Über die Approximation algebraischer Zahlen.

Von *Theodor Schneider* in Frankfurt a. M.

C. L. Siegel[1]) bewies den Satz:

Es seien $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ die Näherungsbrüche bei der Entwicklung einer reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade $n \geqq 2$ in einen regelmäßigen Kettenbruch; dann gibt es unter diesen Näherungsbrüchen eine unendliche Teilfolge $\frac{p_{m_1}}{q_{m_1}}, \frac{p_{m_2}}{q_{m_2}}, \ldots$, für welche die Ungleichungen

$$\left|\xi - \frac{p_{m_\nu}}{q_{m_\nu}}\right| > \frac{1}{q_{m_\nu}^{\alpha}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit $\alpha = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)$ gelten.

In der vorliegenden Arbeit verschärfe ich das Siegelsche Ergebnis und erhalte den

Satz 1. *Es sei ξ eine reelle algebraische irrationale Zahl und $\mu > 2$. Die Lösungen der Ungleichung*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^{\mu}} \tag{1}$$

in ganzrationalen Zahlen p, q $(q > 0)$ seien $p^{(\nu)}, q^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots; q^{(1)} \leqq q^{(2)} \leqq \cdots)$; dann ist die Anzahl dieser Lösungen entweder endlich oder es ist

$$\varlimsup_{\nu \to \infty} \frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}} = \infty .$$

In der unter [1]) angeführten Untersuchung bewies C. L. Siegel nämlich einen ohne Schwierigkeit zu seinem obigen Ergebnis führenden Hilfssatz, welcher die dem Satze 1 entsprechende Aussage für $\mu = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)$ enthält. — Außerdem wies er darauf hin, daß Satz 1 für $\mu = 2$ nicht mehr gültig ist.

Über Satz 1 hinausgehend gelingt es jedoch, bereits für $\mu' > 1$ eine Aussage über solche Lösungen $\frac{p}{q}$ der Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^{\mu'}} \tag{1'}$$

zu machen, deren Nenner q einer geeigneten Bedingung genügen. Es gebe z. B. unter

---

[1]) C. L. Siegel, Über Näherungswerte algebraischer Zahlen, Mathematische Annalen 84 (1921), S. 80—99.

den Lösungen $\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}}$ von (1′) derartige, daß die Nenner $q^{(\nu)}$ Potenzen eines festen $q^{(\nu_0)}$ mit positiven ganzen Exponenten sind. Ich bezeichne diese mit $\frac{p^{(\nu')}}{q^{(\nu')}}$. Dann gilt über die Anzahl dieser Lösungen $\frac{p^{(\nu')}}{q^{(\nu')}}$ die gleiche Aussage wie in Satz 1 über $\frac{p^{(\nu)}}{q^{(\nu)}}$.

Es macht keine neue Schwierigkeit, die vorstehenden Ergebnisse auf Aussagen über Annäherung durch algebraische Zahlen auszudehnen. Der Hauptsatz (= Satz 1) wird damit verallgemeinert zu

Satz 2. *Sei ξ algebraisch irrational, $\mathfrak{H}$ ein algebraischer Zahlkörper, in bezug auf den ξ vom Grade $d \geqq 2$ ist, ζ eine primitive Zahl aus $\mathfrak{H}$ und $\mu > 2$. Ordnet man die Lösungen $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots$ der Ungleichung*

$$|\xi - \zeta| \leqq \frac{1}{H(\zeta)^{\mu}}$$

nach wachsenden Höhen $H(\zeta)$, so hat diese Ungleichung entweder nur endlich viele Lösungen oder es ist $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \frac{\log H(\zeta^{(\nu+1)})}{\log H(\zeta^{(\nu)})} = \infty$.

Selbstverständlich kann man diese Sätze anwenden, um neue transzendente Zahlen zu konstruieren; so folgt beispielsweise aus dem Zusatz von Satz 1, daß

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{[(1+\varepsilon_0)^n]}$$

transzendent ist für rationales $\frac{p}{q} \neq 0$, $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$ und $\varepsilon_0 > 0$.

Dem Beweise des Hauptsatzes schicke ich drei vorbereitende Hilfssätze voraus. An dieser Stelle möchte ich auf den ersten dieser Hilfssätze hinweisen, da dieser auch ohne Verbindung mit dem in dieser Arbeit behandelten Problem von Interesse sein dürfte.

Hilfssatz 1. $r_1, r_2, \ldots, r_k$ seien natürliche Zahlen. Man schneide den Quader $-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ mit der $(k-1)$-dimensionalen Ebene $\sum\limits_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} = t$. Bildet man den Quotienten Q aus der Anzahl $f_k(t)$ der Gitterpunkte, die in dem kleineren Quaderabschnitt (mit Einschluß seiner Oberfläche) liegen, und der Anzahl der Gitterpunkte des ganzen Quaders, so ist Q für hinreichend großes k beliebig klein[2]).

