Su due sistemi associati di infinite equazioni lineari.

Di *Ugo Broggi* a Milano.

Il problema della determinazione dei coefficienti γ_{rs} $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ del polinomio

$$(z+1)(z+2)\cdots(z+r-1) = z^{r-1} + \gamma_{r1} z^{r-2} + \cdots + \gamma_{r,r-1}$$

$\Big($le somme degli $\binom{r-1}{s}$ possibili prodotti di s fattori diversi scelti fra i numeri $1, 2, \ldots, r-1\Big)$, che prima di lui aveva occupato la Schläfli il Cayley il v. Zeipel lo Schlömilch, veniva ricondotto dal Nielsen a quello della formazione del polinomio $\psi_h(z)$, coefficiente della potenza $h+1$ di t nello sviluppo di

$$\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^{-z-1} = 1 + (1+z)\sum_{h=0}^{\infty} \psi_h(z)\, t^{h+1} \qquad (|t| < 2\pi).$$

É

$$\gamma_{rs} = \psi_{s-1}(r-1) \text{ [1]}.$$

Ad una soluzione analoga perviene il Nörlund che sostituisce i polinomi di Nielsen con altri, che egli chiama polinomi di Bernoulli di ordine superiore, coi quali opera utilmente in altre ricerche. Ove si ponga col Nörlund

$$e^{zt}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(z) \qquad (|t| < 2\pi)$$

e

$$B_\nu^{(n)}(0) = B_\nu^{(n)},$$

s'ottiene

$$\gamma_{rs} = (-1)^s \binom{r}{s} B_{r-s}^{(r+1)} \text{ [2]}.$$

Il Nielsen determina i polinomi $\psi_h(z)$ il Nörlund i polinomi $B_\nu^{(n)}(z)$ per ricorrenza. Alla determinazione esplicita di γ_{rs} in funzione di r e di s si perviene invece, e direttamente, osservando che

$$\gamma_{r,r-1} z^{r-1} + \gamma_{r,r-2} z^{r-2} + \cdots + 1 = (r-1)!\left(\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s z^s \Delta^{r-1} O^{r+s-1}\right)^{-1} \text{ [3]}.$$

---

[1]) Cfr. N. Nielsen, Recherches sur les polynômes et les nombres de Stirling, Annali di Matematica (3) **10** (1904), pp. 287—318.

[2]) Cfr. N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Kap. 6, § 5.

[3]) Cfr. U. Broggi, Sull' iterazione dell' operazione $x\frac{d}{dx}$, Rend. Lincei (6) **17** (1933), pp. 696—700.

Mi propongo di dimostrare qui che i numeri γ_{rs} $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ sono le $r-1$ incognite del sistema di $r-1$ equazioni lineari

$$h^{r-1} = \gamma_{r1} h^{r-2} - \gamma_{r2} h^{r-3} + \cdots + (-1)^{r-1} \gamma_{r,r-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r-1)$$

che può assai agevolmente venire trasformato e risolto.

Si perviene al risultato ricordando che, come giá notava lo Stirling, se

$$\frac{A_0}{z} - \frac{A_1}{z^2} + \cdots \sim \frac{B_0}{z} - \frac{B_1}{z(z+1)} + \frac{B_2}{z(z+1)(z+2)} - \cdots$$

é anche

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1,$$

$$(1) \qquad B_r = A_r - \gamma_{r1} A_{r-1} + \gamma_{r2} A_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1} \gamma_{r,r-1} A_1 \text{ [4]}$$

e attraverso la considerazione dei due sistemi di infinite equazioni lineari con infinite incognite

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' + \cdots\cdots\cdots\cdots = A_0 \\ & 1^r \alpha_1' + 2^r \alpha_2' + \cdots\cdots\cdots\cdots = A_r \\ \mathrm{II} & \alpha_0'' + \alpha_1'' + \alpha_2'' + \cdots\cdots\cdots\cdots = B_0 \\ & r!\, \alpha_r'' + \frac{(r+1)!}{1!} \alpha_{r+1}'' + \frac{(r+2)!}{2!} \alpha_{r+2}''' + \cdots = B_r \\ & (r = 1, 2, \ldots) \end{array}$$

il primo dei quali é caso particolare dell'altro

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k^h x_h = A_k \qquad (h = 0, 1, \ldots),$$

dove q_k cresce indefinitamente con k, che E. Borel [5]) trattava nella sua tesi, mentre il secondo, ove l'integrale converga in corrispondenza di $r = 0, 1, \ldots$, ha la soluzione

$$\alpha_r = r! \int_0^{\infty} e^{-t} L_r(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{t^n}{n!} \right) dt$$

dove

$$L_r(t) = \frac{e^t}{r!} \frac{d^r}{dt^r} (t^r e^{-t})$$

é il polinomio de Laguerre d'indice r [6]).

