

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1937

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0176

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0176](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176)

**LOG Id:** LOG\_0012

**LOG Titel:** Zur Theorie der schlichten Funktionen.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Zur Theorie der schlichten Funktionen. \*)

Von *E. Peschl* in Jena.

## Einleitung.

Die Theorie der schlichten Funktionen ist vom Anfang ihrer Entwicklung an mit der klassischen Funktionentheorie eng verknüpft. So hat vor allem der Koebesche Verzerrungssatz am Anfang dieser Theorie gestanden und gleichzeitig der Theorie der konformen Abbildungen wie der Uniformisierung von analytischen Funktionen gedient. Inzwischen hat sich eine umfangreiche Literatur über die schlichten Funktionen entwickelt. Die vollständige Entwicklung dieser Theorie zu geben, würde hier zu weit führen. Es ist jedoch interessant, sich einmal zu überlegen, welche grundlegenden Ideen und Gesichtspunkte sowie Hauptprobleme in dieser Theorie zutage traten. Denn dies macht gerade die Theorie der schlichten Funktionen so reizvoll, daß im Laufe der Zeit von den verschiedensten Seiten her die Bemühungen angesetzt werden mußten, um dem Wesen der Schlichtheit in ihren Hauptproblemen näher zu kommen. Ausgehend vom Koebeschen Verzerrungssatz ergaben sich zunächst der Flächensatz von Bieberbach und die daran anschließenden Folgerungen. Nachdem schon vorher in einer Reihe von Arbeiten von Carathéodory, Toeplitz und anderen das Koeffizientenproblem der beschränkten wie auch der Funktionen von positivem Realteil aufgeworfen und gelöst wurde, hat sich dann vor allem Bieberbach für die schlichten Funktionen das entsprechende Problem gestellt und in mehreren Arbeiten behandelt. Die Schwierigkeiten dieses bis heute noch ungelösten Problems traten erst allmählich im Laufe der Entwicklung in Erscheinung. Soviel auch der Flächensatz zunächst für die Theorie der schlichten Funktionen leistet, so charakterisiert er doch nicht die Schlichtheit, da er auch für gewisse nichtschlichte Funktionen gilt. Eine Weiterentwicklung dieses Gedankens gab aber Prawitz, der an Stelle des Flächenintegrals Integrale mit gewissen Belegungen setzt. Man könnte hier die Hoffnung hegen, die Schlichtheit damit charakterisieren zu können. Wenn dies auch zweifellos zutrifft und die Arbeit von Prawitz eine Reihe von schönen Sätzen enthält, die sehr wenig bekannt sind, so kam doch für das eigentliche Problem der Koeffizienten der schlichten Funktionen in der nächsten Zeit die wesentlichste Förderung von einer Arbeit von Löwner. Man könnte, wenn man die Mittel aufzählen wollte, die geeignet sind, die Schlichtheit zu erfassen, auch noch das Koebesche Bildgebiet nennen, doch kommt man damit nicht recht weiter. Im folgenden wird *die Iteration als eine Grundeigenschaft für die schlichten Funktionen* ausgenutzt. Es war vor allem das Hauptziel der Arbeit, *allgemeine Zusammenhänge in dieser Richtung* aufzudecken und vielleicht gerade dadurch zu zeigen, welcher Art die Schwierigkeiten sind, vor allem auch, mit welchen analytischen Schwierigkeiten das Problem verknüpft ist.

\*) Diese Arbeit hat der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena als Habilitationsschrift vorgelegen. Habilitationskolloquium 17. 4. 1935.

Es gibt noch eine ganze Reihe anderer Hauptprobleme der Theorie der schlichten Abbildungen. Am nächsten berührt sich mit dem eigentlichen Problem der Koeffizienten noch die Frage nach asymptotisch möglichst guten Abschätzungen, ja sie ist praktisch aufs engste mit dem Koeffizientenproblem verbunden. Dem gegenüber kann man allerdings sagen, daß man noch eine ganze Reihe von vorhandenen Methoden vielleicht ausnützen könnte, um diese oder jene Abschätzung zu verbessern, ohne daß man dabei dem eigentlichen Koeffizientenproblem, das uns hier in erster Linie interessiert, näher kommt, d. h. der Frage nach den genauen Koeffizientenbereichen. Daher sind diese verschiedenen Ergebnisse hier beiseite gelassen, so wichtig und wertvoll sie in der Theorie sind.