Beweis.[3]) Es sei $\varphi_0(t) = 1$ für $|t| \leqq \frac{1}{2}$ und $\varphi_0(t) = 0$ für $|t| > \frac{1}{2}$ und $\varphi_k(t)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und

$$t - \frac{1}{2} \leqq \frac{x_1}{r_1} + \cdots + \frac{x_k}{r_k} < t + \frac{1}{2}.$$

[2]) Unter Gitterpunkten verstehe man diejenigen Punkte, die durch Verschiebung einer Quaderecke um ganzzahlige Werte parallel zu den Quaderkanten entstehen.

[3]) Der hier angegebene Beweis von Hilfssatz 1 benutzt eine Idee von C. L. Siegel, mit deren Hilfe mein ursprünglicher Beweis sich wesentlich vereinfachte.

Dann folgt

$$(2) \qquad \varphi_k(t) = \sum_{x_k=-\frac{r_k}{2}}^{\frac{r_k}{2}} \varphi_{k-1}\left(t - \frac{x_k}{r_k}\right).$$

Außerdem sei $f_k(t)$ die Anzahl der Gitterpunkte des Gebietes

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und

$$t \leqq \frac{x_1}{r_1} + \cdots + \frac{x_k}{r_k};$$

dann gilt

$$(3) \qquad f_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_k\left(t + m - \frac{1}{2}\right).$$

Die Ungleichung

$$(4) \qquad \varphi_{k-1}(t) \leqq e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{k}} \prod_{\varkappa=1}^{k-1} (r_\varkappa + 1)$$

ist richtig für $k = 1$; sie gelte auch für $k = 2, \ldots, l$, dann folgt aus (2)

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varphi_l(t) &\leqq \sum_{x_l=-\frac{r_l}{2}}^{\frac{r_l}{2}} \left(e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{l}\left(t - \frac{x_l}{r_l}\right)^2} \prod_{\lambda=1}^{l-1} (r_\lambda + 1)\right) \\ &= e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{l}} \prod_{\lambda=1}^{l-1} (r_\lambda + 1) \sum_{x_l=-\frac{r_l}{2}}^{\frac{r_l}{2}} e^{-\frac{1}{l}\left(\frac{x_l}{r_l}\right)^2} e^{2\frac{t}{l}\frac{x_l}{r_l}}. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges ganzes x_l aus $0 \leqq x_l \leqq \frac{r_l}{2}$ setze man $\frac{x_l}{r_l} = \frac{\zeta}{2}$. Dann ist

$$(6) \qquad \zeta \leqq 1,$$

und es gilt

$$e^{-\frac{\zeta^2}{4l}} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t\zeta}{l}} + e^{-\frac{t\zeta}{l}}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t\zeta}{l}} + e^{-\frac{t\zeta}{l}}\right) \leqq e^{\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}},$$

da

$$\left(\frac{t\zeta}{l}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{(2m)!} \leqq \left(\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ist. Wegen (6) ist

$$e^{\frac{(t\zeta)^2}{l(l+1)}} \leqq e^{\frac{t^2}{l(l+1)}} = e^{\frac{t^2}{l} - \frac{t^2}{l+1}}.$$

Damit folgt aus (5)

$$\varphi_l(t) \leqq e^{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{l+1}} \prod_{\lambda=1}^{l} (r_\lambda + 1).$$

Es ist also (4) auch mit $k + 1 = l$ und daher allgemein für $k = 1, 2, \ldots$ gültig. Aus (3) erhält man dann für $t > \frac{1}{2}$

$$\frac{f_k(t)}{\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1)} \leqq e^{\frac{1}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{(t+m-\frac{1}{2})^2}{k+1}} \leqq e^{\frac{1}{4}} \int_{t-\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{k+1}} dx \leqq e^{\frac{1}{4}} \frac{k+1}{2t-1} e^{-\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{k+1}},$$

und hieraus folgt

$$(7) \qquad f_k(t) \leqq \frac{1}{B} \prod_{\varkappa=1}^{k} (r_\varkappa + 1)$$

für $t \geqq \sqrt{\frac{k}{2}\log k}$, $k > K(B)$ bei beliebig großem, von k unabhängigem B. Die Anzahl der Gitterpunkte des ganzen Quaders ist $\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1)$ und somit $Q = \frac{f_k(t)}{\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1)}$.

