert. Dieser kann man verschiedene Formen geben:

$$(13)\qquad \cos(\omega_1 - \theta) = \frac{(1+k^2)\cos(\theta_1 - \omega) + 2k}{1+k^2+2k\cos(\theta_1-\omega)}, \qquad \sin(\omega_1 - \theta) = \frac{(1-k^2)\sin(\theta_1-\omega)}{1+k^2+2k\cos(\theta_1-\omega)},$$

ferner:

$$(14)\qquad \operatorname{tg}\frac{\omega_1 - \theta}{2} = \frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \omega}{2}$$

[7]) S. § 3 in der in Anm. [3]) zitierten Arbeit.

[8]) Die vorkommenden orthogonalen Substitutionen haben die Determinante $+1$.

und schließlich, für unseren speziellen Zweck von Bedeutung:

$$\sin \frac{\theta_1 - \omega - \omega_1 + \theta}{2} = k \sin \frac{\theta_1 - \omega + \omega_1 - \theta}{2} . \tag{15}$$

Sämtliche Formeln (1)—(7) bestehen jetzt auch für den Index 1, und zwar bei gleichem Wert der Konstanten c. Insbesondere erfüllen also θ_1 und ω_1 die Differentialgleichungen (1); außerdem wird analog zu (5):

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{2c}{1 + c^2} (\cos \omega_1 X_1^{(1)} + \sin \omega_1 X_1^{(2)}) . \tag{16}$$

Die vierte Fläche $(\bar{x}_1)$ hängt nun wieder mit $(\bar{x})$ durch eine Bäcklund-Transformation B_σ zusammen [9]), so daß vier solche Operationen mit zwei im Wechsel auftretenden Werten der charakteristischen Konstanten sich zum Zyklus vereinigen. Dies ist der geometrische Inhalt des Vertauschbarkeitssatzes.

3. *Mittelfläche und Hilfsdreikant; Beweis des Satzes* I. — Mit der gegebenen pseudosphärischen Kongruenz verbinden wir ein neues rechtwinkliges Dreikant $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(3)})$, definiert durch die orthogonale Substitution [10]):

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} (-\sin \omega X^{(1)} + \cos \omega X^{(2)} + c X^{(3)}) , \\ \mathfrak{X}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} (c \sin \omega X^{(1)} - c \cos \omega X^{(2)} + X^{(3)}) , \\ \mathfrak{X}^{(3)} &= \cos \omega X^{(1)} + \sin \omega X^{(2)} . \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Der Scheitel sei der Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ des Strahls, gegeben durch:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2} (x + \bar{x}) = x - \frac{c}{1 + c^2} (\cos \omega X^{(1)} + \sin \omega X^{(2)}) . \tag{18}$$

$\mathfrak{X}^{(3)}$ ist die Strahlrichtung. Unter Berücksichtigung von (7) erkennt man, daß $\mathfrak{X}^{(1)}$ und $\mathfrak{X}^{(2)}$ die Winkel zwischen den Normalenrichtungen $X^{(3)}$ und $\bar{X}^{(3)}$ halbieren, also den beiden die Winkel der Brennebenen halbierenden Ebenen angehören. Für das Dreikant $(\mathfrak{X}^{(1)}, \ldots)$ erhält man die Differentialrelationen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_\alpha^{(1)} &= -m \mathfrak{X}^{(2)} - \sqrt{e} \mathfrak{X}^{(3)}, & \mathfrak{X}_\beta^{(1)} &= n \mathfrak{X}^{(2)}, \\ \mathfrak{X}_\alpha^{(2)} &= m \mathfrak{X}^{(1)}, & \mathfrak{X}_\beta^{(2)} &= -n \mathfrak{X}^{(1)} - \sqrt{g} \mathfrak{X}^{(3)}, \\ \mathfrak{X}_\alpha^{(3)} &= \sqrt{e} \mathfrak{X}^{(1)}, & \mathfrak{X}_\beta^{(3)} &= \sqrt{g} \mathfrak{X}^{(2)}; \end{aligned}\right. \tag{19}$$

dabei ist gesetzt:

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{e} &= \sqrt{1 + c^2} \sin (\theta - \omega) , & \sqrt{g} &= \frac{\sqrt{1 + c^2}}{c} \sin (\theta + \omega) , \\ m &= \frac{(\sqrt{e})_\beta}{\sqrt{g}} = c \cos (\theta - \omega), & n &= \frac{(\sqrt{g})_\alpha}{\sqrt{e}} = \frac{1}{c} \cos (\theta + \omega) . \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Auf der Bildkugel $(\mathfrak{X}^{(3)})$ der Strahlrichtung ist das Kurvennetz (α, β) orthogonal; das Quadrat des sphärischen Linienelements wird:

$$\Sigma (d \mathfrak{X}^{(3)})^2 = e d\alpha^2 + g d\beta^2 . \tag{21}$$

---

[9]) Die Bestätigung verlangt einen gewissen Aufwand an Rechnung. Sie vereinfacht sich übrigens, wenn man von den Formeln des Art. 4 ausgeht.

