Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

1. Herr Bouligand[1]) hat die Frage aufgeworfen nach der Struktur derjenigen ebenen Punktmengen $\mathfrak{M}$, welchen in jedem ihrer Punkte P_0 eine der beiden folgenden Eigenschaften zukommt:

1, 1. Jeder Kreis $\mathfrak{K}(Q_1, Q_2, Q_3)$ durch drei zu P_0 benachbarte Punkte Q_1, Q_2, Q_3 von $\mathfrak{M}$ strebt einem Nullkreis zu, wenn die Q_j beliebig gegen P_0 streben[2]).

1, 2. Zu P_0 läßt sich ein Paar rechtwinkliger Achsen x, y derart angeben, daß eine Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{M}$ ganz einem durch $0 \leqq |x| \leqq a$, $\lambda |x|^{1+\Theta} \leqq y \leqq b$ definierten Bereiche angehört, wobei $0 < a$, $0 < b$, $0 < \lambda$ und $0 < \Theta < 1$ passend gewählte reelle Zahlen bezeichnen, die im allgemeinen von P_0 abhängen.

2. Hinsichtlich der Eigenschaft 1,1 ist bereits bekannt[3]), daß kein Kontinuum[4]) diese Eigenschaft besitzen kann, m. a. W. daß jede Menge $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft 1,1 höchstens punkthaft[4]) sein kann. Daß das gleiche hinsichtlich der Eigenschaft 1,2 gilt, scheint bisher nicht bekannt zu sein.

Im folgenden soll dies als Spezialfall einer etwas allgemeineren Feststellung bewiesen werden. Dieser wird sich auch die Frage 1,1 unterordnen, womit sich zugleich eine neue (wie es scheint übersichtliche) Erledigung von 1,1 ergibt. Auf einige mögliche Verallgemeinerungen der Fragestellung wird am Schluß hingewiesen.

3. Unter einem *Tangentialschmiegkreis*[5]) der ebenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ *in einem ihrer Häufungspunkte H* soll folgendes verstanden werden: Es sei t irgendeine Tangente an $\mathfrak{M}$ in H, d. h. Limes einer Folge von Geraden g_ϱ durch H und einen Punkt P_ϱ von $\mathfrak{M}$, wobei $P_\varrho \to H$ mit $\varrho \to \infty$. Ein zu t gehöriger Tangentialschmiegkreis $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(H; t, \mathfrak{M})$ in H an $\mathfrak{M}$ ist dann erklärt als Limes einer Folge von Kreisen $\mathfrak{K}_\varrho$ der folgenden Art:

---

[1]) G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932, S. 221/222.

[2]) Außer den Nullkreisen, d. h. den Punkten, werden hier und im folgenden auch die Geraden zu den Kreisen gerechnet. Operationsbereich ist die euklidische Ebene.

[3]) M. Ch. Brunold, Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques, Bull. sci. école polytechn. Timisoara 5 (1934), 12—37. — Vgl. auch G. Bouligand, Critères de discontinuité pour les ensembles ponctuels, ebenda, S. 38—40.

[4]) Unter einem *Kontinuum* wird im folgenden eine abgeschlossene, mehr als einen Punkt enthaltende, zusammenhängende Punktmenge verstanden und unter einer *punkthaften* Menge eine solche Punktmenge, in welcher kein Kontinuum als Teilmenge enthalten ist (vgl. Zoretti-Rosenthal, Punktmengen, Enzykl. d. math. Wiss. II, 3, S. 986 und 900).

[5]) Vgl. J. Hjelmslev, Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie, Acta math. 47 (1926), S. 143 ff. — In der Terminologie von Herrn Bouligand (vgl. Fußnote 1) wäre die Gesamtheit der Tangentialschmiegkreise in einem Punkte P_0 als „Kreiskontingent" (contingent circulaire) der Menge in P_0 zu bezeichnen.

$\mathfrak{K}_\varrho$ geht durch H, besitzt dort t als Tangente und enthält außerdem einen Punkt Q_ϱ von $\mathfrak{M}$, wobei $Q_\varrho \to H$ mit $\varrho \to \infty$. Es ist dann $\mathfrak{T} = \lim\limits_{\varrho \to \infty} \mathfrak{K}_\varrho$.