Ein anderer Teil der Untersuchungen beschäftigt sich mit der Frage, wie sich Schlichtheit und andere Eigenschaften analytischer Funktionen gegenseitig bedingen oder einschränken. Dieses sehr weite und reizvolle Gebiet hat eine große Reihe schöner Ergebnisse, wie etwa die Untersuchungen über den Rundungsradius oder die Sternigkeitsschranke der schlichten Funktionen oder die Schlichtheitsschranke beschränkter Funktionen zu verzeichnen. Andere Autoren haben sich dem Problem der Schlichtheit der Potenzreihenabschnitte zugewandt. Es sei hier für die Übersicht über solche Fragen generell auf die in letzter Zeit erschienenen Darstellungen verwiesen <sup>1)</sup>.

Im Koeffizientenproblem erbrachten in allerletzter Zeit Dieudonné und Rogosinski einen weiteren Fortschritt, indem sie zeigten, daß die Bieberbachsche Vermutung für Funktionen mit reellen Koeffizienten richtig ist.

Ich habe mir zur Aufgabe gestellt, das Gesamtproblem von neuen Seiten aus zu sehen. Dabei haben zum Teil die einzelnen Kapitel der folgenden Arbeit voneinander unabhängige Ausgangspunkte, sind also in logischer Hinsicht keineswegs alle voneinander abhängig. (So könnte z. B. die Differentialgleichung für den Rand der Bereiche schon im Kapitel II hergeleitet werden; trotzdem haben wir sie, um die sich daran anschließenden Überlegungen nicht zu unterbrechen, später gebracht.) Zunächst steht der *Approximationssatz* des ersten Kapitels im Vordergrund. Er besagt, daß man die *elementaren Schlitzabbildungen* nur unter sich zu iterieren braucht, um mit allen so entstehenden Funktionen bereits alle schlichten Funktionen approximieren zu können. Zwar stehen zunächst dem Iterationskalkül beträchtliche analytische Schwierigkeiten entgegen. Daher kann es der Sinn des Approximationssatzes nur sein, den Schritt ins Infinitesimale an eine andere Stelle zu verlegen. Dies geschieht im zweiten Kapitel, in dem vom Gesamtverlauf der *Iterationskurven* der Schritt zur *Randeigenschaft* der Bereiche gemacht wird. Im dritten Kapitel *iterieren wir mit beliebigen sternförmig beschränkten Abbildungen der Form*

$$S^{-1}(e^{-t}S(z)), \quad t > 0,$$

worin  $S(z)$  eine beliebige sternförmige Funktion ist, und betrachten die zugehörigen Iterationsrichtungen im Koeffizientenraum. Dabei zeigt sich, daß die Iterationsrichtungen im transformierten Koeffizientenraum  $\tilde{\mathfrak{R}}$  von  $\frac{f(z)}{f'(z)}$  eine gewisse Symmetrie aufweisen, welche die Behandlung des Problems erleichtern dürfte. Wir gewinnen in diesem Kapitel den *Hauptsatz 10*:

Der genaue  $n$ -te Variabilitätsbereich  $\mathfrak{B}_t^{(n)}$  der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und schlichten Funktionen ist der kleinste den Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  der Koeffizienten

<sup>1)</sup> Siehe das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit. Die Arbeiten dieses Verzeichnisses werden im folgenden mit L. V. und der Angabe ihrer Nummer zitiert.

der sternförmigen Funktionen enthaltende Bereich mit der Randeigenschaft, daß kein beliebig kleines Anfangskurvenstück des jedem Randpunkt  $P = (\beta)$  zugeordneten Iterationskurvenbüschels  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  mit beliebig in  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  variierendem Endpunkt ( $\sigma$ ) ins Äußere dringt <sup>2)</sup>.