[10]) Vgl. dazu § 4 in der in Anm. [3]) zitierten Arbeit.

Aus (20) entnimmt man für die Bildkugel der pseudosphärischen Kongruenz die (im Falle reeller Brennmäntel) charakteristischen Beziehungen:

$$\frac{e}{1+c^2}+\frac{m^2}{c^2}=1, \qquad \frac{c^2}{1+c^2}g+c^2n^2=1. \tag{22}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung nach β, der zweiten nach α, folgt:

$$m_\beta+\frac{c^2\sqrt{e}\sqrt{g}}{1+c^2}=0, \qquad n_\alpha+\frac{\sqrt{e}\sqrt{g}}{1+c^2}=0.$$

In dieser Weise zerfällt hier also die Gaußsche Relation:

$$m_\beta+n_\alpha+\sqrt{e}\sqrt{g}=0.$$

Bildet man die Ableitungen von (18) mit Benutzung von (2), so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha &= -\frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(2)}+c\cos(\theta-\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)}=-\frac{c^2}{1+c^2}\sqrt{e}\,\mathfrak{X}^{(2)}+m\,\mathfrak{X}^{(3)},\\ \mathfrak{x}_\beta &= -\frac{1}{c\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(1)}+\frac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\,\mathfrak{X}^{(3)}=-\frac{1}{1+c^2}\sqrt{g}\,\mathfrak{X}^{(1)}+n\,\mathfrak{X}^{(3)}.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Man denke sich jetzt bei gegebener Bildkugel ($\mathfrak{X}^{(3)}$) die pseudosphärische Kongruenz auf die *Mittelfläche* ($\mathfrak{x}$) bezogen, deren Bestimmung nach (23) drei Quadraturen erfordert. Die Brennflächen sind dann:

$$x=\mathfrak{x}+\frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)}, \qquad \bar{x}=\mathfrak{x}-\frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)}. \tag{24}$$

Wir betrachten die *Kongruenz, die der vom Mittelpunkt* $\mathfrak{x}$ *ausgehende Querstrahl mit der Richtung* $\mathfrak{X}^{(1)}$ *durchläuft,* und machen den für einen jeden ihrer beiden Brennmäntel gültigen Ansatz:

$$\hat{x}=\mathfrak{x}+t\,\mathfrak{X}^{(1)}. \tag{25}$$

Durch Differentiation erhalten wir zunächst noch allgemein:

$$\left\{\begin{aligned} \hat{x}_\alpha &= t_\alpha\,\mathfrak{X}^{(1)}+\left[-tc\cos(\theta-\omega)-\frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta-\omega)\right]\mathfrak{X}^{(2)}\\ &\quad+\left[c\cos(\theta-\omega)-t\sqrt{1+c^2}\sin(\theta-\omega)\right]\mathfrak{X}^{(3)},\\ \hat{x}_\beta &= \left[t_\beta-\frac{1}{c\sqrt{1+c^2}}\sin(\theta+\omega)\right]\mathfrak{X}^{(1)}+\frac{1}{c}\cos(\theta+\omega)\left[t\,\mathfrak{X}^{(2)}+\mathfrak{X}^{(3)}\right].\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Für ($\hat{x}$) als Brennfläche hat der Normalenvektor $\hat{\xi}$ (Richtungskosinus proportional mit $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$), da er zugleich zu $\mathfrak{X}^{(1)}$ und zu $\hat{x}_\beta$ senkrecht sein muß, jedenfalls die Form:

$$\hat{\xi}=\mathfrak{X}^{(2)}-t\,\mathfrak{X}^{(3)}; \tag{27}$$

aus $\Sigma\,\hat{x}_\alpha\hat{\xi}=0$ folgt dann für t die quadratische Gleichung:

$$t^2-\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}(\theta-\omega)\cdot t-\frac{c^2}{1+c^2}=0, \tag{28}$$

deren Lösungen

$$t=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}, \qquad t'=-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{tg}\frac{\theta-\omega}{2} \tag{29}$$

sind. Das Produkt der vom Punkte $\mathfrak{x}$ aus gerechneten Brennpunktsabszissen ist demnach konstant:

$$tt' = -\frac{c^2}{1+c^2}. \tag{30}$$

Wir bilden $\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta$ mittels $(19)_1$ (29), (1) und finden für beide Werte von t:

$$\Sigma\, \hat{x}_\alpha \hat{\xi}_\alpha = 0, \qquad \Sigma\, \hat{x}_\beta \hat{\xi}_\beta = 0.$$

