

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1937

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0176

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176

LOG Id: LOG_0010

LOG Titel: Völlkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften.

Von *Georg Aumann* in München.

1. *Einleitung.* In der Theorie der Mittelwerte spielen die quasiaarithmetischen Mittel eine bevorzugte Rolle ¹⁾ ²⁾. Sofern es sich um *analytische* Mittelwerte handelt, lassen sich die quasiaarithmetischen Mittel durch eine Funktionalgleichung charakterisieren, die für zwei Argumente folgendermaßen lautet:

$$(1) \quad m(m(x_1, m(x_1, x_2)), m(m(x_1, x_2), x_2)) = m(x_1, x_2).$$

Für *reelle* Mittel ³⁾ dürfte die allgemeine Auflösung der Gleichung (1) ziemliche Schwierigkeiten machen; man kann nämlich reelle Mittel angeben, die (1) erfüllen (allerdings nicht streng monoton sind), aber nicht quasiaarithmetisch, d. h. nicht in der Form

$$m = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}\right)$$

darstellbar sind, wobei $\varphi(x)$ eine in $a < x < b$ stetige streng monotone Funktion und φ^{-1} die Umkehrfunktion von φ bedeutet.

Nennt man ein Mittel $m(x_1, x_2)$ *vollkommen*, wenn es (1) befriedigt, so haben wir die Tatsache, daß es *vollkommene reelle Mittel gibt, die nicht quasiaarithmetisch sind*. Solange man eine vollständige Antwort auf die Frage nach der allgemeinen Auflösung der Funktionalgleichung (1) für reelle Mittel nicht kennt, ist es angebracht, im Bereich der vollkommenen reellen Mittel zunächst einmal gewisse Teilklassen zu betrachten.

Im folgenden wollen wir uns mit reellen vollkommenen *Funktionalmitteln* $m(x_1, x_2)$ beschäftigen, d. h. mit Mittelwerten, wie sie dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(m),$$

oder dem verallgemeinerten Mittelwertsatz entspringen. Wir werden dabei voraussetzen, daß die Ableitung der Funktion $f(x)$ streng monoton ist. Die sich aus (1) für $f(x)$ ergebende Bedingung läßt mit Verwendung eines bekannten Satzes über die Differenzierbarkeitseigenschaften stetiger monotoner Funktionen auf beliebig oftmalige Differenzierbarkeit von $f(x)$ schließen und liefert dann für die Funktion $f(x)$ eine Differentialgleichung fünfter Ordnung, welche die Kurve $y = f(x)$ in einem (x, y) -Parallelkoordinatensystem als *Kegelschnitt* kennzeichnet. Damit sind alle möglichen vollkommenen, aber auch zugleich alle möglichen quasiaarithmetischen Funktionalmittel bestimmt.

¹⁾ G. Aumann, Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. II. (Analytische Mittelwerte), Math. Ann. 111 (1935), S. 713—730.

²⁾ Vgl. die Schlußbemerkung in: G. Aumann, Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten, Sitz.Ber. Bay.Akad. d. Wiss. 1933, S. 414.

³⁾ Siehe Definition I. c. ²⁾, S. 404.

Von Nr. 5 ab beschäftigen wir uns mit geometrischen Fragen. Die geometrische Deutung der Bedingung (1) liefert eine einfache *Tangenten-Sekanten-Schließseigenschaft*, die die Kegelschnitte unter allen streng konvexen glatten Kurven auszeichnet. Diese Schließseigenschaft ist Grenzfall einer Sekanten-Schließseigenschaft (*Viereckseigenschaft*): Liegen die Eckpunkte der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ auf einem glatten Teilbogen eines (eigentlichen oder ausgearteten) Kegelschnitts, und ist

$$AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CD \parallel C'D', \text{ dann ist auch } DA \parallel D'A'.$$

Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die genannten Bogen, und zwar innerhalb der Gesamtheit aller ebenen zusammenhängenden Punktmengen.

Ersetzt man in der Viereckseigenschaft das Wort „Viereck“ allgemein durch „Trapez“, so ergibt sich eine *Trapezeigenschaft*. Es ist bemerkenswert, daß die Trapezeigenschaft allein die Kegelschnitte nicht mehr aus der Gesamtheit aller ebenen zusammenhängenden Punktmengen heraushebt, sondern auch bei gewissen anderen Punktmengen auftritt.