Nach (7) ist also für $t \geqq \sqrt{\frac{k}{2}\log k}$, $k > K$ der Quotient

$$Q \leqq \frac{1}{B}.$$

Hilfssatz 2. Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$. Ferner sei $r = \max(r_1, \ldots, r_k)$. Setzt man $t = \varepsilon k$ ($\varepsilon > 0$ unabhängig von k) und wählt k derart, daß Hilfssatz 1 mit $B = 2n + 1$ oder

$$(8) \qquad Q < \frac{1}{2n}$$

erfüllt ist, so lautet die Behauptung:

Es gibt ein nicht identisch verschwindendes Polynom $R(z_1, \ldots, z_k)$ mit ganzrationalen Koeffizienten und vom Grade $r_\varkappa$ in $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) so, daß

1. die Werte

$$(9) \qquad \left. \frac{\partial^{\tau_1+\cdots+\tau_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\tau_1} \cdots \partial z_k^{\tau_k}} \right|_{z_1=z_2=\cdots=z_k=\xi} = 0$$

sind, falls $\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_k$ nichtnegative ganzrationale Zahlen bedeuten;

2. die Ungleichung

$$(10) \qquad \left| \frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_k! \, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_k^{\varrho_k}} \right| < \gamma_1^r \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + |z_\varkappa|)^{r_\varkappa}$$

erfüllt ist, wobei die ganzrationalen Zahlen $\varrho_\varkappa \geqq 0$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) sind und die natürliche Zahl γ_1 nur von k, ε, ξ abhängt[4]*.*

Beweis. Es sei $R(z_1, \ldots, z_k)$ ein Polynom vom Grade $r_\varkappa$ in $z_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) mit noch zu bestimmenden Koeffizienten C_ω ($\omega = 1, \ldots, \prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa + 1)$), die zunächst als Unbestimmte gedacht seien. Diese Unbestimmten müssen nach (9) A linearen homogenen Gleichungen genügen. Jede dieser Gleichungen zerfällt aber, da ξ eine algebra-

[4]) Ebenso sollen alle noch auftretenden natürlichen Zahlen $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ nur von k, ε, ξ, nicht aber von $r_1, \ldots, r_k$ abhängen.

ische Zahl n-ten Grades ist, in n Bedingungen mit rationalen Koeffizienten. Die ganzrationalen Zahlen C_ω sind also derart zu bestimmen, daß sie nicht alle gleich Null sind, ein lineares homogenes Gleichungssystem $\{S_\chi\}$ ($\chi = 1, \ldots, nA$) befriedigen und absolut genommen nicht „allzu" große Werte annehmen. — Die ganzrationale Zahl γ_2 sei so gewählt, daß $\gamma_2\xi$ ganzalgebraisch ist. Dann hat das mit γ_2^{kr} multiplizierte Gleichungssystem $\{S_\chi\}$, das ich $\{S'_\chi\}$ nennen will, ganzrationale Koeffizienten, die absolut genommen kleiner sind als γ_3^r. Die Anzahl der Unbekannten ist nach (8) größer als das Doppelte der Anzahl der Gleichungen, denn es ist

$$\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1) > 2nQ\prod_{\varkappa=1}^{k}(r_\varkappa+1) = 2nA\,.$$

Nach einem mittels des Schubfachschlusses früher bewiesenen Satze[5]) ist das Gleichungssystem $\{S'_\chi\}$ in nicht sämtlich verschwindenden ganzrationalen Zahlen C_ω lösbar, so daß

$$(11)\qquad |C_\omega| < \gamma_4^r$$

ist. — Nachdem nun die Koeffizienten C_ω von $R(z_1, \ldots, z_k)$ bestimmt und nach (11) abgeschätzt sind, erhält man ohne weitere Rechnung die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_k} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1!\cdots\varrho_k!\,\partial z_1^{\varrho_1}\cdots\partial z_k^{\varrho_k}}\right| < \gamma_4^r \prod_{\lambda=1}^{k}\binom{r_\lambda}{\varrho_\lambda}\prod_{\varkappa=1}^{k}(1+|z_\varkappa|)^{r_\varkappa}\,.$$

Da aber $\binom{r_\lambda}{\varrho_\lambda} < 2^{r_\lambda}$ ist und man $\prod_{\lambda=1}^{k} 2^{r_\lambda} < \gamma_5^r$ setzen kann, folgt aus obiger Abschätzung die Behauptung (10).

