Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen.

Von *Otto F. G. Schilling*, z. Zt. in Princeton.

Über die Theorie der Einheitengruppen in Maximalordnungen einfacher rationaler Algebren ist nicht sehr viel bekannt. In der Theorie der automorphen Funktionen wurden einige spezielle Einheitengruppen und ihre Kongruenzuntergruppen untersucht. Bekanntlich kann die unimodulare ganzzahlige Gruppe der Matrizen vom Grade zwei durch zwei Erzeugende $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erschöpft werden. Zusammen mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erhält man so die volle Einheitengruppe einer speziellen Maximalordnung in der vollständigen Matrixalgebra vom Grade zwei über dem rationalen Zahlkörper. Weiter wurden noch die Picardsche Gruppe und einige eng damit verwandte Gruppen untersucht. In allen diesen Fällen konnte die Existenz einer *endlichen* Basis festgestellt werden. So liegt die Frage nahe, ob die *Einheitengruppen von Maximalordnungen aus beliebigen endlichen einfachen rationalen Algebren eine endliche Basis besitzen*, d. h. ob endlich viele zur betrachteten Maximalordnung gehörige Einheiten so existieren, daß jede Einheit der Maximalordnung als endliches Wort in jenen endlich vielen Einheiten geschrieben werden kann.

In dieser Note soll eine vollständige Lösung des Problems im Falle der vollständigen Matrixalgebren über Zahlkörpern gegeben werden. Mit den hier angewandten Methoden ist es im allgemeinen Falle nur möglich, die Einheitengruppen als Untergruppen von Gruppen mit endlicher Basis nachzuweisen. Hieraus kann bekanntlich im allgemeinen nichts über die feinere Struktur der betreffenden Gruppen geschlossen werden.

Zum Schluß werden die maximalen abelschen Untergruppen von Divisionsalgebren beschrieben.

§ 1.

Es mögen im folgenden durchweg bezeichnen

$\mathsf{P}^{(0)}$ den Körper aller rationalen Zahlen,

$\mathfrak{R}$ den Körper aller reellen Zahlen oder einen dazu isomorphen Körper,

A eine einfache normale Algebra vom Grade n über einem endlichen algebraischen Zahlkörper k vom Grade n_0 (also ist A vom Rang $n^2 n_0 = n^*$ über $\mathsf{P}^{(0)}$),

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, ... Maximalordnungen von A,

$\mathfrak{O}$, ... Ordnungen vom Höchstrang n^* aus A,

$\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$, $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}^*}$, $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$, ... die Einheitengruppen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{O}$, ...

Wenn $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ eine beliebige (später eine passend gewählte) $\mathsf{P}^{(0)}$-Basis von A bezeichnen, so wird in geläufiger Weise das direkte Produkt

$$A \times \mathfrak{R} = A_{\mathfrak{R}}$$

als die Gesamtheit aller formalen Summen $\sum_{i=1}^{n^*} x_i \omega_i$ mit Koeffizienten x_i aus dem Körper $\mathfrak{R}$ definiert. Das System $A \times \mathfrak{R}$ ist ein halbeinfacher Ring, wenn wir das Verknüpfungsgesetz $\omega_i \omega_j = \sum_{k=1}^{n^*} c_{ij}^k \omega_k$ zwischen den Basisgrößen beim Übergang von A zur Erweiterung $A \times \mathfrak{R}$ beibehalten (c_{ij}^k in $\mathsf{P}^{(0)}$; $i, j = 1, \ldots, n^*$).

Jedem Element $x = \sum_i x_i \omega_i$ ordnen wir einen Punkt

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n^*})$$

im n^*-dimensionalen reellen Raume R_{n^*} eineindeutig zu. Dann bestimmt die rechts- (bzw. links-) seitige Multiplikation der Elemente x mit Einheiten ε aus einer Ordnung der Algebra A eine diskrete Transformationsgruppe

$$(\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\varepsilon)$$

im Raume R_{n^*}.

Nehmen wir speziell für die Basis $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Elemente einer Normalbasis — d. h. eine Basis bezüglich des Ringes $\Gamma^{(0)}$ aller ganzen Zahlen — einer Ordnung $\mathfrak{O}$, so bilden die den Elementen der Ordnung zugeordneten Punkte ein Gitter mit der Seitenlänge eins. Einer echten Unterordnung entspricht dann ein Teilgitter mit größerer Fundamentalmasche.

Dem Wechsel einer Basis entspricht eine affine Transformation des Raumes R_{n^*}.

Die Norm des allgemeinen Elementes $x = \sum_i x_i \omega_i$ ist eine homogene Funktion $N(\mathfrak{x})$ auf dem Raume R_{n^*}.