Als *Tangentialkrümmung* von $\mathfrak{M}$ in H bezeichnen wir die untere Grenze der (nichtnegativen) Krümmungen aller Tangentialschmiegkreise, wobei Nullkreisen die Krümmung $+\infty$ zugeschrieben wird. Dann lautet die zu beweisende Behauptung:

Eine Punktmenge der euklidischen Ebene, deren Tangentialkrümmung in jedem (zu ihr gehörigen) Häufungspunkte unendlich ist, muß punkthaft sein.

3, 1. Unter den Grenzwerten der in 1, 1 genannten Kreise $\mathfrak{K}(Q_1, Q_2, Q_3)$ sind sicher auch die sämtlichen Tangentialschmiegkreise enthalten. Die Frage 1, 1 ordnet sich also in der Tat dem Problem in Nr. **3** als spezieller Fall unter.

3, 2. Besitzt $\mathfrak{M}$ im Punkte P_0 die Eigenschaft 1, 2, so ist die Tangentialkrümmung von $\mathfrak{M}$ in P_0 unendlich. Daher ist auch die in 1, 2 enthaltene Frage Spezialfall des Problems der Nr. **3**.

3, 3. Es sei $\mathfrak{M}$ ein stetig differenzierbarer Bogen $y = f(x)$; ferner existiere in $x = x_0$ auch die zweite Ableitung von $f(x)$, und besitze einen endlichen Wert. Dann sind alle Tangentialschmiegkreise an $\mathfrak{M}$ in P_0 identisch und gleich dem Krümmungskreis im klassischen (üblichen) Sinne [6]); die Tangentialkrümmung des Bogens in x_0 ist also endlich.

4. Zum Beweise der in Nr. **3** aufgestellten Behauptung können wir (indirekt) so schließen:

Angenommen, in jedem Häufungspunkte von $\mathfrak{M}$ sei die Tangentialkrümmung unendlich, so daß also alle Tangentialschmiegkreise Nullkreise sind. Angenommen ferner, es enthalte $\mathfrak{M}$ ein Kontinuum [4]) $\mathfrak{N}$; o. B. d. A. kann $\mathfrak{N}$ als beschränkt angenommen werden. Dann muß $\mathfrak{N}$ von endlicher zyklischer, und speziell linearer Ordnung sein, d. h. $\mathfrak{N}$ hat mit jedem Kreise und mit jeder Geraden höchstens endlich viele verschiedene Punkte gemeinsam, enthält also insbesondere keine Strecken und keine Kreisbogen [7]). Enthielte nämlich [7]) der Durchschnitt eines Kreises $\mathfrak{k}$ (der ev. auch eine Gerade sein kann) mit $\mathfrak{N}$ unendlich viele Punkte, so wäre auf der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{N}$ auch ein Häufungspunkt H von $\mathfrak{k} \frown \mathfrak{N}$ vorhanden, also eine gegen H konvergierende Folge von Punkten P_ϱ aus $\mathfrak{k} \frown \mathfrak{N}$. Dann existierte aber der Limes t der Geraden durch H und P_ϱ und es wäre t Tangente an $\mathfrak{N}$ und an $\mathfrak{k}$ in H; schließlich wäre $\mathfrak{k}$ Tangentialschmiegkreis von endlicher Krümmung in H an $\mathfrak{N}$. Wegen der endlichen linearen Ordnung von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N}$ Bogensumme [8]), enthält also einen einfachen, abgeschlossenen Bogen $\mathfrak{B}$, so daß die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{N}$—$\mathfrak{B}$ fremd zum offenen Kern von $\mathfrak{B}$ ist. Dann ist $\mathfrak{B}$ ebenfalls von endlicher a) linearer und b) zyklischer Ordnung. Wegen a) enthält $\mathfrak{B}$ einen konvexen Teilbogen [9]) und dieser wegen b) einen Bogen $\mathfrak{Z}_3$ von der zyklischen Ordnung drei [10]). Der Ausartungsfall, daß an Stelle von $\mathfrak{Z}_3$ eine Strecke oder ein Kreisbogen tritt, kommt nicht in Frage, da dann die Tangentialkrümmung nicht unendlich wäre. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Bogen $\mathfrak{Z}_3$ die Darstellung $y = f(x)$

---

[6]) Dies lehrt eine einfache Rechnung. Die klassische Krümmung ist $f'' : (1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}$.

[7]) Vgl. Brunold, a. a. O. [3]), S. 21/22. Für die Gültigkeit der Behauptung ist die Abgeschlossenheit der betrachteten Menge (im Texte oben $\mathfrak{N}$) wesentlich.