In den anschließenden §§ 17, 18 stellen wir die *partielle Differentialgleichung* (allerdings in Parameterform) auf, *welcher jeder differentiiierbare Teil des Randes von  $\mathfrak{B}_i^{(n)}$  genügen muß*. Die Elimination dieses Parameters ist im allgemeinen schwierig. Das Problem, die genauen Bereiche  $\mathfrak{B}_i^{(n)}$  aufzufinden, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, diese partielle Differentialgleichung (17. 2) mit oder ohne Elimination des Parameters zu integrieren und dann für die erhaltenen Bereiche die im Hauptsatz 10 genannten Haupteigenschaften der Iterationsfestigkeit hinterher nochmals zu überprüfen.

Von hier aus wird im vierten Kapitel wieder der Schritt zurück ins Infinitesimale gemacht und zwar an derselben Stelle, an der ihn auch Löwner macht, nur werden noch wesentlich allgemeinere infinitesimale Iterationen dabei verwendet, welche aus mehrfachen Radialschlitzabbildungen entstehen. Die Integration der zu diesen mehrfachen Gabelschlitzabbildungen gehörigen Differentialgleichungen, die eine Verallgemeinerung der Löwnerschen Differentialgleichung darstellt, verläuft parallel mit der bekannten Integration bei Löwner, wie auch mit gewissen Entwicklungen der Kapitel II und III. Das Wesentliche ist, daß man bei dieser und ähnlich gebauten anderen Differentialgleichungen (vgl. § 32), welche auf infinitesimalen Iterationen beruhen, jeweils für die Lösungen die *Schlichtheit* auf Grund allgemeiner Approximationssätze *beweisen* kann, sobald nur die in den Anfangsbedingungen auftretende Funktion selbst *schlicht* ist.

Das fünfte Kapitel liefert den genauen reellen Variabilitätsbereich  $\mathfrak{E}_i^{(3)}$ , d. h. den Durchschnitt des Bereiches  $\mathfrak{B}_i^{(3)}$  mit  $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$ ;  $\mathfrak{E}_i^{(3)}$  ergibt sich, indem man in der Ebene der Koordinaten  $\Re\beta_2, \Re\beta_3$  die reellen Iterationen unter Zuhilfenahme des reellen Bereichs  $\mathfrak{E}_*^{(3)}$  für die sternförmigen Funktionen betrachtet, aus einer Differentialgleichung (27. 2). Wir erhalten hier das *Ergebnis*:

Für jede im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion  $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$  gilt die scharfe Abschätzung

$$1 \geq \Re\beta_3 \geq 2\Phi(\Re\beta_2) - 1.$$

Darin ist  $\beta_2 = -\frac{b_2}{2}$ ,  $\beta_3 = b_2^2 - b_3$  und außerdem  $\Phi(x)$  durch die Gleichungen

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{\varphi^2(x)} (2\varphi(x) - 1) \quad \text{und} \quad x = \varphi^{e^{1-\varphi}}$$

erklärt.

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die Berandung von  $\mathfrak{B}_i^{(3)}$  keine algebraische Fläche sein kann <sup>3)</sup>, weiterhin leitet sich eine Ungleichung von Fekete und Szegö nunmehr völlig elementar und mühelos aus dieser genauen Abschätzung her. Sodann bringen wir noch eine Abschätzung des Bereiches  $\mathfrak{B}_i^{(3)}$  von innen heraus, zeigen jedoch, daß diese noch nicht den genauen Bereich ergibt. Und schließlich stellen wir die genauen *Schrankenfunktionen* auf, welche zum Rand von  $\mathfrak{E}_i^{(3)}$  gehören. Es lassen sich hier zweifellos in vieler Hinsicht diese Gedanken weiterführen. Doch sei dies anderen Arbeiten vorbehalten.

<sup>2)</sup> Genauerer siehe Nr. 15.

<sup>3)</sup> Vgl. die Fußnote <sup>31)</sup>.