Hilfssatz 3. *Es seien* $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ *ganzrationale Zahlen mit* $q_\nu > 0$ *und* $(p_\nu, q_\nu) = 1$ $(\nu = 1, \ldots, k)$. $R(z_1, \ldots, z_k)$ *sei das in Hilfssatz* 2 *bestimmte Polynom. Dann lautet die Behauptung: Ist*

$$(12)\qquad \log q_\nu > \gamma_6\, r_\nu \prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda+1)^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

(*für* $\nu = k$ *bedeute* $\prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda+1)$ *die Zahl* 1), *so existieren* $k-1$ *Zahlen*

$$(13)\qquad \varrho_\nu < \prod_{\lambda=\nu+1}^{k}(r_\lambda+1) \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1)$$

so, daß

$$\left.\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\varrho_1}\cdots\partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}\right|_{z_1=\frac{p_1}{q_1},\ldots,z_k=\frac{p_k}{q_k}} \neq 0$$

ist. Selbstverständlich folgt dann $\varrho_\nu \leqq r_\nu$.

Beweis. Ich möchte eine in der Literatur bereits mehrfach bewiesene Tatsache voraussetzen[6]): Sind $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$ linear unabhängige Polynome mit rationalen Koeffizienten, so ist die Wronskische Determinante dieser s Polynome nicht identisch 0.

---

[5]) Th. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I, Journal für die reine und angewandte Mathematik **172** (1934), S. 65—69 (Hilfssatz 1).

[6]) C. L. Siegel, Über den Thueschen Satz, Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-naturv. Klasse (1921) No. 16, S. 8, oder C. L. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift **10** (1921), S. 177—178 (Hilfssatz IV).

Die Funktion R schreibe ich in der Form

$$R(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\nu_1=0}^{r_1} z_1^{\nu_1} S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k).$$

Von den $r_1 + 1$ Polynomen $S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k)$ seien $t_1 + 1$ voneinander linear unabhängig; ich bezeichne sie mit

$$U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k), \ldots, U_{t_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k).$$

Da R nicht identisch verschwindet, folgt

$$0 \leqq t_1 \leqq (r_2 + 1) \cdots (r_k + 1) - 1.$$

Zwischen den $S_{\nu_1}^{[1]}$ und den $U_\beta^{[1]}$ $(\beta = 0, \ldots, t_1)$ gelten lineare Beziehungen der folgenden Art:

$$S_{\nu_1}^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\beta=0}^{t_1} b_{\beta\nu_1}^{[1]} U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k) \qquad (\nu_1 = 0, \ldots, r_1).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $U_\beta^{[1]}$ ergeben sich die

$$b_{\beta\nu_1}^{[1]} \qquad (\beta = 0, \ldots, t_1;\ \nu_1 = 0, \ldots, r_1)$$

als rationale Zahlen, deren Zähler und Hauptnenner unter Berücksichtigung von (11) absolut genommen kleiner sind als $(t_1 + 1)!\ \gamma_4^{r(t_1+1)}$. — Mittels der letzten Beziehung erhält man für R die Darstellung:

$$R(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{\beta=0}^{t_1} g_\beta^{[1]}(z_1)\ U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k);$$

dabei ist

$$g_\beta^{[1]}(z_1) = \sum_{\nu_1=0}^{r_1} b_{\beta\nu_1}^{[1]} z_1^{\nu_1} \qquad (\beta = 0, \ldots, t_1).$$

Da die Matrix $(b_{\beta\nu_1}^{[1]})$ den Rang $t_1 + 1$ hat, sind auch die Polynome $g_\beta^{[1]}(z_1)$ voneinander linear unabhängig. Durch Differentiation folgt

$$\frac{\partial^{\alpha_1} R(z_1, \ldots, z_k)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} = \sum_{\beta=0}^{t_1} \frac{\partial^{\alpha_1} g_\beta^{[1]}(z_1)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}}\ U_\beta^{[1]}(z_2, \ldots, z_k).$$

Nach dem eingangs dieses Beweises vorausgeschickten Satze ist die Determinante

$$\Delta^{[1]}(z_1) = \left| \frac{\partial^{\alpha_1} g_\beta^{[1]}(z_1)}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} \right| \not\equiv 0 \quad (\alpha_1 = 0, \ldots, t_1;\ \beta = 0, \ldots, t_1).$$

Bezeichne ich die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Spalte von $\Delta^{[1]}$ mit $\Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1)$ $(\alpha_1 = 0, \ldots, t_1)$, so ist

$$\sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1) \frac{\partial^{\alpha_1} R}{\alpha_1!\ \partial z_1^{\alpha_1}} = \Delta^{[1]}(z_1) \cdot U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k).$$

Das Polynom $\Delta^{[1]}(z_1)$ ist vom Grade $(t_1 + 1)\, r_1 \leqq \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1) \cdot r_1$. Seine Koeffizienten sind rational, und ihre Zähler und Nenner sind nach den über $b_{\beta\nu_1}^{[1]}$ gewonnenen Feststellungen absolut genommen $< \gamma_7^{r \cdot \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1)^2}$. Die Koeffizienten von $U_0^{[1]}(z_2, \ldots, z_k)$ hingegen genügen derselben Abschätzung (11) wie diejenigen von R.

