Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel.

Von *Lothar Heffter* in Freiburg i. B.

Aus der Gültigkeit des Cauchyschen Integral*satzes allein*, d. h. aus dem Verschwinden des Integrals $\int f(z)\,dz$ für jedes achsenparallele Rechteck R eines Gebietes G, dürfte sich noch nicht der analytische Charakter von $f(z)$ in G, d. h. die Entwickelbarkeit von $f(z)$ in der Umgebung jedes Punktes von G in eine Potenzreihe, herleiten lassen. Wohl aber ist das der Fall, wenn die Cauchysche Integral*formel* in G gilt. Die Frage ist also: Unter welchen weiteren Voraussetzungen über $f(z)$ kann man von dem Integral*satz* zu der Integral*formel* gelangen? Aus dem Satz von *Morera* [1]) folgt indirekt, daß dazu die *Stetigkeit* von $f(z)$ genügt. Der Beweis dieses Satzes greift bekanntlich auf die Funktion $F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ zurück und setzt voraus, daß der Cauchysche Integralsatz in seiner ältesten Form für eine stetige Funktion mit stetiger Ableitung bewiesen ist.

Bei einer so grundlegenden Frage scheint es mir aber von Bedeutung, daß man, auch *ohne* auf $F(z)$ zurückzugreifen und *ohne* den Cauchyschen Integralsatz auch nur in jener ältesten Form vorauszusetzen, dessen Beweis hier vielmehr nebenbei abfällt, direkt für die stetige Funktion $f(z)$ selbst, für die der Cauchysche Integral*satz* gilt, die Integral*formel* und daraus alles weitere gewinnen kann. Natürlich wird damit zugleich auch ein neuer Beweis für den Satz von *Morera* gegeben. Dies leistet der folgende Hauptsatz (bei dem die *Stetigkeit* von $f(z)$ auch durch viel knappere Voraussetzungen ersetzt werden könnte):

Hauptsatz. *Ist die in G eindeutig definierte und stetige Funktion $f(z)$ in G auch eindeutig integrierbar, d. h. ist für jedes achsenparallele, ganz zu G gehörige Rechteck R $\int_R f(z)\,dz = 0$, und ist $h(z)$ eine mit ihrer Ableitung $h'(z)$ in G stetige Funktion, so ist auch* $\int_R f(z)\,h(z)\,dz = 0$.

Man braucht dann nur $h(z)$ geeignet zu wählen und erst für den erforderlichen Grenzübergang (III) die Stetigkeit von $f(z)$ notwendig vorauszusetzen, um von dem Integralsatz für $f(z)\,h(z)$ zu der Integralformel für $f(z)$ zu kommen. Dabei wird mit ganz elementaren Mitteln gearbeitet, nämlich mit einfachen reellen Integralen von Funktionen einer reellen Variablen.

---

[1]) G. Morera, Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, Rend. R. Ist. Lomb. (2) **19** (1886), S. 304—307.

I. *Der Cauchysche Integralsatz.*

Sind $f(x, y)$, $g(x, y)$ zwei im Gebiet G eindeutige reelle Funktionen, f in bezug auf x bei jedem y, g in bezug auf y bei jedem x *integrabel* [2]), so ist der (reelle) Cauchysche Integralsatz

$$(1)\qquad \int_R [f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy] = 0\,,$$

wo $R \equiv [(a, \alpha)\ (b, \beta)]$ ein beliebiges, ganz zu G gehöriges achsenparalleles Rechteck ist, *gleichbedeutend* mit der für jedes solche Rechteck geltenden Gleichheit der Differenzenquotienten

$$(2)\qquad \frac{f_{ab}(x, \alpha) - f_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = \frac{g_{\alpha\beta}(a, y) - g_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b}\,,$$

wo z. B. $f_{ab}(x, \alpha)$ den Mittelwert von $f(x, \alpha)$ in (a, b) bedeutet, d. h.

$$(3)\qquad f_{ab}(x, \alpha) \equiv \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx\ ^{3})\,.$$

Gilt der Cauchysche Integralsatz bei jedem Rechteck R für die Funktion $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$, d. h. ist

$$(4)\qquad \int_R f(z)\, dz \equiv \int_R (udx - vdy) + i \int_R (vdx + udy) = 0\,,$$

so bedeutet das also nach (2), daß u und v in G in bezug auf jede der beiden Variabeln bei jedem Wert der andern integrabel sind und daß in jedem Rechteck R die beiden Differenzengleichungen gelten