Mithin sind die Kurven (α, β) auf den Brennmänteln $(\hat{x})$, $(\hat{x}')$ die Asymptotenlinien; die Kongruenz ist also ein W-System. Die von dem zweiten Querstrahl mit der Richtung $\mathfrak{X}^{(2)}$ durchlaufene Kongruenz hat dieselbe Eigenschaft; als Brennpunktsabszissen erhält man:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{ctg}\frac{\theta+\omega}{2}, \qquad \tau' = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \operatorname{tg}\frac{\theta+\omega}{2}, \qquad \tau\tau' = -\frac{1}{1+c^2}. \tag{31}$$

Satz I ist damit bestätigt.

4. *Transformation der Mittelfläche und des Hilfsdreikants.* — Auch für die in Art. 2 gewonnene, durch den Index 1 gekennzeichnete transformierte pseudosphärische Kongruenz führen wir jetzt die Mittelfläche $(\mathfrak{x}_1)$ und das aus dem Strahl und den beiden Querstrahlen bestehende Hilfsdreikant $(\mathfrak{X}_1^{(1)}, \mathfrak{X}_1^{(2)}, \mathfrak{X}_1^{(3)})$ ein. In Übereinstimmung mit (17) und (24) gelten dann die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-\sin\omega_1 X_1^{(1)} + \cos\omega_1 X_1^{(2)} + c X_1^{(3)}), \\ \mathfrak{X}_1^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (c\sin\omega_1 X_1^{(1)} - c\cos\omega_1 X_1^{(2)} + X_1^{(3)}), \\ \mathfrak{X}_1^{(3)} &= \cos\omega_1 X_1^{(1)} + \sin\omega_1 X_1^{(2)}, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

$$x_1 = \mathfrak{x}_1 + \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}_1^{(3)}, \qquad \bar{x}_1 = \mathfrak{x}_1 - \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}_1^{(3)}. \tag{33}$$

Um den direkten Übergang von $(\mathfrak{X}^{(1)}, \cdots)$, $(\mathfrak{x})$ zu $(\mathfrak{X}_1^{(1)}, \cdots)$, $(\mathfrak{x}_1)$ herzustellen, bedienen wir uns des Ansatzes:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{X}_1^{(1)} = \alpha_1\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_1\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_1\mathfrak{X}^{(3)}, \qquad \mathfrak{X}_1^{(2)} = \alpha_2\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_2\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_2\mathfrak{X}^{(3)}, \\ &\qquad\qquad \mathfrak{X}_1^{(3)} = \alpha_3\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_3\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_3\mathfrak{X}^{(3)}, \end{aligned}\right. \tag{34}$$

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)} + \nu\mathfrak{X}^{(3)}. \tag{35}$$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten von (34) bedarf es gewisser Umformungen, damit die Ausdrücke eine brauchbare Gestalt annehmen. Am Beispiel von α_2 werde der Gang der Rechnung dargelegt. Nach (17), (32), (11) wird:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \Sigma\,\mathfrak{X}_1^{(1)}\mathfrak{X}^{(2)} = \frac{1}{1+c^2}\{&c\sin\omega_1(-\sin\omega\cdot\alpha_{11} + \cos\omega\cdot\alpha_{12} + c\alpha_{13}) \\ &- c\sin\omega_1(-\sin\omega\cdot\alpha_{21} + \cos\omega\cdot\alpha_{22} + c\alpha_{23}) \\ &- \sin\omega\cdot\alpha_{31} + \cos\omega\cdot\alpha_{32} + c\alpha_{33}\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (12) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \frac{1}{1+c^2}\{&c\sin(\omega_1-\theta)\sin(\theta_1-\omega) + c\sin\sigma\cos(\omega_1-\theta)\cos(\theta_1-\omega) \\ &+ c^2\cos\sigma\cos(\omega_1-\theta) + \cos\sigma\cos(\theta_1-\omega) - c\sin\sigma\}, \end{aligned}$$