Man denke sich in obiger Überlegung $U_0^{[1]}$ an die Stelle von R gesetzt und gewinnt, wenn $U_0^{[2]}$ die $U_0^{[1]}$ entsprechende Funktion von $z_3, \ldots, z_k$ und $\Delta^{[2]}(z_2)$ das $\Delta^{[1]}(z_1)$ entsprechende Polynom ist, die Eliminationsgleichung von z_2:

$$\sum_{\alpha_2=0}^{t_2} \Delta_{\alpha_2}^{[2]}(z_2) \frac{\partial^{\alpha_2} U_0^{[1]}}{\alpha_2!\, \partial z_2^{\alpha_2}} = \Delta^{[2]}(z_2) \cdot U_\sigma^{[2]}(z_3, \ldots, z_k),$$

oder mit derjenigen von z_1 zusammengefaßt:

$$\sum_{\alpha_1=0}^{t_1} \sum_{\alpha_2=0}^{t_2} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1)\, \Delta_{\alpha_2}^{[2]}(z_2) \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} R}{\alpha_1!\, \alpha_2!\, \partial z_1^{\alpha_1}\, \partial z_2^{\alpha_2}} = \Delta^{[1]}(z_1)\, \Delta^{[2]}(z_2)\, U_0^{[2]}(z_3, \ldots, z_k).$$

Hier ist

$$0 \leqq t_2 \leqq (r_3+1) \cdots (r_k+1) - 1.$$

Das Polynom $\Delta^{[2]}(z_2)$ ist vom Grade $(t_2+1)r_2$; Zähler und Hauptnenner seiner rationalen Koeffizienten sind absolut genommen $< \gamma_8^{r \cdot \prod_{\lambda=3}^{k} (r_\lambda+1)^2}$.

Führt man dieses Verfahren fort, so erhält man mit dem $(k-1)$-ten Schritte die Eliminationsgleichung von z_{k-1}:

$$\sum_{\alpha_{k-1}=0}^{t_{k-1}} \Delta_{\alpha_{k-1}}^{[k-1]}(z_{k-1}) \frac{\partial^{\alpha_{k-1}} U_0^{[k-2]}}{\alpha_{k-1}!\, \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}} = \Delta^{[k-1]}(z_{k-1})\, U^{[k-1]}(z_k).$$

Wird $U_0^{[k-1]}(z_k) = \Delta^{[k]}(z_k)$ gesetzt, so folgt durch Zusammenfassung der Eliminationsgleichungen von $z_1, \ldots, z_{k-1}$ die Relation

$$(14) \qquad \sum_{\alpha_\nu=0\ (\nu=1,\ldots,k-1)}^{t_\nu} \Delta_{\alpha_1}^{[1]}(z_1) \cdots \Delta_{\alpha_{k-1}}^{[k-1]}(z_{k-1}) \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\alpha_1! \cdots \alpha_{k-1}!\, \partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}} = \Delta^{[1]}(z_1) \cdots \Delta^{[k]}(z_k).$$

Für $\nu = 1, \ldots, k-1$ ist dabei

$$(15) \qquad 0 \leqq t_\nu \leqq (r_{\nu+1}+1) \cdots (r_k+1) - 1;$$

Zähler und Hauptnenner $H^{[\nu]}$ der Koeffizienten von $\Delta^{[\nu]}(z_\nu)$ sind dem absoluten Betrage nach $< \gamma_9^{r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2}$. Multipliziert man das Polynom $\Delta^{[\nu]}(z_\nu)$ mit $H^{[\nu]}$, so sind die ganzrationalen Koeffizienten des entstandenen Polynoms $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ absolut genommen $< \gamma_9^{2r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2}$ und, wenn man $e^{\gamma_0} > \gamma_9^2$ setzt und (12) anwendet, sogar

$$< e^{\gamma_0 r \cdot \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda+1)^2} < q_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1).$$