[8]) A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta mathematica **55** (1930), S. 67 ff. Vgl. auch O. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal **167** (1932), S. 22, Nr. 0,5.

[9]) O. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 50 ff.; auch Haupt, a. a. O. [10]), S. 184.

[10]) O. Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (Math.-naturwiss. Abt.) 1935, S. 185.

bezüglich rechtwinkliger kartesischer Koordinaten x, y gestattet $(0 \leqq x \leqq 1)$. Der Bogen $\mathfrak{Z}_3$ besitzt zugleich mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ in jedem Punkte unendliche Tangentialkrümmung. Nun ist aber $\mathfrak{Z}_3$, also $f(x)$, stetig differenzierbar [11]). Wegen der Konvexität von $\mathfrak{Z}_3$ besitzt $f(x)$ fast überall, etwa in $x = x_0$, eine endliche zweite Ableitung. Zufolge 3,3 kann daher die Krümmung in x_0 nicht unendlich sein, w. z. z. w. — Man kann auch lediglich aus der Tatsache, daß in $\mathfrak{N}$ *konvexe* Bogen $\mathfrak{K}$ enthalten sind, einen Widerspruch gewinnen: $\mathfrak{K}$ enthält Punkte P, in denen die zweite Ableitung $f''(x)$ existiert und endlich ist, genauer: in denen die Ableitung der rechten Ableitung existiert, endlich ist und mit der ebenfalls existierenden Ableitung der linken Ableitung übereinstimmt. Daraus folgt die Existenz eines Tangentialkrümmungskreises mit endlicher Krümmung [12]).

5. Statt mit Hilfe der Darstellung $y = f(x)$ für den Bogen $\mathfrak{Z}_3$, der Konvexität von $f(x)$ und des Lebesgueschen Satzes auf die Existenz eines Punktes von endlicher Tangentialkrümmung zu schließen, hätten wir auch die Hjelmslevschen Sätze heranziehen können, denenzufolge in jedem Punkte von $\mathfrak{Z}_3$ ein einseitiger Tangentialschmiegkreis existiert, welcher längs $\mathfrak{Z}_3$ monoton wächst [11]). Daraus ergibt sich wiederum der Beweis. Dieser letzterwähnte Gedankengang dürfte den Vorzug der Verallgemeinerungsfähigkeit besitzen. Die oben benutzten Sätze, denenzufolge die ordnungshomogenen Bogen endlicher linearer bzw. zyklischer Ordnung im wesentlichen nur von zweiter bzw. dritter Ordnung sein können, lassen nämlich — wie wir an anderer Stelle zu zeigen hoffen — Verallgemeinerungen auf gewisse Systeme von $\mathfrak{K}_2$- und $\mathfrak{K}_3$-Kurven zu; wahrscheinlich gilt dabei auch eine entsprechende Verallgemeinerung der Hjelmslevschen Sätze. Damit wäre dann die Möglichkeit gegeben, sowohl die Problemstellung als den Beweis zu verallgemeinern.

Was weiterhin die Übertragung auf den R_n anlangt, so liegt es nahe, zunächst in geeigneter Weise Tangentialschmiegkugeln an eine Menge $\mathfrak{M}$ des R_n in einem Punkte P von $\mathfrak{M}$ und mit deren Hilfe die Tangentialkrümmung an $\mathfrak{M}$ in P zu definieren; es würde sich dann um die Frage handeln, ob Mengen mit überall unendlicher Tangentialkrümmung höchstens punkthaft sein können. Doch soll weder hierauf eingegangen werden, noch auf diejenige Fassung, in welcher von Herrn Bouligand [1]) die Verallgemeinerung des ebenen Problems auf den Raum aufgestellt wurde.

---

[11]) J. Hjelmslev, a) Introduction à la théorie des suites monotones, Oversigt over det kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh. 1914, Nr. 1. b) Die graphische Geometrie, 8. Skand. Mat.-Kongr. Stockholm 1934, S. 10. — Falls man nur die stetige Differenzierbarkeit benötigt, kann diese leicht auch direkt sicher gestellt werden.

[12]) Vgl. B. Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning, Matematisk Tidskrift B, 1929, Kopenhagen; auch H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta mathematica **66** (1935), S. 7.

Eingegangen 1. März 1936.