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_{ab}(x, \alpha) - u_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = -\dfrac{v_{\alpha\beta}(a, y) - v_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b} \\[2ex] \dfrac{v_{ab}(x, \alpha) - v_{ab}(x, \beta)}{\alpha - \beta} = \dfrac{u_{\alpha\beta}(a, y) - u_{\alpha\beta}(b, y)}{a - b}\,. \end{cases}$$

II. *Beweis des Hauptsatzes.*

$f(z)$ sei in G stetig und erfülle in jedem Rechteck R die Gleichung (4) oder — was dasselbe ist — die Gleichungen (5). $h(z)$ und $h'(z)$ seien stetig, d. h. wenn $h(z) \equiv \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, die Funktionen φ, ψ, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 seien stetig und die Gleichungen

$$(6)\qquad \varphi_2 = -\psi_1\,, \qquad \varphi_1 = \psi_2$$

erfüllt. Dann ist die Behauptung des Hauptsatzes:

$$(7)\qquad \int_R f(z)\, h(z)\, dz \equiv \int_R [(u\varphi - v\psi)\, dx - (u\psi + v\varphi)\, dy] + i \int_R [(u\psi + v\varphi)\, dx + (u\varphi - v\psi)\, dy] = 0.$$

Um zu zeigen, daß das erste der Integrale rechts gleich 0 ist, teilen wir die Seiten (a, b) und (α, β) von R in n gleiche Teile durch die Teilpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ und zerlegen R durch Parallele zu den Achsen durch die Teilpunkte in n^2

---

[2]) Weniger kann man also von den Funktionen f und g nicht voraussetzen, wenn überhaupt von dem Integral (1) die Rede sein soll.

[3]) Auf diese triviale Form des Cauchyschen Integralsatzes, die uns hier vollkommen genügt, habe ich schon in meiner Arbeit: Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale, Gött. Nachr. 1902, S. 115—140, hier S. 131 aufmerksam gemacht. Immerhin zeigt (2) bereits den Ursprung der Bedingung $f_2 = g_1$.

kleinere Rechtecke $R_{\mu\nu} \equiv [(x_\mu y_\nu)(x_{\mu+1} y_{\nu+1})]$. Dann bilden wir nach der oft bewährten Methode [4]) die Doppelsumme

$$(8) \quad \sum_{\mu,\nu} S_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu,\nu} [u_{\mu,\mu+1}(x, y_\nu)\,\varphi(x_\mu, y_\nu) - u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi(x_\mu, y_{\nu+1})$$
$$- v_{\mu,\mu+1}(x, y_\nu)\,\psi(x_\mu, y_\nu) + v_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi(x_\mu, y_{\nu+1})]\,(x_{\mu+1} - x_\mu)$$
$$- \sum_{\mu,\nu} [- u_{\nu,\nu+1}(x_\mu, y)\,\psi(x_\mu, y_\nu) + u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\psi(x_{\mu+1}, y_\nu)$$
$$- v_{\nu,\nu+1}(x_\mu, y)\,\varphi(x_\mu, y_\nu) + v_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi(x_{\mu+1}, y_\nu)]\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Führt man in der ersten Teilsumme die Summation über $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ bei festem μ, in der zweiten die über dieselben Werte von μ bei festem ν aus, so heben sich alle über die inneren Strecken gebildeten Terme fort, und es folgt

$$(9) \quad \sum_{\mu,\nu} S_{\mu\nu} = \sum_{\mu} [u_{\mu,\mu+1}(x, \alpha)\,\varphi(x_\mu, \alpha) - u_{\mu,\mu+1}(x, \beta)\,\varphi(x_\mu, \beta)$$
$$- v_{\mu,\mu+1}(x, \alpha)\,\psi(x_\mu, \alpha) + v_{\mu,\mu+1}(x, \beta)\,\psi(x_\mu, \beta)]\,(x_{\mu+1} - x_\mu)$$
$$- \sum_{\nu} [- u_{\nu,\nu+1}(a, y)\,\psi(a, y_\nu) + u_{\nu,\nu+1}(b, y)\,\psi(b, y_\nu)$$
$$- v_{\nu,\nu+1}(a, y)\,\varphi(a, y_\nu) + v_{\nu,\nu+1}(b, y)\,\varphi(b, y_\nu)]\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Also ist

$$(10) \qquad \lim_{n \to \infty} \Sigma S_{\mu\nu} = \int_R [(u\varphi - v\psi)\,dx - (u\psi + v\varphi)\,dy]\,[5]).$$