Dann liegen alle Punkte $\mathfrak{x}$ aus R_{n^*}, die der Gleichung

$$|N(\mathfrak{x})| = 1$$

genügen, auf einer Hyperfläche H des Raumes R_{n^*}.

Die Einheitengruppen beliebiger Ordnungen erzeugen Operatorgruppen auf der Hyperfläche H, denn

$$|N(\mathfrak{x})| = 1 \to |N(\mathfrak{x}\varepsilon)| = |N(x\varepsilon)| = |Nx\,N\varepsilon| = |Nx|\,|N\varepsilon| = 1.$$

Wenn wir für $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Minimalbasis einer festen Ordnung $\mathfrak{O}$ vom Höchstrang nehmen, so gilt der folgende [1])

Satz 1. $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *ist eigentlich diskontinuierlich auf* H.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, daß zu jeder beschränkten Punktmenge V auf H eine endliche Anzahl von Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\lambda$ aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ existiert derart, daß jede Äquivalenz bezüglich $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ zweier beliebiger Punkte von V durch jene ε_i erhalten werden kann.

Es mögen also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}\varepsilon$ zwei äquivalente Punkte von V sein. Wegen der Homogenität der Funktion $N(\mathfrak{x})$ und wegen $|N(\mathfrak{x})| = 1$ auf der Hyperfläche H sind die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}^{-1} = x^{-1}$ beschränkt, wenn die Koeffizienten von x beschränkt sind.

Dann sind aber auch die Koeffizienten von $\varepsilon = x^{-1} \cdot x\varepsilon$ beschränkt, und zwar durch eine Schranke, die allein von der Menge V abhängt. Das ist aber gleichbedeutend mit der Endlichkeit der Anzahl λ.

Dann existiert zu jedem Punkt von V eine endliche Anzahl bezüglich $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ äquivalenter Punkte in V. Das heißt aber, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ eigentlich diskontinuierlich ist.

Folgerung. Zu $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *existiert ein Fundamentalbereich* $F_{\mathfrak{O}}$ *auf* H.

Das folgt sofort aus der Endlichkeit von λ nach einem Satze von Poincaré [2]).

---

[1]) Wir geben hier der Vollständigkeit halber die von Käte Hey gegebenen Beweise der Sätze 1 und 2 wieder. Vgl. K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Dissertation Hamburg 1929.

[2]) G. Fubini, Introduzione alla teoria dei gruppi discontinni e delle funzioni automorfe, Pisa 1908, Kap. 6.

Sei wieder $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt von H, dann bilden alle Punkte der Form $\mathfrak{x}\,\xi$ mit ξ aus $\mathfrak{O}$ einen Modul $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$, der die Ordnung $\mathfrak{O}$ als rechtsseitigen Operatorenring besitzt. Dem Modul $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ entspricht im Raume R_{n^*} ein Gitter, welches Teilgitter des ganzzahligen Gitters (auf $\mathfrak{O}$ bezogen) ist. Das Volumen einer Fundamentalmasche ist gleich $|N(\mathfrak{x})| = 1$ Dann gilt der folgende Hilfssatz, den man nach dem Vorbild des Endlichkeitsnachweises der Klassenzahlen in Zahlkörpern oder Divisionsalgebren beweist.

Hilfssatz. 1. Zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ von H existiert ein Element ξ von $\mathfrak{O}$ derart, daß die Koordinaten $x_i(\mathfrak{x}\,\xi)$ von $\mathfrak{x}\,\xi$ beschränkt sind:

$$|x_i(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq \sqrt[n]{|N(\mathfrak{x})|} = 1.$$

2. Wenn

$$C = \underset{\substack{\mathfrak{y}=\Sigma y_i\,\omega_i \\ |y_i|\leqq 1}}{\operatorname{Max}} N(\mathfrak{y})$$

gesetzt wird, so gilt für alle gemäß 1. bestimmten Elemente ξ die Ungleichung

$$|N(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq C \quad \text{oder} \quad |N(\xi)| \leqq C.$$

Hieraus folgt

Satz 2. *Die Fundamentalbereiche $F_{\mathfrak{O}}$ sind stets endlich.*

Beweis. Es existiert nur eine endliche Zahl von Linksidealen $\mathfrak{O}\xi_1, \ldots, \mathfrak{O}\xi_r$ derart, daß $|x_i(\mathfrak{x}\,\xi)| \leqq 1$ ist. Jedes Element ξ, das diese Bedingungen erfüllt, ist einem der Elemente ξ_k assoziiert:

$$\xi = \varepsilon_{\mathfrak{x}}\,\xi_k,$$

wo die Einheit $\varepsilon_{\mathfrak{x}}$ von ξ, also allein von $\mathfrak{x}$ abhängt.