Mi propongo di dedurre della soluzione del secondo sistema una soluzione del primo, e d'indicare i limiti della validitá di questa.

I.

Ove l'ascissa di convergenza dell'integrale di Laplace

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt$$

sia minore di $+\infty$ e sia legitima l'integrazione indefinita per parti, si ottiene se $Rz > 0$ e $\varphi(t)$ é limitata nell'intervallo chiuso $(0, 1)$

---

[4]) Cfr. ad es. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, §§ 26, 27, 109.

[5]) E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Annales de l'École Normale Sup. (3) **12** (1895), pp. 9—55, spec. pp. 38—44.

[6]) Cfr. U. Broggi, Su di un sistema di infinite equazioni lineari, Rend. Lincei (6) **22** (1935), pp. 120—124.

$$\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt = \left(\frac{1}{z}t^z\varphi(t)\right)_0^1 - \frac{1}{z}\int_0^1 t^z\varphi'(t)\,dt = \cdots$$
$$\sim \frac{\varphi(1)}{z} - \frac{\varphi'(1)}{z(z+1)} + \frac{\varphi''(1)}{z(z+1)(z+2)} - \cdots;$$
$$\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt = \left(\frac{1}{z}t^z\varphi(t)\right)_0^1 - \frac{1}{z}\int_0^1 t^{z-1}(t\varphi'(t))\,dt$$
$$= \frac{\varphi(1)}{z} - \frac{\varphi_1(1)}{z^2} + \frac{1}{z^2}\int_0^1 t^{z-1}(t\varphi_1'(t))\,dt$$
$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sim \frac{\varphi(1)}{z} - \frac{\varphi_1(1)}{z^2} + \frac{\varphi_2(1)}{z^3} - \cdots,$$

dove

$$\varphi_0(t) = \varphi(t), \quad \varphi_n(t) = t\varphi'_{n-1}(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Se in particolare lo sviluppo

$$\varphi(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots$$

ha un raggio di convergenza maggiore di 1, ed é

$$\varphi^{(n)}(1) = B_n$$

si ha evidentemente

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots = B_0$$
$$r!\,\alpha_r + \frac{(r+1)!}{1!}\alpha_{r+1} + \frac{(r+2)!}{2!}\alpha_{r+2} + \cdots = B_r$$

cosí come si ha

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = A_0$$
$$1^r\alpha_1 + 2^r\alpha_2 + \cdots = A_r$$
$$(r = 1, 2, \ldots)$$

se

$$A_r = \varphi_r(1).$$

E poiché é anche

$$B_r = \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)\,\alpha_n$$
$$= \sum_{n=r}^{\infty} n^r\alpha_n - \left(\sum_{n=r}^{\infty} n^{r-1}\alpha_n\right)\gamma_{r1} + \cdots + (-1)^{r-1}\gamma_{r,r-1}\left(\sum_{n=r}^{\infty} n\alpha_n\right)$$
$$= \left[A_r - \sum_{s=1}^{r-1} s^r\alpha_s\right] - \gamma_{r1}\left[A_{r-1} - \sum_{s=1}^{r-1} s^{r-1}\alpha_s\right] + \cdots + (-1)^{r-1}\gamma_{r,r-1}\left[A_1 - \sum_{s=1}^{r-1} s\alpha_s\right],$$

se ne deduce, per la (1)

$$(1) \qquad B_r = A_r - \gamma_{r1}A_{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}A_1$$

che

$$h^{r-1} = \gamma_{r1}h^{r-2} - \gamma_{r2}h^{r-3} + \cdots + (-1)^r\gamma_{r,r-1}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Il sistema di $r-1$ equazioni lineari con $r-1$ incognite $\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \ldots, \gamma_{r,r-1}$ cosí ottenuto