Andererseits aber ist $\lim \Sigma S_{\mu\nu} = 0$. Denn setzt man in (8)

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi(x_\mu, y_{\nu+1}) = \varphi(x_\mu, y_\nu) + \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu})\,(y_{\nu+1} - y_\nu), & \text{wo } \eta_{\mu\nu} \text{ in } (y_\nu, y_{\nu+1}) \\ \psi(x_\mu, y_{\nu+1}) = \psi(x_\mu, y_\nu) + \psi_2(x_\mu, \eta'_{\mu\nu})\,(y_{\nu+1} - y_\nu), & \text{,, } \eta'_{\mu\nu} \text{ ,, } \quad \text{,,} \\ \varphi(x_{\mu+1}, y_\nu) = \varphi(x_\mu, y_\nu) + \varphi_1(\xi_{\mu\nu}, y_\nu)\,(x_{\mu+1} - x_\mu), & \text{,, } \xi_{\mu\nu} \text{ ,, } (x_\mu, x_{\mu+1}) \\ \psi(x_{\mu+1}, y_\nu) = \psi(x_\mu, y_\nu) + \psi_1(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu)\,(x_{\mu+1} - x_\mu), & \text{,, } \xi'_{\mu\nu} \text{ ,, } \quad \text{,,} \quad , \end{cases}$$

so heben sich unter Benutzung der Formeln (5) für das Rechteck $R_{\mu\nu}$ alle Glieder mit den Faktoren $\varphi(x_\mu, y_\nu)$ und $\psi(x_\mu, y_\nu)$ in $S_{\mu\nu}$ fort, und, wenn man nach (6) noch $\psi_1 = -\varphi_2$, $\psi_2 = \varphi_1$ setzt, so bleibt

$$(12) \quad S_{\mu\nu} = [- u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu}) + v_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\,\varphi_1(x_\mu, \eta'_{\mu\nu})$$
$$+ u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi_2(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu) - v_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y)\,\varphi_1(\xi_{\mu\nu}, y_\nu)]\,(x_{\mu+1} - x_\mu)\,(y_{\nu+1} - y_\nu).$$

Da u und φ_2, ebenso v und φ_1 in dem Rechteck R stetig, also gleichmäßig stetig sind und da alle in dem allgemeinen Summenglied (12) auftretenden Wertepaare von x, y demselben Teilrechteck $R_{\mu\nu}$ angehören, so ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, bei hinlänglich großem n

$$(13) \qquad \varphi_2(\xi'_{\mu\nu}, y_\nu) = \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu}) + \vartheta\varepsilon \qquad (-1 < \vartheta < 1)$$

---

[4]) Vgl. meine Arbeiten: Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale, Gött. Nachr. 1902, S. 136 f. — Über den Cauchyschen Integralsatz, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 476—480, und **34** (1931), S. 473—476. — Notwendige und hinreichende Bedingungen für den Cauchyschen Integralsatz ohne Benutzung von Differentialquotienten, Sitz.-Ber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss. 1932, 5. Abhdlg. In dieser letzten Arbeit kann übrigens auf die Stetigkeit vollkommen verzichtet werden, da ja auch bei einer nur integrablen Funktion die Mittelwerte oder beliebige Zwischenwerte zur Integralbildung benutzt werden können.

[5]) Denn sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei in (a, b) integrable und überdies beschränkte Funktionen, so ist leicht zu zeigen, daß auch $f(x)\,g(x)$ in (a, b) integrabel ist und bei der Bildung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu\, g_\mu (x_{\mu+1} - x_\mu)$$

für f_μ und g_μ je ein beliebiger Wert zwischen der unteren und der oberen Grenze der Werte von $f(x)$ und $g(x)$ in $(x_\mu, x_{\mu+1})$ genommen werden darf.

$$(14) \qquad u_{\nu,\nu+1}(x_{\mu+1}, y) = u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1}) + \vartheta' \varepsilon \text{ [6]} \qquad (-1 < \vartheta' < 1).$$

Das erste und das dritte Glied der [ ] in (12) liefern also zusammen

$$(15) \qquad u_{\mu,\mu+1}(x, y_{\nu+1})\vartheta\varepsilon + \varphi_2(x_\mu, \eta_{\mu\nu})\vartheta'\varepsilon + \vartheta\vartheta'\varepsilon^2.$$

Entsprechend wird das zweite und vierte Glied umgeformt. Bezeichnet man dann den Maximalwert von $|u|$, $|v|$, $|\varphi_1|$, $|\varphi_2|$ im Rechteck R mit M, so folgt

$$(16) \qquad |\Sigma S_{\mu\nu}| \leqq \frac{b-a}{n}\,\frac{\beta-\alpha}{n} \cdot 2\varepsilon(2M+\varepsilon)n^2 = 2\varepsilon(b-a)(\beta-\alpha)(2M+\varepsilon),$$

d. h.