Im Verlauf unserer Untersuchungen beweisen wir eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes von A. Marchaud ⁴⁾ über ebene zusammenhängende Punktmengen der linearen Ordnung zwei (Nr. 7).

2. *Funktionalmittel*. Wir definieren: Die eindeutige stetige Funktion $m(t_1, t_2)$ heißt im Bereich $a < t_i < b$, $i = 1, 2$, ein *Funktionalmittel*, wenn es zwei Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gibt, die im Intervall $a < t < b$ eindeutig und differenzierbar sind und die Eigenschaft haben, daß für $a < t_1 < t_2 < b$ die Gleichung

$$(2, 1) \quad \begin{vmatrix} \varphi(t_1) - \varphi(t_2) & \varphi'(t_3) \\ \psi(t_1) - \psi(t_2) & \psi'(t_3) \end{vmatrix} = 0$$

im Intervall $a < t_3 < b$ nur die eine Lösung $t_3 = m(t_1, t_2)$ besitzt. Um die Herkunft von m auszudrücken, schreiben wir

$$m(t_1, t_2) = M_{\varphi, \psi}(t_1, t_2).$$

Die geometrische Deutung von (2, 1) ist bekanntlich die folgende: Wir betrachten die in der Parameterform

$$(2, 2) \quad u = \varphi(t), \quad v = \psi(t)$$

in der (u, v) -Ebene dargestellte Kurve \mathfrak{K} . Die Gleichung (2, 1) besagt dann, daß die Kurvensehne $(t_1) (t_2)$ parallel ist zur Kurventangente in (t_3) . Aus der Voraussetzung, daß es nur einen solchen Punkt (t_3) geben soll, folgert man, daß \mathfrak{K} eine streng konvexe glatte Kurve ist mit einer Gesamtkrümmung $\leq \pi$. Es gibt daher eine affine Transformation mit nicht verschwindender Determinante,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_1 \varphi(t) + a_2 \psi(t) + a_3, \\ \psi_1(t) &= a_4 \varphi(t) + a_5 \psi(t) + a_6, \end{aligned}$$

bei der $\psi_1(t)$ streng monoton ausfällt. Es ist

$$M_{\varphi_1, \psi_1}(t_1, t_2) \equiv M_{\varphi, \psi}(t_1, t_2).$$

Führt man nun den neuen Parameter

$$(2, 3) \quad x = \psi_1(t)$$

mit der Umkehrung $t = \chi(x)$ ein, so wird $\varphi_1(t) = \varphi_1(\chi(x)) = f(x)$. Setzt man noch $f_0(x) \equiv x$, so ergibt sich schließlich:

$$M_{f, f_0}(x_1, x_2) = \psi_1(M_{\varphi, \psi}(\chi(x_1), \chi(x_2)));$$

⁴⁾ A. Marchand, Sur les continus d'ordre borné, Acta Math. 55 (1930), S. 67—115; Satz auf S. 85.

M_{f,t_0} ist das Bildmittel von $M_{\varphi,\psi}$ vermöge der Abbildung (2, 3). Bedenken wir, daß das Bildmittel eines vollkommenen Mittels wieder vollkommen ist, so können wir uns auf Grund der vorausgehenden Überlegungen bei der Suche nach vollkommenen Funktionalmitteln auf Mittel der Form M_{f,t_0} beschränken.

3. *Differenzierbarkeit.* Sei $f(x)$ im Intervall $a < x < b$ eindeutig und differenzierbar, und $f'(x)$ streng monoton (und damit stetig). Für $x_1 \neq x_2$ setzen wir

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = Q(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} Q(x_1, x_2) = R(x_1, x_2).$$

Da die Kurve $y = f(x)$ streng konvex ist, d. h. keine Strecke als Teil enthält, so gilt:

$$R(x_1, x_2) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 \neq x_2.$$

Das Mittel $M_{f,t_0}(x_1, x_2) = m(x_1, x_2)$, definiert durch die Gleichung

$$Q(x_1, x_2) = f'(m),$$

sei als vollkommen vorausgesetzt. Es besteht dann das folgende Induktionsschema:

Aus den Gleichungen

$$(3, 1) \quad Q(x_1, x_2) = f'(m),$$

$$(3, 2) \quad Q(x_1, m) = f'(u_1),$$

$$(3, 3) \quad Q(x_2, m) = f'(u_2)$$

folgt

$$(3, 4) \quad Q(u_1, u_2) = f'(m).$$

Wir werden nun zeigen, daß $f''(x)$ vorhanden ist für jedes x , allgemeiner, daß $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist. In der Tat:

Da $f'(x)$ streng monoton und stetig ist, so gibt es eine Stelle c in (a, b) , an der $f''(c)$ vorhanden ist⁵). Man wähle ein festes m genügend nahe bei c , aber von c verschieden; u_1 variere in einer Umgebung von c . Da $Q(x_1, x_2)$ in jeder einzelnen Veränderlichen streng monoton ist, so folgt aus (3, 2) $x_1 = x_1(u_1)$, aus (3, 1) dann $x_2 = x_2(u_1)$, und aus (3, 3) dann $u_2 = u_2(u_1)$. Die Funktionen $x_1(u_1)$, $x_2(u_1)$ und $u_2(u_1)$ sind stetig und streng monoton, außerdem sind die x_1, x_2, u_1, u_2, m alle voneinander verschieden. Lassen wir nun u_1 gegen c streben! Aus (3, 2), (3, 1), (3, 4) und (3, 3) ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1'(c) &= \frac{f''(c)}{R(x_1(c), m)}, \\ x_2'(c) &= - \frac{R(x_1(c), x_2(c))}{R(x_2(c), x_1(c))} x_1'(c), \\ u_2'(c) &= - \frac{R(c, u_2(c))}{R(u_2(c), c)}, \\ f''(u_2(c)) u_2'(c) &= R(x_2(c), m) x_2'(c), \end{aligned}$$

gleichgültig, ob $f''(c)$ endlich ist oder nicht. Wir finden also:

$$(3, 5) \quad f''(u_2) = \frac{R(u_2, c) R(x_1, x_2) R(x_2, m)}{R(c, u_2) R(x_2, x_1) R(x_1, m)} f''(c)$$

für alle u_2 in einer gewissen Umgebung von c . $f(x)$ ist somit in einer ganzen Umgebung von c zweimal differenzierbar. Es kann $f''(c)$ weder 0 noch ∞ sein. Indem man jetzt in (3, 5) m variieren läßt, schließt man in ähnlicher Weise wie eben auf beliebig oftmalige Differenzierbarkeit von $f(x)$ in einer Umgebung der Stelle c , und, indem man an Stelle von c nacheinander geeignete neue Punkte wählt, auf dieselbe im ganzen Intervall (a, b) .

⁵) Siehe C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 573.

4. Die vollkommenen Funktionalmittel. Nachdem wir in 3 festgestellt haben, daß das $f(x)$ eines vollkommenen Mittels M_{f,t_0} beliebig oft differenzierbar ist, sind wir imstande, eine Differentialgleichung aufzustellen, der $f(x)$ notwendigerweise genügen muß. Am einfachsten gelingt dies, indem man bei festem m in den Gleichungen (3,1) bis (3,4) den Grenzübergang $x_1 \rightarrow m$ durchführt mit

$$f(m+h) = f(m) + f'(m)h + \dots + \frac{f^{(5)}(m)}{5!}h^5 + \frac{h^6}{6!}f^{(6)}(m + \vartheta h).$$

Da die zugehörige Rechnung, wenn auch etwas lang, keine Schwierigkeiten bietet, so sei nur das Ergebnis genannt: Man erhält mit den Abkürzungen

$$\frac{f'''}{3f''} = \omega_1, \quad \frac{f^{(4)}}{6f''} = \omega_2, \quad \frac{f^{(5)}}{60f''} = \omega_3$$

die Differentialgleichung

$$2\omega_3 - 3\omega_2\omega_1 + 4\omega_1^3 = 0,$$

deren Integralkurven $y = f(x)$ in einer (x, y) -Ebene mit der Nebenbedingung $f'' \neq 0$ bekanntlich nicht ausgeartete Kegelschnitte darstellen.