Keines der Polynome $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ verschwindet für $z_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$, denn sonst müßte der Quotient $\frac{\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)}{q_\nu z_\nu - p_\nu}$ ganzrationale Koeffizienten haben und speziell müßte q_ν in den Koeffizienten des höchsten Gliedes von $\Delta_{(H)}^{[\nu]}(z_\nu)$ aufgehen. Dies ist aber nach der zuletzt geführten Abschätzung unmöglich. Folglich ist für $z_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ die rechte und damit auch die linke Seite von (14) ungleich Null. Es verschwinden also nicht sämtliche Ableitungen $\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}$ für $z_1 = \frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k = \frac{p_k}{q_k}$, wenn nach (15) $0 \leqq \alpha_\nu \leqq (r_{\nu+1}+1)\cdots(r_k+1)-1$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$ ist. Das Wertesystem α_ν, für das die entsprechende Ableitung von R an der Stelle $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ nicht verschwindet, bezeichne ich mit ϱ_ν $(\nu = 1, \ldots, k-1)$. Mit diesen ϱ_ν ist die Bedingung (13) erfüllt und damit Hilfssatz 3 bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes. Ich nehme an, Ungleichung (1) besitze unendlich viele Lösungen und es seien $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ Lösungen dieser Ungleichung. Ich setze

$$r_\nu = \left[r_k \frac{\log q_k}{\log q_\nu}\right] \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1); \tag{16}$$

daraus folgt

$$(r_\nu + 1)\log q_\nu > r_k \log q_k \geqq r_\nu \log q_\nu \,.$$

Ich mache nun die Voraussetzung: Es sei $\overline{\lim}\,\frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}}$ eine endliche Zahl. Dann gilt von einem gewissen ν_0 ab für alle $\nu > \nu_0$ die Ungleichung

$$\frac{\log q^{(\nu+1)}}{\log q^{(\nu)}} \leqq \eta\,. \tag{17}$$

Durch das Bestehen von (17) ist es möglich, k Ungleichungen über $q_1, \ldots, q_k$ so vorauszusetzen, daß die unter Hinzunahme der schon bestehenden Bedingungen dadurch bestimmten $q_1, \ldots, q_k$ und $r_1, \ldots, r_k$ alle in den Hilfssätzen 2 und 3 über diese Größen gemachten Annahmen erfüllen. Diese Ungleichungen lauten:

$$\log q_1 > \gamma_{10} r_k^{4\cdot 3^{k-2}} \quad \text{mit einem hinreichend großen } \gamma_{10}\,, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\eta}\, r_k^{4\cdot 3^{k-\nu-2}} < \frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu} \leqq r_k^{4\cdot 3^{k-\nu-2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-2)\,, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\eta}\, r_k < \frac{\log q_k}{\log q_{k-1}} \leqq r_k\,. \tag{20}$$

Aus (16), (19) und (20) folgt, falls r_k genügend groß, $r_1 = \max(r_1, \ldots, r_k) = r$ und $r_k = \min(r_1, \ldots, r_k)$.

Aus (19) und (20) folgt weiter

$$\frac{\log q_k}{\log q_\nu} \leqq r_k^{1+4\sum\limits_{\lambda=\nu}^{k-2} 3^{k-\lambda-2}} = r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}-1}\,.$$

Nach (16) ist nun

$$r_\nu \leqq r_k \frac{\log q_k}{\log q_\nu} \leqq r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1)\,.$$

Hieraus schließt man

$$\gamma_6 r \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1)^2 < \gamma_{11} r \prod_{\lambda=2}^{k} r_\lambda^2 \leqq \gamma_{11} r_k^{2\cdot 3^{k-2}} r_k^2 \prod_{\lambda=2}^{k-1} r_k^{4\cdot 3^{k-\lambda-1}};$$

da $r_k \prod\limits_{\lambda=2}^{k-1} r_k^{2\cdot 3^{k-\lambda-1}} = r_k^{3^{k-2}}$ ist, ergibt sich also

$$\gamma_6 r \prod_{\lambda=2}^{k} (r_\lambda + 1)^2 < \gamma_{11} r_k^{4\cdot 3^{k-2}} < \log q_1\,,$$

wenn nur in (18) $\gamma_{10} > \gamma_{11}$ ist. Da aus (19) und (20) außerdem folgt, daß $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ ist für hinreichend großes r_k, ist (12) erfüllt. Aus den linken Seiten von (19) und (20) leitet man unter Benutzung von (16) ab:

$$\frac{1}{\eta^{k-\nu}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}-1} < \frac{\log q_k}{\log q_\nu} < \frac{r_\nu + 1}{r_k}$$

oder

$$r_\nu > \frac{1}{\eta^{k-\nu}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}} - 1 \geqq \frac{1}{\gamma_{12}} r_k^{2\cdot 3^{k-\nu-1}};$$

mit Hilfe dieser Abschätzung erhält man aus

$$\prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda + 1) < \gamma_{13} \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} r_\lambda \leqq \gamma_{13} r_k \prod_{\lambda=\nu+1}^{k-1} r_k^{2\cdot 3^{k-\lambda-1}} = \gamma_{13} r_k^{3^{k-\nu-1}}$$

die Ungleichung

$$r_\nu > \frac{r_k^{3^{k-\nu-1}}}{\gamma_{12}\gamma_{13}} \prod_{\lambda=\nu+1}^{k} (r_\lambda + 1) \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1). \tag{21}$$