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} \Sigma S_{\mu\nu} = 0.$$

Durch (10) und (17) ist gezeigt, daß das erste der Integrale in (7) rechts gleich 0 ist. Das zweite geht aber aus dem ersten hervor, wenn man φ durch ψ, ψ durch $-\varphi$ ersetzt, wobei das Formelpaar (6) ungeändert bleibt. Also gilt der Beweis auch für das zweite Integral in (7). — Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Wählt man speziell $f(z) = 1$, also $u = 1$, $v = 0$, wobei alle Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt sind, so liefert dieser die Gleichung

$$(18) \qquad \int_R h(z)\,dz = 0,$$

d. h. den Cauchyschen Integralsatz in seiner ältesten Form für eine Funktion $h(z)$ mit stetiger Ableitung $h'(z)$. Selbstverständlich reduziert sich dabei der vorstehende Beweis auf wenige Zeilen, wie ich ihn mit der Doppelsummenmethode schon 1902 geführt habe [7]).

III. *Die Cauchysche Integralformel für $f(z)$.*

Ist z irgendein Wert im Gebiet G, so ist

$$(19) \qquad h(t) \equiv \frac{1}{t-z}$$

eine Funktion von t, die in jedem Teilbereich von G, der z nicht enthält, die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt. Umgibt man also z als Mittelpunkt mit einem kleinen Quadrat Q von der Seitenlänge $2k$, und ist T eine einfache geschlossene Treppenlinie, die ganz im Gebiete G verläuft und einen Teil von G begrenzt, so folgt aus dem Hauptsatz

$$(20) \qquad \int_T \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \int_Q \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0,$$

wobei beide Integrationen in demselben Sinn, etwa dem positiven des Koordinatensystems, zu erstrecken sind. Das zweite Integral soll berechnet werden. Da es aber für jedes Rechteck, das z *nicht* enthält, gleich 0 ist, so kann Q, d. h. k, ohne Wertänderung des Integrals beliebig klein gewählt werden. Gerade für diesen Schluß war der Hauptsatz notwendig. Wenn also noch gezeigt wird, daß für $k \to 0$ das über Q erstreckte Integral sich einem bestimmten endlichen Grenzwert nähert, so ist dieser der gesuchte Integralwert. Hierfür erst dürfte die *Stetigkeit* von $f(z)$ unentbehrlich sein.

---

[6]) Von hier an muß der Beweis abgeändert werden, wenn statt der Stetigkeit von $f(z)$ anderes vorausgesetzt wird. Ist z. B. $\delta_{\mu\nu}$ die Maximalschwankung von $u(x, y_{\nu+1})$ in $(x_\mu, x_{\mu+1})$, $\delta'_{\mu\nu}$ die von $u(x_{\mu+1}, y)$ in $(y_\nu, y_{\nu+1})$, so genügen die Voraussetzungen

$$\sum_{\mu,\nu} \delta_{\mu\nu}(x_{\mu+1} - x_\mu) < n\varepsilon, \qquad \sum_{\mu,\nu} \delta'_{\mu\nu}(y_{\nu+1} - y_\nu) < n\varepsilon$$

nebst den entsprechenden für $v(x, y)$, um den Beweis zu führen. Diese Voraussetzungen enthalten *weniger* als die Stetigkeit und weniger als eine Eigenschaft, die man „gleichmäßige Integrabilität" von u und v in R in bezug auf jede der beiden Variabeln bei allen Werten der andern nennen könnte.