$$\begin{aligned}
1^{r-1} &= \gamma_{r1} - \gamma_{r2} + \gamma_{r3} - \cdots + (-1)^{r-2}\gamma_{r,r-1} \\
2^{r-1} &= 2^{r-2}\gamma_{r1} - 2^{r-3}\gamma_{r2} + \cdots + (-1)^{r-2}\gamma_{r,r-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(r-1)^{r-1} &= (r-1)^{r-2}\gamma_{r1} - (r-1)^{r-3}\gamma_{r2} + \cdots + (-1)^{r-2}\gamma_{r,r-1}
\end{aligned}$$

si trasforma immediatamente nell'altro

$$\begin{aligned}
\Delta^{r-2}1^{r-1} &= (r-2)!\,\gamma_{r1} \\
\Delta^{r-3}1^{r-1} &= \gamma_{r1}\Delta^{r-3}1^{r-2} - (r-3)!\,\gamma_{r2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta^{r-s-1}1^{r-1} &= \gamma_{r1}\Delta^{r-s-1}1^{r-2} - \gamma_{r2}\Delta^{r-s-1}1^{r-3} + \cdots + (-1)^{s-1}(r-s-1)!\,\gamma_{rs} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1^{r-1} &= \gamma_{r1} - \gamma_{r2} + \cdots + (-1)^{r-1}\gamma_{r,r-1}
\end{aligned}$$

che fornisce

$$\gamma_{r1} = \frac{1}{(r-2)!}\Delta^{r-2}1^{r-1}$$

$$\gamma_{r2} = \frac{1}{(r-2)!\,(r-3)!}\begin{vmatrix} \Delta^{r-2}1^{r-1} & \Delta^{r-3}1^{r-1} \\ \Delta^{r-2}1^{r-2} & \Delta^{r-3}1^{r-2} \end{vmatrix}.$$

Si ha cioé, se $s = 1, 2$

$$\gamma_{rs} = \frac{1}{(r-2)!\,(r-3)!\cdots(r-s-1)!}\begin{vmatrix} \Delta^{r-2}1^{r-1} & \Delta^{r-3}1^{r-1} & \ldots & \Delta^{r-s-1}1^{r-1} \\ \Delta^{r-2}1^{r-2} & \Delta^{r-3}1^{r-2} & \ldots & \Delta^{r-s-1}1^{r-2} \\ 0 & \Delta^{r-3}1^{r-3} & \ldots & \Delta^{r-s-1}1^{r-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta^{r-s-1}1^{r-s} \end{vmatrix}$$

: che l'espressione ottenuta sussista qualunque sia s se essa vale in corrispondenza di $s-1, s-2, \ldots, 2, 1$, lo si vede sviluppando il determinante del secondo membro secondo gli elementi della sua ultima colonna. Si ottiene infatti

$$\frac{1}{(r-2)!\,(r-3)!\cdots(r-s)!}\begin{vmatrix} \Delta^{r-2}1^{r-1} & \Delta^{r-3}1^{r-1} & \ldots & \Delta^{r-s-1}1^{r-1} \\ \Delta^{r-2}1^{r-2} & \Delta^{r-3}1^{r-2} & & \Delta^{r-s-1}1^{r-2} \\ 0 & \Delta^{r-3}1^{r-3} & & \Delta^{r-s-1}1^{r-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \Delta^{r-s-1}1^{r-s} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{s-1}\left\{\Delta^{r-s-1}1^{r-1} - \Delta^{r-s-1}1^{r-2}\frac{\Delta^{r-2}1^{r-1}}{(r-2)!} + \Delta^{r-s-1}1^{r-3}\frac{1}{(r-2)!\,(r-3)!}\begin{vmatrix} \Delta^{r-2}1^{r-1} & \Delta^{r-3}1^{r-1} \\ \Delta^{r-2}1^{r-2} & \Delta^{r-3}1^{r-2} \end{vmatrix} - \cdots\right\} \\
&= (-1)^{s-1}\left\{\Delta^{r-s-1}1^{r-1} - \gamma_{r1}\Delta^{r-s-1}1^{r-2} + \gamma_{r2}\Delta^{r-s-1}1^{r-3} - \cdots + (-1)^{s-1}\gamma_{r,s-1}\Delta^{r-s-1}1^{r-s-1}\right\} \\
&= (-1)^{s-1}(r-s-1)!\,\gamma_{rs}
\end{aligned}$$

come risulta dalla s-esima equazione del sistema trasformato.