Aus

$$|x_i(\mathfrak{x}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{x}}\,\xi_k)| \leqq 1$$

folgt

$$|x_i(\mathfrak{x}\,\varepsilon_{\mathfrak{x}})| \leqq B.$$

Die positive reelle Zahl B hängt nur von den endlich vielen ξ_k ab, also nur von der Zahl C, die eine Invariante der Ordnung $\mathfrak{O}$ ist.

Aus diesen Gründen liegt in dem Würfel

$$|x_i| \leqq B$$

zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ von H höchstens ein äquivalenter Punkt $\mathfrak{x}\,\varepsilon_{\mathfrak{x}}$. Deshalb ist $F_{\mathfrak{O}}$ endlich.

Wenn wir nun speziell für die $\omega_1, \ldots, \omega_{n^*}$ die Normalbasis einer Maximalordnung $\mathfrak{M}$ von A wählen, so liegen die einer echten Unterordnung $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{M}$ entsprechenden Gitterpunkte in einem Teilgitter des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gitters. Da $\mathfrak{O}$ vom Höchstrang sein sollte, sind die Maschen von $\mathfrak{O}$ aus endlich vielen von $\mathfrak{M}$ zusammengesetzt. (Das explizite Maß für die „Vergrößerung" wird durch den absoluten Betrag der Determinante einer Überführungstransformation von einer Basis von $\mathfrak{M}$ zu einer Basis von $\mathfrak{O}$ bestimmt.) Da die Einheitengruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ in der Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ enthalten ist, so folgt unmittelbar

$$F_{\mathfrak{M}} \leqq F_{\mathfrak{O}}.$$

Satz 3. $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *ist Untergruppe von endlichem Index $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ in* $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Da die Fundamentalbereiche $F_{\mathfrak{O}}$ und $F_{\mathfrak{M}}$ endlich sind, können nur endlich viele Nebenklassen auftreten.

Wenn wir Integrale in R_{n^*} einführen, so sind die Volumina

$$\int\limits_{F_{\mathfrak{M}}} d\mathfrak{x} = (F_{\mathfrak{M}}) \quad \text{und} \quad \int\limits_{F_{\mathfrak{O}}} d\mathfrak{x} = (F_{\mathfrak{O}})$$

endlich.

Satz 4. *Der Index* $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ *ist gleich* $\dfrac{\int\limits_{F_{\mathfrak{O}}} d\mathfrak{x}}{\int\limits_{F_{\mathfrak{M}}} d\mathfrak{x}}$.

Beweis. Es ist $\sum\limits_{i=1}^{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}} \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} \cdot T_i = \mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$. Da transformierte Fundamentalbereiche hier gleiche Volumina haben, so wird

$$(F_{\mathfrak{M}}) \cdot j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}} = (F_{\mathfrak{O}}).$$

§ 2.

In diesem Paragraphen bezeichne A die vollständige Algebra der Matrizen vom Grade n mit Elementen aus dem endlichen Zahlkörper k.

Wenn $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung des Körpers k bezeichnet, so ist der Ring $\mathfrak{o}_n = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \mathfrak{o}\, c_{ik}$ aller ganzen Matrizen eine spezielle Maximalordnung.

Dann gilt der folgende [3]) wichtige

Satz 5. $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} = \mathsf{E}_{\mathfrak{o}_n}$ *hat eine endliche Anzahl von Erzeugenden.*

Beweis. Der von Hurwitz [3]) für $n = 2$ und 3 gegebene Beweis kann sofort auf beliebigen Matrizengrad n übertragen werden.

Für die folgenden Feststellungen benötigen wir einige einfache Tatsachen über freie Gruppen $\mathfrak{G}$ mit einer endlichen Anzahl $\tau_{\mathfrak{G}}$ von Erzeugenden.

O. Schreier hat bewiesen [4]), daß eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von endlichem Index $j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{G}$ stets eine endliche Anzahl $\tau_{\mathfrak{S}}$ von Erzeugenden hat. Zwischen den Zahlen $\tau_{\mathfrak{G}}$, $\tau_{\mathfrak{S}}$ und $j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}$ besteht die Beziehung

$$\tau_{\mathfrak{S}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{G}} - 1)\, j_{\mathfrak{S}:\mathfrak{G}}.$$

Weiterhin ist jede Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\tau_{\mathfrak{G}}$ Erzeugenden isomorph zu der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{f}$ der abstrakten freien Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\tau_{\mathfrak{G}}$ Erzeugenden. Der Normalteiler $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{G}$ ist durch das Relationensystem von $\overline{\mathfrak{G}}$ bestimmt.