und wenn zur Vereinfachung

$$(36)\qquad \frac{1}{2}(\theta_1 - \omega + \omega_1 - \theta) = U, \qquad \frac{1}{2}(\theta_1 - \omega - \omega_1 + \theta) = V$$

gesetzt wird:

$$\alpha_2 = \frac{1}{1+c^2}\Big\{c\,(1-\sin\sigma)\frac{1}{2}(1-\cos 2U) - c\,(1+\sin\sigma)\frac{1}{2}(1-\cos 2V)$$
$$+ c^2\cos\sigma\cos(U-V) + \cos\sigma\cos(U+V)\Big\}.$$

Wir benutzen noch (9), sowie die fundamentale Relation des Vertauschbarkeitssatzes in der Form (15):

$$(37)\qquad \sin V = k\sin U,$$

und finden schließlich:

$$\alpha_2 = \frac{2kc}{c^2+k^2}\cos U\cos V.$$

Die auf diesem Wege erhaltenen Koeffizienten der Drehungsformeln (34) sind:

$$(38)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[-c^2+k^2-2k^2\sin^2 U], & \beta_2 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[-c^2+k^2-2k^2c^2\sin^2 U], \\ \gamma_3 = \dfrac{1}{c^2+k^2}[c^2+k^2-2k^2(1+c^2)\sin^2 U); & \alpha_2 = -\beta_1 = \dfrac{2kc}{c^2+k^2}\cos U\cos V, \\ \alpha_3 = -\gamma_1 = \dfrac{2k^2\sqrt{1+c^2}}{c^2+k^2}\sin U\cos U, & \beta_3 = \gamma_2 = -\dfrac{2kc\sqrt{1+c^2}}{c^2+k^2}\sin U\cos V. \end{cases}$$

Um die Koeffizienten λ, μ, ν der Translation (35), relative Koordinaten des neuen Strahlmittelpunkts $\mathfrak{x}_1$ im bewegten System $(\mathfrak{X}^{(1)}, \cdots)$, $\mathfrak{x}$, darzustellen, gehen wir von der folgenden vektoriellen Beziehung aus, deren beide Seiten in doppelter Weise den Zusammenhang der pseudosphärischen Flächen (x) und (x_1) ausdrücken:

$$\lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)} + \nu\mathfrak{X}^{(3)} + \frac{c}{1+c^2}(\alpha_3\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_3\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_3\mathfrak{X}^{(3)}) - \frac{c}{1+c^2}\mathfrak{X}^{(3)}$$
$$= \cos\sigma(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)}).$$

Die rechte Seite geht infolge von (17) über in:

$$\cos\sigma\left[\frac{\sin(\theta_1-\omega)}{1+c^2}(\mathfrak{X}^{(1)} - c\mathfrak{X}^{(2)}) + \cos(\theta_1-\omega)\mathfrak{X}^{(3)}\right].$$

Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich, wenn außerdem berücksichtigt wird, daß $\theta_1 - \omega = U + V$ ist:

$$\lambda + \frac{c\alpha_3}{1+c^2} = \frac{\cos\sigma}{\sqrt{1+c^2}}\sin(U+V), \qquad \mu + \frac{c\beta_3}{1+c^2} = -\frac{c\cos\sigma}{\sqrt{1+c^2}}\sin(U+V),$$
$$\nu + \frac{c(\gamma_3-1)}{1+c^2} = \cos\sigma\cos(U+V),$$

und hieraus mit Hilfe von (38) und (9):

$$(39)\qquad \lambda = -\frac{\beta_3}{1+c^2}, \qquad \mu = -\frac{c^2\alpha_3}{1+c^2}, \qquad \nu = \alpha_2.$$

Wir sind damit im Besitz der zum Beweise des Satzes II erforderlichen Formeln. Beiläufig wollen wir aber das Koeffizientensystem (38) noch in einer zweiten Gestalt angeben, die erkennen läßt, daß eine Ribaucour-Transformation der sphärischen Abbildung vorliegt. Es werde gesetzt:

$$(40)\qquad u = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg} U, \qquad v = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg} V.$$