Daß umgekehrt Funktionen $y = f(x)$, die eigentliche Kegelschnitte liefern, zu den gesuchten gehören, folgt daraus, daß die Mittel $M_{\varphi_i, \psi_i}(t_1, t_2)$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$\begin{aligned} (4,1) & \quad \varphi_1 = t, & \psi_1 & = t^2, \\ (4,2) & \quad \varphi_2 = \cos t, & \psi_2 & = \sin t, \\ (4,3) & \quad \varphi_3 = \text{Cos } t, & \psi_3 & = \text{Sin } t \end{aligned} \quad (0 < t < \pi)$$

alle das arithmetische Mittel $\frac{t_1 + t_2}{2}$ darstellen, welches ja vollkommen ist. Mittels der in 2 beschriebenen Transformation erhält man aber aus (4,1), (4,2), (4,3) alle Kegelschnittbogen mit der Gleichung $y = f(x)$. Damit ist bewiesen:

Satz 1. Das durch die reellen Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ im Bereich $a < t_1, t_2 < b$ dargestellte Funktionalmittel $M_{\varphi, \psi}(t_1, t_2)$ ist dann und nur dann vollkommen, wenn der durch (2,2) dargestellte Kurvenbogen Teil eines nicht ausgearteten Kegelschnittes ist.⁶⁾

5. Schließeigenschaften der Kegelschnitte. Daß die in Satz 1 ausgesprochene Bedingung hinreichend ist, sieht man rascher als in 4 auf geometrischem Wege ein. Ist nämlich das Mittel $M_{\varphi, \psi}$ vollkommen, so hat die durch (2,2) dargestellte streng konvexe glatte Kurve \mathfrak{K} folgende Eigenschaft (siehe Figur):

Eigenschaft A. Sind P_1, P_2 Punkte von \mathfrak{K} , ist weiter die Tangente in M an \mathfrak{K} parallel zur Sehne P_1P_2 , die Tangente in Q_i an \mathfrak{K} parallel zur Sehne P_iM , $i = 1, 2$, so ist Q_1Q_2 parallel zu P_1P_2 .

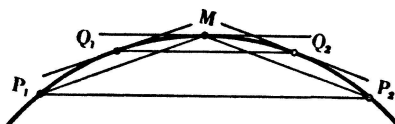


Fig. 1.

Man sieht sofort, daß die Eigenschaft A von der Parameterdarstellung der Kurve (vgl. 2) unabhängig und gegenüber affinen Abbildungen invariant ist. Aus dieser letzten Bemerkung schließt man, daß jeder Teilbogen eines nicht ausgearteten Kegelschnittes

⁶⁾ Wegen eines Beweises des analogen Satzes für quasiaarithmetische Funktionalmittel, der sich nicht auf den hier mitgeteilten Beweis stützt, siehe G. Aumann, Über einen elementaren Zusammenhang zwischen Mittelwerten, Streckenrechnung und Kegelschnitten, Tōhoku Math. Journ. 42 (1936), S. 32–37.

die Eigenschaft A besitzt, weil ja die Kegelschnitte in jeder Richtung affine Symmetrie haben. Der geometrische Inhalt von Satz 1 ist also der

Satz 2. *Unter allen streng konvexen glatten Kurven mit einer Gesamtkrümmung $\leq \pi$ sind die Teilbogen der nicht ausgearteten Kegelschnitte die einzigen, welche die Eigenschaft A besitzen.*

Die Eigenschaft A ist Grenzfall der folgenden stärkeren Eigenschaft:

Eigenschaft B. Sind P_1, P_2 und M_1, M_2 vier Punkte von \mathfrak{K} , wobei P_1P_2 parallel zu M_1M_2 ist, verläuft weiter die Tangente in Q_i an \mathfrak{K} parallel zur Sehne P_iM_i , $i = 1, 2$, so ist Q_1Q_2 parallel zu P_1P_2 .