Wenn wir diese Tatsachen auf Einheitengruppen von Ordnungen der Matrixalgebra A anwenden, so ergeben sich explizite Bestimmungen für Basislängen und Indizes.

Durch ein τ mit einem entsprechenden großen deutschen Buchstaben als Index bezeichnen wir immer die Anzahl von Erzeugenden in der *zugeordneten freien* Gruppe der τ erzeugenden Elemente. Es ist klar, daß die Indizes j zwischen Gruppen ungeändert bleiben, wenn wir zu den Urbildern in der abstrakten freien Gruppe zurückgehen.

Satz 6. *Wenn die Ordnung* $\mathfrak{O}$ *in* $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}_n$ *enthalten ist, so hat* $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *eine endliche Basis.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 3 und den eben erwähnten Tatsachen. Wir erhalten überdies

$$\tau_{\mathfrak{O}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}.$$

Satz 7. *Jede Maximalordnung* $\mathfrak{M}^*$ *von* A *hat eine Einheitengruppe* $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}^*}$ *mit endlicher Basis.*

Die Elemente des Durchschnitts $\mathfrak{M} \frown \mathfrak{M}^* = \mathfrak{O}$ bilden eine Ordnung vom Höchstrang. Wegen Satz 3 sind die Indizes $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}$ und $j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*}$ endlich. Anwendung der Schreier-

---

[3]) A. Hurwitz, Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlkörper, Göttinger Nachrichten 1895.

[4]) O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. d. Math. Sem. Hamburg 5 (1926).

schen Theorie ergibt die Gleichungen

$$\tau_{\mathfrak{O}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}^*} - 1)\, j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*},$$

also

$$\tau_{\mathfrak{M}^*} = 1 + (\tau_{\mathfrak{M}} - 1)\frac{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}}}{j_{\mathfrak{O}:\mathfrak{M}^*}}$$

als Erzeugendenzahl von $\mathfrak{M}^*$.

§ 3.

Jetzt sei wieder A eine beliebige endliche über k normale einfache Algebra.

Unter K sei ein beliebiger maximal kommutativer Teilkörper von A verstanden, Ω sei seine Hauptordnung.

Dann gilt der

Satz 8. *Das direkte Produkt $\mathfrak{M} \times \Omega$ ist eine Ordnung vom Höchstrang in* $A_{\mathsf{K}} \cong \mathsf{K}_n = \sum_{i,k=1}^{n} \mathsf{K} c_{ik}$.

Beweis. $\mathfrak{M} \times \Omega$ ist ein Ring, der einen zum Ring aller ganzen Zahlen $\Gamma^{(0)}$ isomorphen Teilring enthält. Der Rang von $\mathfrak{M} \times \Omega$ bezüglich $\mathsf{K} \frown (\mathfrak{M} \times \Omega) = \Omega$ ist offenbar gleich n^2.

Die Vereinigungsgruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} \cdot \mathsf{E}_{\Omega}$ der Einheitengruppen von $\mathfrak{M}$ und Ω ist eine Gruppe von Elementen aus A_{K} und als solche in der Einheitengruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$ enthalten.

Satz 9. $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ *ist in einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden enthalten.*

Beweis. Es ist $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}} \leqq \mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$. Wegen der Isomorphie $A_{\mathsf{K}} \cong \mathsf{K}_n$ und Satz 6 hat die Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}\times\Omega}$ eine endliche Basis. Wir bemerken, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ in unendlich vielen (sogar nicht isomorphen) Gruppen mit endlicher Basis enthalten ist. Das folgt aus der Vieldeutigkeit aller möglichen maximal kommutativen Teilkörper K von A.

Aus Satz 9 folgt nicht notwendig, daß $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ eine unendliche Anzahl von Erzeugenden hat. Es ist bekannt, daß in einer *beliebigen* unendlichen Gruppe sogar eine *invariante* Untergruppe mit unendlichem Index eine endliche Basis haben kann. Nur bei den freien Gruppen und einigen nahe verwandten ist bisher bewiesen, daß eine invariante Untergruppe von unendlichem Index notwendig eine unendliche Basis besitzt [5]).