An die Stelle von (37) tritt die u und v verbindende quadratische Relation:

$$(41)\qquad c^2u^2 - k^2v^2 = \frac{c^2(k^2-1)}{1+c^2}.$$

Die Ausdrücke (38) verwandeln sich in:

$$(42)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{H}(u^2 - v^2 - 1), & \beta_2 = \frac{1}{H}(u^2 - v^2 + 1), \quad \gamma_3 = \frac{1}{H}(u^2 + v^2 - 1), \\ \alpha_2 = -\beta_1 = -\frac{2uv}{H}, & \alpha_3 = -\gamma_1 = -\frac{2u}{H}, \quad \beta_3 = \gamma_2 = -\frac{2v}{H}, \\ & H = u^2 + v^2 + 1. \end{cases}$$

Schreibt man (34), (42) in der Form:

$$(43)\quad \begin{cases} -\mathfrak{X}_1^{(1)} = \mathfrak{X}^{(1)} - \frac{2u}{H}\xi, \quad \mathfrak{X}_1^{(2)} = \mathfrak{X}^{(2)} - \frac{2v}{H}\xi, \quad \mathfrak{X}_1^{(3)} = \mathfrak{X}^{(3)} - \frac{2}{H}\xi, \\ \xi = u\mathfrak{X}^{(1)} + v\mathfrak{X}^{(2)} + \mathfrak{X}^{(3)}, \end{cases}$$

so ist klar, daß die beiden Dreikante $(\mathfrak{X}^{(1)}, \cdots)$ und $(\mathfrak{X}_1^{(1)}, \cdots)$ bei gemeinsamem Scheitel, abgesehen von der durch den Wert $+1$ der Substitutionsdeterminante bedingten Änderung des Richtungssinns bei einer Achse, spiegelbildlich bezüglich der zu ξ normalen Ebene liegen. Diese ist, wie man unschwer feststellt, Tangentialebene des auf die Achsen $\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{X}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(3)}$ bezogenen Kegels:

$$(44)\qquad \frac{x_0^2}{c^2} - \frac{y_0^2}{k^2} - \frac{(1+c^2)z_0^2}{c^2(k^2-1)} = 0.$$

Die nachträgliche Verschiebung λ, μ, ν des Scheitels von $(\mathfrak{X}_1^{(1)}, \cdots)$ fällt in die Tangentialebene und steht senkrecht auf der Erzeugenden, in der sie den Kegel berührt. Ort des Strahlmittelpunktes $\mathfrak{x}_1$ der transformierten pseudosphärischen Kongruenz im bewegten System $(\mathfrak{X}^{(1)}, \cdots)$, $\mathfrak{x}$ ist eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Spezies. Die rationale Darstellung der Koordinaten λ, μ, ν ergibt sich, wenn man, an (41) anknüpfend, die Größe

$$(45)\qquad \varrho = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c(k+1)}(cu + kv)$$

als Parameter einführt.

Die Formeln (34), (42) hätten als allgemeiner Ansatz für eine Ribaucour-Transformation der auf das Orthogonalnetz (α, β) bezogenen Einheitskugel $(\mathfrak{X}^{(3)})$ an den Anfang der ganzen Entwicklung gestellt werden können. Sie lassen sich andrerseits, einschließlich der quadratischen Relation (41), auch gewinnen, wenn man von der einparametrigen Bewegung ausgeht, die das windschiefe Gelenkviereck der Punkte $x, x_1, \bar{x}_1, \bar{x}$ bei festgehaltener Seite $x\bar{x}$ erfährt, wobei zu beachten ist, daß infolge der Konstanz des Winkels der Brennebenen die Strahlen xx_1 und $\bar{x}\bar{x}_1$ in festen Ebenen bleiben [11]).

[11]) **Die kinematische Erzeugung der von $\mathfrak{x}_1$ durchlaufenen rationalen Raumkurve vierter Ordnung erscheint als räumliche Verallgemeinerung einer bekannten Erzeugung der zentrischen Fußpunktkurven der Mittelpunktskegelschnitte.**

Es genügt dann noch zum Ausdruck zu bringen, daß auch auf der transformierten Bildkugel $(\mathfrak{X}^{(3)})$ ein Orthogonalnetz (α, β) entsteht. Man erhält so zunächst [s. (20)] die Differentialgleichungen:

$$v_\alpha + u(\sqrt{e}\,v - m) = 0, \qquad u_\beta + v(\sqrt{g}\,u - n) = 0\,,$$