Se ne ha in particolare, se $s = r-1$, poiché $\gamma_{r,r-1} = (r-1)!$

$$1!\,2!\cdots r! = \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & \ldots & 1^r \\ \Delta 1 & \Delta 1^2 & \ldots & \Delta 1^r \\ 0 & \Delta^2 1^2 & \ldots & \Delta^2 1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta^{r-1}1^r \end{vmatrix}.$$

II.

Se il punto $z = 1$ è interno al poligono di Borel della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n z^n$

$$\alpha_r = r! \int_0^{\infty} e^{-t} L_r(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n \frac{t^n}{n!}\right) dt \qquad (r = 0, 1, \ldots),$$

é la somma generalizzata di Borel della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\cdots(n-r+1)B_n$$

: il sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite

$$\text{II} \quad \alpha_0'' + \alpha_1'' + \alpha_2'' + \cdots\cdots = B_0$$

$$r!\,\alpha_r'' + \frac{(r+1)!}{1!}\alpha_{r+1}'' + \frac{(r+2)!}{2!}\alpha_{r+2}'' + \cdots = B_r$$

ha la soluzione

$$\alpha_r'' = r! \int_0^{\infty} e^{-t} L_r(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n \frac{t^n}{n!}\right) dt \text{ [7]}.$$

Ci proponiamo di dedurre da essa una soluzione del sistema

$$\text{I} \qquad \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' + \cdots = A_0$$

$$1^r \alpha_1' + 2^r \alpha_2' + \cdots = A_r$$

$$(r = 1, 2, \ldots)$$

e di determinare le condizioni alle quali debbono soddisfare gli elementi della successione $A_0, A_1, \ldots$ perché questa soluzione sia valida.

Perveniamo allo scopo ricordando che, come veniva dimostrato dal Nörlund, se la funzione

$$f(t) = A_0 + A_1 \frac{t}{1!} + \cdots$$

é olomorfa in un angolo che comprende il semiesse reale e positivo e si ha uniformemente in questo angolo

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\varkappa t} f^{(p)}(t) = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots; \varkappa > 0)$$

la serie

$$\frac{A_0}{z} - \frac{A_1}{z^2} + \cdots,$$

che puó divergere in corrispondenza di ogni valore di z, é assolutamente ed uniformemente sommabile secondo Borel e la sua somma

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_0^{\infty} e^{-tz} f\left(\frac{t}{z}\right) dt$$

coincide se z é reale e positivo, con

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Le due funzioni uniformi $F(z)$, $\Phi(z)$ coincidenti nei punti del semiasse reale e positivo interni al semipiano di convergenza dell'integrale di Laplace (2), sono espressioni

[7]) Cfr. U. Broggi, loc. cit. [6]).

diverse di una stessa funzione

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-tz} f(t)\, dt$$

suscettibile di uno sviluppo in serie di fattoriali

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s \omega^s}{z(z+\omega)\cdots(z+s\omega)}$$

: perché, come a noi importa, possa attribuirsi ad ω il valore 1, la funzione

$$\varphi(t) = f(-\log t) = \sum_0^\infty (-1)^n B_n (1-t)^n$$

deve essere olomorfa nel circolo $|t-1| = 1$. Deve essere pertanto

$$\limsup \sqrt[n]{|B_n|} \leqq 1 \text{ [8]}. \tag{3}$$

L'integrale

$$\int_0^\infty e^{-t} L_r(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{t^n}{n!} \right) dt$$

converge qualunque sia r e definisce $\frac{1}{r!} \alpha'_r$ $(r = 0, 1, \ldots)$, se il primo membro della (3) é minore del secondo, o se, essendo uguale, il punto $t = 1$ é punto regolare di $B_0 - B_1 t + \cdots$ e pertanto interno al poligono di Borel corrispondente alla serie.

[8]) Cfr. N. E. Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation, Paris 1926, pp. 184—188.

Eingegangen 29. April 1936.