[7]) a. a. O. [3]), S. 136 f.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, es sei $z = 0$, was ja durch eine Koordinatenverschiebung erreicht werden kann. Dann ist zu untersuchen

$$(21)\quad \lim_{k\to 0}\int_Q \frac{f(t)\,dt}{t} \equiv \lim_{k\to 0}\int_Q \frac{(ux+vy)\,dx + (uy-vx)dy}{x^2+y^2} + i\lim_{k\to 0}\int_Q \frac{(vx-uy)\,dx+(ux+vy)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Das erste Integral rechts ist

$$(22)\quad \int_{-k}^{+k}[u(x,-k)-u(x,k)]\frac{xdx}{x^2+k^2} - \int_{-k}^{+k}[v(x,-k)+v(x,k)]\frac{kdx}{x^2+k^2}$$

$$+\int_{-k}^{+k}[u(k,y)-u(-k,y)]\frac{ydy}{y^2+k^2} - \int_{-k}^{+k}[v(k,y)+v(-k,y)]\frac{kdy}{y^2+k^2} \equiv J_1 - J_2 + J_3 - J_4.$$

Da bei J_2 der zweite Faktor in $(-k, k)$ stets positiv ist, so ist nach dem Mittelwertsatz

$$(23)\quad J_2 = [v(\vartheta k, -k) + v(\vartheta k, k)]\int_{-k}^{+k}\frac{kdx}{x^2+k^2} = [v(\vartheta k,-k)+v(\vartheta k,k)]\frac{\pi}{2}$$

$$(-1 < \vartheta < 1),$$

also wegen der Stetigkeit von v

$$(24)\quad \lim_{k\to 0} J_2 = v(0,0)\,\pi.$$

Ebenso ergibt sich $\lim J_4 = v(0,0)\,\pi$, also

$$(25)\quad \lim_{k\to 0}(-J_2 - J_4) = -2\pi v(0,0).$$

Bezeichnet man in J_1 den Maximalwert von $|u(x,-k)-u(x,k)|$ in $(-k,k)$ mit M_k, so daß $\lim\limits_{k\to 0} M_k = 0$, so ist

$$(26)\quad |J_1| \leqq \int_{-k}^{+k} M_k \frac{k}{k^2}\,dx = 2M_k.$$

Also ist $\lim J_1 = 0$, und ebenso folgt $\lim J_3 = 0$.

Somit hat man

$$(27)\quad v(0,0) = -\frac{1}{2\pi}\int_Q \frac{(ux+vy)\,dx+(uy-vx)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Da das zweite Integral in (21) aus dem ersten entsteht, wenn man u durch v, v durch $-u$ ersetzt, so ist

$$(28)\quad u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_Q \frac{(vx-uy)\,dx+(ux+vy)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Aus den letzten beiden Formeln und (21) ergibt sich also

$$(29)\quad f(0) \equiv u(0,0) + iv(0,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_Q \frac{f(t)\,dt}{t},$$

und wenn man wieder an Stelle von 0 den beliebigen Wert z setzt, so erhält man nach (20) und (29) in

$$(30)\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

die Cauchysche Integralformel in der üblichen Gestalt. Schließlich kann man darin, obwohl es nicht nötig ist, die Treppenlinie T auch durch eine beliebige Kurve C, die z umschließt, ersetzen, weil ja C durch eine Treppenlinie beliebig approximiert werden kann.

Von hier aus verläuft die Entwicklung des Integrals (30) in eine Potenzreihe in der altbekannten Weise.

IV. *Schlußfolgerung.*

Es hat sich ergeben: Wenn die in einem Gebiet G in bezug auf x bei jedem y, in bezug auf y bei jedem x integrable Funktion $f(z)$ für jedes achsenparallele, ganz zu G gehörige Rechteck R die Differenzengleichungen (5) erfüllt, so gilt für jede geschlossene Treppenlinie, die ganz zu G gehört und einen Teil von G begrenzt, der Cauchysche Integralsatz. Ist $f(z)$ überdies stetig, so gilt für sie auch die Cauchysche Integralformel und $f(z)$ ist eine analytische Funktion in G.

Hiernach ist der Versuch, den Cauchyschen Integral*satz* für $f(z)$ mit noch einfacheren Voraussetzungen über $f(z)$ zu beweisen, *völlig zwecklos.* Denn die Voraussetzungen (5) decken sich ja mit ihm. Denkbar wäre höchstens die Möglichkeit, daß beim Übergang zu der Cauchyschen Integral*formel*, also beim Beweis des Hauptsatzes oder bei dem Grenzübergang in III die Voraussetzungen über $f(z)$ noch weiter verringert werden könnten. Daß beim Beweis des Hauptsatzes die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(z)$ in der Tat durch eine viel weniger enthaltende ersetzt werden kann, wurde schon in der Einleitung erwähnt und in Anmerkung 6 genauer angedeutet. Der Grenzübergang in III dürfte freilich wohl unvermeidbar und für ihn die Stetigkeit von $f(z)$ unentbehrlich sein.

Freiburg i. B., Februar 1936.

Eingegangen 13. März 1936.