Aus dem Grenzübergang $M_1 \rightarrow M \leftarrow M_2$, der bei einer streng konvexen glatten Kurve \mathfrak{K} ohne weiteres ausführbar ist, folgt, daß die Eigenschaft B die Eigenschaft A nach sich zieht. Wegen der schon genannten Affinsymmetrie besitzen die Kegelschnitte die Eigenschaft B. Daher gilt der

Satz 3. *Unter allen streng konvexen glatten Kurven mit einer Gesamtkrümmung $\leq \pi$ sind die Teilbogen der nicht ausgearteten Kegelschnitte die einzigen, welche die Eigenschaft B besitzen ⁷⁾.*

6. Die Trapezeigenschaft. Im folgenden heißen vier verschiedene Punkte A, B, C, D ein Viereck; ist dabei $AB \parallel CD$ oder $BC \parallel AD$, so heißt es ein Trapez ⁸⁾. Ist dann \mathfrak{M} eine ebene Punktmenge, so definieren wir für \mathfrak{M} folgendes als

Eigenschaft C (Trapezeigenschaft). Gehören die Ecken der zwei Trapeze $P_1M_1M_2P_2$ und $Q_1Q_1'Q_2'Q_2$ alle zu \mathfrak{M} , und ist $Q_1'Q_2' \parallel P_1P_2 \parallel M_1M_2 \parallel Q_1Q_2$, $Q_1Q_1' \parallel P_1M_1$, so ist auch $Q_2Q_2' \parallel P_2M_2$.

Aus dieser Definition geht ganz leicht hervor, daß jede streng konvexe glatte Kurve mit der Eigenschaft B zugleich die Eigenschaft C besitzt, und umgekehrt.

Bei einer allgemeinen Untersuchung der Punktmenge mit der Eigenschaft C erscheint es natürlich, allgemeinere Punktmenge als gerade glatte Kurven in die Betrachtung mit einzubeziehen. Wir beweisen den

Satz 4. *Jede ebene zusammenhängende Punktmenge \mathfrak{M} mit der Eigenschaft C liegt entweder auf einem (eigentlichen oder ausgearteten) Kegelschnitt oder auf drei von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen, die solche Winkel gegeneinander bilden, daß jede beliebige Gerade mindestens einen Halbstrahl trifft ⁹⁾.*

Beweis (1. Teil). Wir betrachten den Fall, daß drei verschiedene Punkte von \mathfrak{M} , etwa A, B, C auf einer Geraden g_0 liegen. Jede von g_0 verschiedene, zu g_0 parallele Gerade g trifft \mathfrak{M} in höchstens einem Punkt. Gäbe es nämlich auf g zwei verschiedene Punkte von \mathfrak{M} , etwa D und E , so würden die Trapeze $DABE, DACE$ der Eigenschaft C widersprechen. Gibt es außerhalb g_0 keinen Punkt von \mathfrak{M} , so ist wegen der Bedingung des Zusammenhängens von \mathfrak{M} weiter nichts mehr zu beweisen.

Sei nun D ein Punkt außerhalb von g_0 . Ich behaupte, daß dann der Durchschnitt \mathfrak{S}_0 von \mathfrak{M} mit g_0 zusammenhängend ist. Angenommen, es gäbe einen nicht zu \mathfrak{M} gehörigen

⁷⁾ Dieser Satz läßt sich auch, ohne auf den Satz 2 und damit Satz 1 zurückgehen zu müssen, wie folgt, beweisen. Man benutze den Satz: Haben die streng konvexen differenzierbaren Funktionen $f_1(x), f_2(x)$ ein gemeinsames Definitionsintervall, und gilt dort $M_{f_1, f_0} \equiv M_{f_2, f_0}$, so gilt dort $f_2(x) \equiv cf_1(x) + d$, wo c, d Konstanten sind. Für eine Kurve \mathfrak{K} mit der Eigenschaft B folgert man aus diesem Satz, daß jedes Parallelenbüschel auf \mathfrak{K} eine affine Selbstabbildung erzeugt. Diese Eigenschaft ist aber für die Kegelschnitte bekanntlich kennzeichnend.

⁸⁾ Es ist zulässig, daß A, B, C, D in einer Geraden liegen.

⁹⁾ Die Punktmenge \mathfrak{M} heißt zusammenhängend, wenn für jede Zerlegung von \mathfrak{M} in zwei fremde, nicht leere Summanden wenigstens ein Summand einen Häufungspunkt des anderen enthält.