### I. Der Approximationssatz.

1. *Der Hauptsatz der Approximation.* Wir wollen zunächst eine besonders einfache schlichte Abbildung des Einheitskreises betrachten, nämlich die, welche das Innere des Einheitskreises auf ein Teilgebiet schlicht abbildet, das aus diesem dadurch entsteht, daß wir von dem Punkte  $\bar{\eta}$  der Peripherie aus längs des Radiusvektors ein Stück weit nach innen aufschneiden. Ein solches Gebiet heiße ein *elementares Schlitzgebiet*. Und die Funktion  $f(z)$ , welche dieses auf den Einheitskreis der  $z$ -Ebene normiert abbildet, nennen wir eine *elementare beschränkte Schlitzabbildung*. Dabei heiße hier und auch später eine Funktion normiert, wenn für sie  $f(0) = 0$ ,  $f'(0)$  reell und positiv ist. In eine solche Funktion gehen also zwei reelle Parameter  $t$ ,  $\vartheta$  ein mit

$$f'(0) = e^{-t}, \quad \eta = e^{i\vartheta} \quad (0 \leq t, 0 \leq \vartheta < 2\pi).$$

Die Familie dieser Funktionen  $f_{(\vartheta, t)}$  mit beliebigen reellen Werten  $t$ ,  $\vartheta$  ( $0 \leq t, 0 \leq \vartheta < 2\pi$ ) sei zur Abkürzung  $\mathfrak{F}_1$  genannt.

Für  $\vartheta = 0$  erhalten wir die Abbildungsfunktion  $f_{(\vartheta, t)}$  aus der Gleichung

$$(1.1) \quad \frac{w}{(1+w)^2} = \alpha \frac{z}{(1+z)^2} \quad \text{mit } \alpha = e^{-t}.$$

Allgemein ist  $f_{(\vartheta, t)} = \bar{\eta} f_{(\vartheta, t)}(\eta z)$ , d. h.  $w = f_{(\vartheta, t)}$  genügt der Gleichung

$$\frac{w}{(1+\eta w)^2} = \alpha \frac{z}{(1+\eta z)^2} \quad \text{mit } \alpha = e^{-t}, \quad \eta = e^{i\vartheta}.$$

Nun bilden wir die *Iterierten* von diesen. Sind  $f_1, \dots, f_n$  irgendwelche Funktionen aus der Familie  $\mathfrak{F}_1$ , so möge die Gesamtheit aller solcher durch Iteration zusammengesetzten elementaren beschränkten Schlitzabbildungen  $f_1(f_2(\dots(f_n(z))\dots))$  die Familie  $\mathfrak{F}_n$  heißen. Wir werden diese Funktionen auch kurz *n-te Elementariterierte* bezeichnen. Der Hauptinhalt unseres ersten Satzes besagt nun, daß diese Funktionen schon ausreichen, um jede beschränkte schlichte Abbildung zu approximieren. Wir beweisen

**Satz 1 (Approximationssatz).** *Für jede (normierte) beschränkte und den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion  $f(z)$  gibt es eine Folge von Funktionen  $\varphi_n$  aus  $\mathfrak{F}_n$ , welche in jedem Kreis  $|z| \leq \varrho$ ,  $0 < \varrho < 1$ ,  $\varrho$  beliebig — wir wollen dafür kurz sagen: im Innern des Einheitskreises — gleichmäßig gegen die vorgelegte Funktion  $f(z)$  konvergiert.*

*Beweis.* Alle Funktionen seien im folgenden normiert. Die Funktionen  $g_n = f(\varrho_n z)$  mit  $\varrho_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, \dots$ , bilden den Einheitskreis auf Gebiete ab, welche durchweg regulär analytisch berandet sind und mit ihren Randpunkten in  $|z| < 1$  liegen, und konvergieren im Innern gleichmäßig gegen  $f(z)$ . Daher genügt es für das weitere, das Gebiet  $G$  regulär analytisch berandet und  $\bar{G}^{4a}$  in  $|z| < 1$  vorauszusetzen. Denn haben wir  $g_n(z)$  durch die Folge  $f_{n,k}(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , approximiert, so können wir hieraus eine geeignete Diagonalfolge finden, welche auch  $f(z)$  approximiert. Jede solche Abbildung aber kann, wie dies Löwner<sup>4)</sup> schon gezeigt hat, durch eine Folge von beschränkten Schlitzabbildungen approximiert werden, dergestalt, daß man von einem Punkt  $P$  der Peripherie des Einheitskreises der  $w$ -Ebene bis zu einem Randpunkt  $P^*$  des Gebietes einen sonst den Rand des Gebietes vermeidenden Jordan-Kurvenschnitt (in  $|z| < 1$ ) führt und dann längs des Randes zu diesem Punkte  $P^*$  zurückschneidet. Ist  $P_n$  eine

<sup>4a)</sup>  $\bar{G}$  bedeute das abgeschlossene Gebiet  $G$ .