Es sei nun r_k so groß gewählt, daß

$$\varepsilon \frac{r_k}{\gamma_{12}\gamma_{13}} > \gamma_{14} \qquad \left(\frac{1}{8} > \varepsilon > 0\right) \tag{22}$$

erfüllt ist; hierbei sei γ_{14} so angenommen, daß mit (22) auch die seitherigen Voraussetzungen eines hinreichend großen r_k befriedigt sind. Dann folgt aus (13), (21) und (22)

$$\varrho_\nu < \varepsilon r_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1). \tag{23}$$

Nach Hilfssatz 3 ist die rationale Zahl

$$\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{k-1}} R(z_1, \ldots, z_k)}{\varrho_1! \cdots \varrho_{k-1}!\, \partial z_1^{\varrho_1} \cdots \partial z_{k-1}^{\varrho_{k-1}}} \Bigg|_{z_1=\frac{p_1}{q_1}, \ldots, z_k=\frac{p_k}{q_k}} = R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right) \neq 0 .$$

Mithin ist, da die Koeffizienten von R ganzrational sind, die ganzrationale Zahl

$$q_1^{r_1} \cdots q_k^{r_k} \left| R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| \geqq 1 . \tag{24}$$

Nach (9) treten in der Entwicklung von $R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}(z_1, \ldots, z_k)$ nach Potenzen von $z_1 - \xi, \ldots, z_k - \xi$ keine Glieder auf, deren Exponenten $\tau_1 - \varrho_1, \ldots, \tau_k - \varrho_k$ ($\varrho_k = 0$) der Bedingung

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), \qquad \tau_\lambda - \varrho_\lambda \geqq 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, k)$$

genügen. Daraus folgt in Verbindung mit (23), daß alle Glieder mit dem Exponenten τ'_λ verschwinden, wenn nur

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau'_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)$$

ist. Es ist infolgedessen von jedem Gliede der Potenzentwicklung von $R_{(\varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1})}$ ein Faktor $\Phi(z_1, \ldots, z_k) = (z_1 - \xi)^{\sigma_1} \ldots (z_k - \xi)^{\sigma_k}$ abspaltbar, wobei die σ_λ die Ungleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\sigma_\lambda}{r_\lambda} \geqq k\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) \tag{25}$$

erfüllen. Nach Ungleichung (1) ist

$$(26)\qquad \left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| \leqq q_1^{-\mu\sigma_1} \ldots q_k^{-\mu\sigma_k}.$$

Aus (16) folgt

$$(27)\qquad q_k^{\frac{r_k-1}{r_\nu}} < q_\nu \leqq q_k^{\frac{r_k}{r_\nu}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Eliminiert man $q_\nu\ (\nu = 1, \ldots, k-1)$ mittels (27) aus der rechten Seite von (26), so erhält man nach (25)

$$\left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{-\mu(r_k-1)\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\sigma_\lambda}{r_\lambda}} \leqq q_k^{-\mu(r_k-1)k\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)}.$$

Benutzt man nun (22), so erkennt man

$$(28)\qquad \left|\Phi\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{-\mu r_k k\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)}.$$

Jetzt kann man $\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right|$ abschätzen. Es ist nach (10) und (28)

$$\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q^k}\right)\right| < \gamma_1^r \prod_{\lambda=1}^{k} \gamma_{15}^{r_\lambda} q_k^{-\mu r_k k\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)} < \gamma_{16}^r q_k^{-r_k k\mu\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)}.$$

Berücksichtigt man die rechte Seite von (27), so erkennt man, daß das Produkt

$$q_1^{r_1} \ldots q_k^{r_k} \leqq q_k^{r_k k}$$

ist. Damit ist die ganzrationale Zahl

$$q_1^{r_1} \ldots q_k^{r_k}\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| < \gamma_{16}^r q_k^{r_k k\left(1-\mu\left(\frac{1}{2}-3\varepsilon\right)\right)}.$$

Bestimmt man nun ε derart, daß $\left(\frac{1}{2} - 4\varepsilon\right)\mu = 1$, d. h. $\varepsilon = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\mu}$ ist, und wählt man r_k so groß, daß $\gamma_{16} < q_1^{k\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}}$ ist, so erhält man nach (27)

$$(29)\qquad q_1^{r_1} \ldots q_k^{r_k}\left|R_{(\varrho_1,\ldots,\varrho_{k-1})}\left(\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}\right)\right| < q_k^{r_k k\left(\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}+1-\frac{\frac{1}{2}-3\varepsilon}{\frac{1}{2}-4\varepsilon}\right)} = q_k^{-r_k k\frac{\varepsilon}{1-8\varepsilon}}.$$

Nach (22) ist aber die rechte Seite von (29) kleiner als 1 im Widerspruch zu (24). Diesen Widerspruch kann man beseitigen, indem man die Annahme (17) fallen läßt; damit erhält man aber den behaupteten Satz.