Punkt P auf g_0 , der zwischen den Punkten A und B liegt. Wir legen durch P die Gerade h parallel zu AD . Auf h liegen höchstens zwei Punkte von \mathfrak{M} ; die Abstände dieser Punkte von g_0 seien $\geq \delta > 0$. Nun schließen wir g_0 in zwei zu g_0 parallele Geraden g_1 und g_2 ein mit einem Abstand $\frac{\delta}{2}$ von g_0 . Da g_1 und g_2 je höchstens einen Punkt mit \mathfrak{M} gemein haben, so läßt sich ein, aus je einem Stück von g_1, h, g_2 zusammengesetzter, zu \mathfrak{M} fremder Weg angeben, der A und B trennt, im Widerspruch damit, daß \mathfrak{M} zusammenhängend ist. \mathfrak{S}_0 ist also ein lineares Intervall auf g_0 . Sei nun h_0 irgendeine g_0 schneidende Gerade. Ich betrachte den Bereich der Ebene, der gebildet wird von allen zu h_0 parallelen, \mathfrak{S}_0 treffenden Geraden. Aus der Eigenschaft C folgt, daß je drei Punkte von \mathfrak{M} , die dem genannten Bereich, aber nicht g_0 angehören, auf einer Geraden liegen müssen.

Aus dem bisher Gesagten folgert man schließlich, daß \mathfrak{M} entweder zusammenhängende Teilmenge eines sich schneidenden Geradenpaares ist oder auf drei von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen liegt, von denen jeder im erhabenen Winkelraum der beiden andern liegt.

7. Satz über ebene zusammenhängende Punktmenge der linearen Ordnung zwei. Ehe wir mit dem Beweis von Satz 4 fortfahren, zeigen wir:

Ist \mathfrak{C} eine mehripunktige zusammenhängende Punktmenge der Ebene, die von jeder Geraden in höchstens zwei Punkten getroffen wird, so ist \mathfrak{C} eine streng konvexe einfache Kurve¹⁰⁾.

Beweis. a) Je vier verschiedene Punkte von \mathfrak{C} bestimmen ein konvexes Viereck. In der Tat: Angenommen, es gäbe vier verschiedene Punkte A, B, C, D von \mathfrak{C} , und D liege im Innern des Dreiecks ABC . A_1 sei der Schnittpunkt der Geraden AD mit BC , B_1 der von BD mit AC . A_1 und B_1 gehören nicht zu \mathfrak{C} . Ich behaupte nun, daß die Strecke A_1B_1 einen Punkt E von \mathfrak{C} enthält. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde C von D durch den zu \mathfrak{C} fremden Weg getrennt werden, welcher besteht aus der Strecke A_1B_1 und aus den beiden Halbgeraden, die von A_1 bzw. B_1 ausgehen, A bzw. B nicht enthalten und auf den Geraden AA_1 bzw. BB_1 liegen (Widerspruch!). Die Gerade CE trifft eine der Strecken DA_1, DB_1 im Innern, etwa DA_1 im Punkt F , der dann nicht zu \mathfrak{C} gehören kann. Die von F ausgehenden, auf den Geraden CF bzw. AF liegenden, C bzw. A nicht enthaltenden Halbstrahlen bilden einen zu \mathfrak{C} fremden Weg, der B und C trennt (Widerspruch!). Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte von \mathfrak{C} , und O ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC . Jeder Halbstrahl s durch O trifft \mathfrak{C} in höchstens einem Punkt P_s ; sonst gäbe es nämlich vier Punkte von \mathfrak{C} , die kein konvexes Viereck bildeten, im Widerspruch zu a). Würde P_s mit s nicht stetig variieren, so ließen sich zwei Punkte D, E von \mathfrak{C} so finden, daß die Verlängerung der Strecke DE durch das Innere von ABC geht, was wieder zu a) im Widerspruch steht. Falls es zwei Halbstrahlen durch O gibt, die zu \mathfrak{C} fremd sind, so enthält der von diesen beiden Halbstrahlen gebildete konvexe Winkelraum überhaupt keine Punkte von \mathfrak{C} , da sonst \mathfrak{C} nicht zusammenhängen würde.

Aus a) und b) ergibt sich somit, daß \mathfrak{C} eine streng konvexe einfache (offene oder geschlossene) Kurve darstellt.

8. Fortsetzung des Beweises von Satz 4. Wir haben noch den Fall zu untersuchen, wo \mathfrak{M} von jeder Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Da in diesem

¹⁰⁾ Dies ist etwas mehr als der Satz von A. Marchaud, l. c. 4), weil wir in der Voraussetzung auf die Abgeschlossenheit von \mathfrak{C} verzichten. Zudem ist unser Beweis denkbar elementar.