Wir führen noch das folgende arithmetische Beispiel an: Sei Q der rationale Quaternionenkörper

$$(j, k)_{\mathsf{P}^{(0)}} \quad \text{mit} \quad j^2 = k^2 = -1, \quad k^{-1} jk = -j.$$

Die Einheitengruppe der Maximalordnung

$$\mathfrak{M} = \left[1, j, k, \frac{1+j+k+l}{2}\right]_{\Gamma^{(0)}}, \quad l = jk,$$

ist die Quaternionengruppe $\tilde{\mathsf{E}}$ mit den Elementen

$$1, j, -1, -j, k, l, -k, -l.$$

Diese endliche Gruppe kann in $Q \times \mathsf{P}^{(0)}(i) \cong \mathsf{P}^{(0)}(i)_2$ mit $i = \sqrt{-1}$ durch Produkte der Matrizen $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden. Letztere sind ihrerseits in der Einheitengruppe $\tilde{\tilde{\mathsf{E}}}$ der Maximalordnung $\Gamma^{(0)}[i]_2$ mit den Basiselementen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ enthalten. Die Gruppe $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ ist nicht invariant in $\tilde{\tilde{\mathsf{E}}}$ und hat unendlichen Index. Aber $\tilde{\mathsf{E}} = \mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ ist endlich.

---

5) Ich habe Herrn Dr. W. Magnus für diese Bemerkung zur Theorie der allgemeinen unendlichen Gruppen zu danken.

§ 4.

Die Algebra A sei in diesem Paragraphen eine Divisionsalgebra. Es soll die Struktur der maximal abelschen Untergruppen bestimmt werden.

Satz 10. *Maximal abelsche Untergruppen* $\mathfrak{S}$ *von Einheitengruppen* $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ *sind Einheitengruppen kommutativer Teilkörper* L *von* A.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\overline{\mathfrak{S}}$ von Elementen, die aus allen endlichen Summen von Elementen aus $\mathfrak{S}$ erzeugt wird. Das System $\overline{\mathfrak{S}}$ ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring, der die Eins erhält. Sei $Q(\overline{\mathfrak{S}}) = L$ der zugehörige Quotientenkörper. Dann ist $L \frown \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} = \mathfrak{S}$. Wäre nämlich $L \frown \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} > \mathfrak{S}$, so gäbe es eine zu L gehörende in $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$ liegende Einheit ε, die nicht zu $\mathfrak{S}$ gehört. Die Vereinigungsgruppe $\{\varepsilon, \mathfrak{S}\}$ wäre eine abelsche Gruppe aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{O}}$, die $\mathfrak{S}$ echt enthielte. Das steht aber im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{S}$.

Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist also Einheitengruppe einer Ordnung des Teilkörpers L von A. Hiermit ist der Typus eindeutig festgelegt: $\mathfrak{S}$ ist das direkte Produkt einer endlichen Gruppe von Einheitswurzeln mit einer endlichen Anzahl von unendlichen Zyklen. Im allgemeinen ist der Körper L sogar maximal kommutativer Teilkörper K von A. Es gilt nämlich der

Satz 10'. *L ist höchstens dann und nur dann nicht maximal, wenn* $(\mathsf{K} : L) = 2$ *ist und L total reell und* K *total imaginär.*

Beweis. Zu einem nicht maximalen Teilkörper L existiert mindestens eine Erweiterung K vom Relativgrade m, die maximal ist. Sei r_1 die Anzahl der reellen unendlichen Primstellen von L und r_2 die Anzahl der komplexen unendlichen Primstellen von L. Wenn ϱ_1 die Anzahl der in K reell bleibenden Stellen von L und $r_1 - \varrho_1 = \varrho_2$ die Anzahl der in K komplex werdenden reellen Stellen von L bezeichnen, so hat K genau $R = (\varrho_1 + r_2)\, m + \varrho_2 \frac{m}{2} - 1$ unabhängige Einheiten unendlicher Ordnung, während der Körper L genau $r = r_1 + r_2 - 1$ besitzt. Es wird dann und nur dann $R = r$, wenn

$$m = 2 \quad \text{und} \quad \varrho_1 = r_2 = 0.$$

Nur in diesem Falle kann $\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} = \mathfrak{S}$ eintreten. In allen anderen Fällen ist $R > r$ oder

$$\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} > \mathfrak{S}.$$

Dann ist aber $L = \mathsf{K}$ ein maximal kommutativer Teilkörper der Divisionsalgebra A. Denn aus $L < \mathsf{K}$ würde $\mathsf{K} \frown \mathsf{E}_{\mathfrak{O}} > \mathfrak{S}$ folgen, im Widerspruch zur Maximalität der Gruppe $\mathfrak{S}$.

Institute for Advanced Study
Princeton N.J., USA.
4. XI. 1935.

Eingegangen 10. Dezember 1935.