Ergänzend möchte ich noch auf die in der Einleitung an Satz 1 anschließende Bemerkung zurückkommen. [7])

Man bilde analog R ein Polynom $R'(z_1, \ldots, z_k)$ von den Höchstgraden r_ν in z_ν und denke es sich nach Potenzen von $z_1 - \xi, \ldots, z_k - \xi$ entwickelt. Die Exponenten seien mit $\tau_1, \ldots, \tau_k$ bezeichnet. Dann sollen diejenigen Glieder nicht auftreten, für die

$$1.\qquad \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \leqq k\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)$$

[7]) Zusatz bei der Korrektur: Herr K. Mahler teilte mir mit, daß er mittels meiner Methode analoge Sätze bewiesen hat für den Fall, daß man sich auf Näherungsbrüche $\frac{p}{q}$ beschränkt, deren Zähler oder Nenner nur durch beschränkte Primzahlen teilbar sind; seine Arbeit erscheint demnächst in den Proceedings of the Academie van Wetenschappen te Amsterdam.

und für die

$$2. \quad \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\tau_\lambda}{r_\lambda} \geqq k\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1\right)$$

ist. Man beweist auch hier leicht die entsprechenden Hilfssätze. Beim Beweise des nunmehrigen Hauptsatzes bilde man, um R' durch Multiplikation ganzrational zu machen, nicht das Produkt $q_1^{r_1} \cdots q_k^{r_k}$, sondern einen geeigneten Hauptnenner. In speziellen Fällen hat dieser Hauptnenner nur die Größenordnung $O(q_k^{r_k k\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)})$, und in diesen Fällen gelingt es, die Ungleichung (1) sogar für $\mu' > 1$ zu beweisen.

Eingegangen 19. Januar 1936.

Nachdem ich nunmehr über vierundzwanzig Jahre die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik geführt und einundfünfzig seiner Bände herausgegeben habe, fühle ich die Zeit gekommen, diese Aufgabe in jüngere Hände zu legen. Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, bei diesem Abschluß einer langen mir ans Herz gewachsenen Tätigkeit allen denen meinen wärmsten Dank zu sagen, die mir durch Einsendung ihrer Arbeiten geholfen haben, dem altehrwürdigen Crelleschen Journal seinen Platz in der mathematischen Welt zu behaupten. Auch danke ich allen, die mir bei der Herausgabe ratend und helfend zur Seite gestanden haben, ganz besonders herzlich meinem Nachfolger Helmut Hasse, mit dem vereint ich unsere Zeitschrift schon seit dem Jahre 1929 leiten durfte, für seine vorbildliche Arbeit für diesen großen Zweck; gerade das Zusammenwirken mit ihm wird mir eine dauernde schöne Erinnerung an diesen Teil meiner Lebensarbeit bleiben. Ich spreche endlich den Herren des Verlages Walter de Gruyter & Co. meinen herzlichen Dank dafür aus, daß sie mir in diesen langen Jahren immer bereitwillig und verständnisvoll entgegengekommen sind.

Marburg a. d. Lahn, den 12. Juli 1936.

Kurt Hensel.

Vom 176. Bande ab ist mir die Herausgabe des Journals für die reine und angewandte Mathematik übertragen worden. Ich übernehme diese Aufgabe aus den Händen meines verehrten Lehrers Kurt Hensel, unter dessen Leitung ich schon eine Reihe von Jahren bei der Herausgabe des Journals mitgewirkt habe.

Schon am Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn trat Kurt Hensel dieser ältesten deutschen mathematischen Zeitschrift durch seine großen Lehrer nahe. Lange Jahre hindurch hat er dann später die ihm übertragene Herausgabe in pflichtgetreuer und aufopfernder Weise in oft schwerer Zeit geführt. Viele wertvolle Arbeiten hat er für das Journal gewonnen, und auch den überwiegenden Teil seines eigenen der höheren Arithmetik gewidmeten Lebenswerks hat er darin herausgebracht. Für seine fruchtbare Tätigkeit im Dienste dieser Zeitschrift gebührt ihm hohe Anerkennung und warmer Dank seitens der mathematischen Fachwelt.

An alle Freunde des Crelleschen Journals richte ich die aufrichtige Bitte, mich in meiner verantwortungsvollen Aufgabe durch Einsendung von Beiträgen zu unterstützen.

Göttingen, den 12. Juli 1936.

Helmut Hasse.