Fall \mathfrak{M} nach 7 eine streng konvexe Kurve ist, haben wir, um den Anschluß an Satz 3 zu bekommen, nur noch zu zeigen, daß \mathfrak{M} überall eine eindeutige Tangente besitzt.

Sei auf \mathfrak{M} ein Durchlaufungssinn festgelegt; t_P^+ bzw. t_P^- bezeichne die vordere bzw. hintere Tangente im Punkt P von \mathfrak{M} an \mathfrak{M} . Wir führen in der Eigenschaft C (vgl. 6) folgenden Grenzübergang aus: Bei festen P_1, P_2, Q_1, Q_2 mit $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ lassen wir einseitig $M_1 \rightarrow P_1, M_2 \rightarrow P_2$ streben mit $M_1M_2 \parallel P_1P_2$. Dann strebt Q'_i mit $Q_iQ'_i \parallel M_iP_i, i = 1, 2$, gegen R_i . \mathfrak{M} hat demnach die folgende Eigenschaft:

Es sei $R_1R_2 \parallel P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, t_{P_1}^+ \parallel Q_1R_1$, dann ist $t_{P_1}^- \parallel Q_2R_2$.

Auf Grund dieser Eigenschaft können wir von \mathfrak{M} unmittelbar behaupten: Sind P_1, P_2 zwei innere Punkte von \mathfrak{M} , so folgt aus $t_{P_1}^+ \parallel t_{P_1}^-$ stets $t_{P_1}^+ \parallel t_{P_1}^-$. Dies hat aber, da jede konvexe einfache Kurve mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten in jedem inneren Punkt eine eindeutige Tangente besitzt, zur Folge, daß \mathfrak{M} in jedem inneren Punkt glatt ist. Damit ist der Beweis von Satz 4 fertig.

9. *Die Viereckseigenschaft.* Wir sahen, daß nicht jede ebene zusammenhängende Punktmenge mit der Eigenschaft C Teil eines Kegelschnitts sein muß. Durch Verschärfung der Eigenschaft C können wir aber die Kegelschnitte aussondern.

Man zeigt leicht, etwa an Hand der drei in 4 genannten Typen (oder mit Hilfe des Pascalschen Satzes), daß jeder Teilbogen \mathfrak{M} eines eigentlichen Kegelschnitts die folgende Viereckseigenschaft hat:

Eigenschaft D. Sind A, B, C, D und A', B', C', D' zu \mathfrak{M} gehörige Eckpunkte zweier Vierecke und ist $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$ und $CD \parallel C'D'$, so ist auch $DA \parallel D'A'$.

Diese Eigenschaft ist im wesentlichen charakteristisch für die genannten Punkt-mengen. Es gilt nämlich der

Satz 5. Jede zusammenhängende ebene Punktmenge mit der Eigenschaft D ist Teil eines eigentlichen Kegelschnitts oder einer Geraden ¹¹⁾.

In der Tat, da D die Eigenschaft C nach sich zieht, so genügt es nach Satz 4 nur zu zeigen, daß eine Punktmenge \mathfrak{M} , die ein Geradenstück \mathfrak{G} und einen außerhalb dieser Geraden gelegenen Punkt P enthält, die Eigenschaft D nicht besitzen kann. Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf \mathfrak{G} , so widersprechen die Vierecke $PABC$ und $PABD$ der Eigenschaft D.

Bemerkung. Der Viereckseigenschaft der Kegelschnitte entspricht in projektiver Fassung die

Eigenschaft E. Liegen die acht Ecken zweier Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ auf einem Kegelschnitt und gehören die Schnittpunkte dreier Paare entsprechender Seiten einer und derselben Geraden an, so auch der Schnittpunkt des vierten Paares.

Setzt man darin $A' = B, B' = A$, so erhält man die Pascalsche Sechspunkte-eigenschaft. Andererseits folgt durch zweimalige Anwendung der Pascalschen Sechspunkte-eigenschaft die Achtpunkte-eigenschaft E.

¹¹⁾ Statt dessen könnte man auch sagen: glatter Teilbogen eines (eigentlichen oder ausgearteten) Kegelschnitts.