die im Verein mit (41) der totalen Differentialgleichung (8) äquivalent sind. Die Bedingungen (22) erweisen sich für die neue Bildkugel $(\mathfrak{X}^{(3)})$ bei Bestehen von (41) bereits als erfüllt. Erwähnt sei noch, daß die so erhaltene Ribaucour-Transformation unmittelbar auch auf diejenigen Flächen angewendet werden kann, die das Orthogonalnetz (α, β) der Einheitskugel $(\mathfrak{X}^{(3)})$ zum Gaußschen sphärischen Bild ihrer Krümmungslinien zulassen. Zu einer solchen Fläche gehört ein Paar Voßscher Flächen, Enveloppen der durch ihre Normale gelegten Parallelebenen zu den Tangentialebenen der pseudosphärischen Fläche (x) und $(\bar{x})$. In ihren Krümmungsmittelpunkten treffen sich paarweise (harmonische Beziehung) korrespondierende Tangenten der die Voßschen Flächen bedeckenden und dort konjugierte Netze bildenden geodätischen Linien (α, β).

5. *Beweis des Satzes* II. — Auf Grund der getroffenen Vorbereitungen läßt sich der letzte Teil der Untersuchung leicht erledigen. Wir beschränken uns dabei auf die W-Kongruenz der Querstrahlen $\mathfrak{X}^{(1)}$, bzw. $\mathfrak{X}_1^{(1)}$ im transformierten System. Nach (25), (27), (29) haben wir für die Brennmäntel und deren Normalenvektoren die folgenden Formeln, in denen wieder die beiden Werte von t bzw. von t_1 mit t, t' und t_1, t_1' bezeichnet sind:

$$(46)\quad \hat{x} = x + t\,\mathfrak{X}^{(1)}, \quad \hat{\xi} = \mathfrak{X}^{(2)} - t\,\mathfrak{X}^{(3)}; \quad t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\omega}{2}, \quad t' = -\frac{c^2}{(1+c^2)\,t},$$

$$(47)\quad \hat{x}_1 = x_1 + t_1\mathfrak{X}_1^{(1)}, \quad \hat{\xi}_1 = \mathfrak{X}_1^{(2)} - t_1\mathfrak{X}_1^{(3)}; \quad t_1 = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta_1-\omega_1}{2}, \quad t_1' = -\frac{c^2}{(1+c^2)\,t_1}.$$

Da die Korrespondenz der Asymptotenlinien schon festeht, handelt es sich nur noch darum, zu zeigen, daß die Verbindungslinie der Punkte $\hat{x}$ und $\hat{x}_1$ gemeinsame Tangente der Flächen $(\hat{x})$ und $(\hat{x}_1)$ ist. Wir finden:

$$(48)\quad \hat{x}_1 - \hat{x} = \lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)} + \nu\mathfrak{X}^{(3)} + t_1(\alpha_1\mathfrak{X}^{(1)} + \beta_1\mathfrak{X}^{(2)} + \gamma_1\mathfrak{X}^{(3)}) - t\mathfrak{X}^{(1)}$$

und setzen:

$$(49)\qquad \Sigma(\hat{x}_1 - \hat{x})\,\hat{\xi} = A, \qquad \Sigma(\hat{x}_1 - \hat{x})\,\hat{\xi}_1 = B\,,$$

haben also $A = 0$ und $B = 0$ zu bestätigen. Aus (46)—(48) und (34) folgt aber:

$$A = \mu - \nu t + t_1\beta_1 - tt_1\gamma_1,$$
$$B = \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 - t_1(\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3) - t\alpha_2 + tt_1\alpha_3.$$

Mit Hilfe von (39) gehen, wenn noch berücksichtigt wird, daß $\beta_1 = -\alpha_2$, $\gamma_2 = \beta_3$, $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \gamma_1 = -\alpha_3$, $\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 = -\beta_1 = \alpha_2$ ist, A und B in einunddenselben Ausdruck:

$$(50)\qquad A = B = \left(tt_1 - \frac{c^2}{1+c^2}\right)\alpha_3 - (t + t_1)\,\alpha_2$$

über. Wir bilden, indem wir auf (36) Bezug nehmen:

$$(51)\quad \frac{tt_1 - \dfrac{c^2}{1+c^2}}{t + t_1} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\,\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta-\omega}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta_1-\omega_1}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\theta-\omega}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\theta_1-\omega_1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\operatorname{ctg} V,$$

und bemerken, daß (51) auch erfüllt ist, wenn gleichzeitig t durch t' und t_1 durch t_1' ersetzt wird. Andrerseits ergibt sich aus (38) und (37):

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \operatorname{ctg} V. \tag{52}$$

Aus (50)—(52) schließt man, daß in der Tat $A = B = 0$ ist, und zwar für beide Wertepaare t, t_1 und t', t_1'.

Eingegangen 2. November 1935.