<sup>4)</sup> L. V. (8), S. 106.

Punktfolge auf dem Rande des Gebietes mit  $P_n \rightarrow P^*$  und zwar so, daß die Punkte  $P_n$  beim Aufschneiden des Schlitzes monoton aufeinander folgen, so nehmen wir aus dem Einheitskreis den Schlitz  $\mathfrak{S}_n$  von  $P$  bis  $P_n$  heraus; das entstehende Restgebiet  $G_n$  werde durch  $\psi_n(z)$  normiert auf den Einheitskreis abgebildet. Dann konvergieren aber die  $\psi_n(z)$  nach einem allgemein bekannten Satz von Carathéodory im Innern des Einheitskreises gleichmäßig gegen  $f(z)$  (und offenbar kann der Schlitz  $\mathfrak{S}_n$  dabei als eine beliebig oft differentiierebare Kurve angenommen werden).

2. Nun können wir aber unseren Beweis rasch zu Ende führen, wenn wir folgenden Hauptsatz von Löwner<sup>5)</sup> zu Hilfe nehmen:

**Satz 2 (Löwner).** Zu jeder beschränkten (normierten) Schlitzabbildung

$$f(z) = e^{-t_0}(z + \dots)$$

läßt sich eine stetige Funktion  $\kappa(t)$  mit  $0 \leq t \leq t_0$  und  $|\kappa| = 1$  so finden, daß mit ihrer Hilfe die Funktion als Integral  $f(z) = f(z, t_0)$  der Differentialgleichung

$$(2.1) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t) f(z, t)}{1 - \kappa(t) f(z, t)}$$

mit der Anfangsbedingung  $f(z, 0) = z$  durch Integration gewonnen werden kann.

Haben wir nämlich für unsere Funktion  $f(z)$ , welche den Einheitskreis auf ein beschränktes Schlitzgebiet (der oben beschriebenen Art) abbildet, die nach dem Satz von Löwner existierende stetige Funktion  $\kappa(t)$  gefunden, so wählen wir nun zum Zwecke der weiteren Approximation eine Treppenfunktion, welche stückweise konstant ist:

$$\kappa^{(n)}(t) = \kappa_\lambda^{(n)} (= \text{konst.}) \quad \text{für} \quad \frac{\lambda t_0}{n} \leq t \leq \frac{(\lambda + 1) t_0}{n}, \quad \lambda = 0, \dots, n - 1,$$

und zwar so, daß

$$|\kappa - \kappa^{(n)}(t)| < \varepsilon_n \quad \text{für alle} \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0).$$

Dann ist aber die Funktion  $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0}(z + \dots)$ , die wir als Lösung von (2.1) (mit der Anfangsbedingung  $f^{(n)}(z, 0) = z$ ) erhalten, wenn wir die Funktion  $\kappa(t)$  durch  $\kappa^{(n)}(t)$  ersetzen, genau von der Form einer  $n$ -ten Elementariterierten aus der Familie  $\mathfrak{S}_n$ , da für jede Funktion aus  $\mathfrak{S}_1$  die Gleichung (2.1) bei konstantem  $\kappa(t)$  besteht und auch bei der Zusammensetzung der Funktionen die Differentialgleichung (2.1) erhalten bleibt. Da aber die Koeffizienten der Entwicklung von  $f(z) = e^{-t_0}(z + b_2 z^2 + \dots)$ , wie man bei Löwner<sup>6)</sup> nachliest, durch fortgesetzte Integration aus  $\kappa(t)$  schrittweise gewonnen werden können, und, wie man dabei sieht, stetige Funktionale von  $\kappa(t)$  sind, so können wir für jedes  $m$  und  $\varepsilon^* > 0$  ein  $n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$  so finden, daß

$$(2.2) \quad |b_\mu - b_\mu^{(n)}| \leq \varepsilon^* \quad \text{ist für alle} \quad n \geq n_0, \quad \mu \leq m.$$

Die Funktionen  $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0}(z + b_2^{(n)} z^2 + \dots)$  bilden aber im Einheitskreis eine normale Folge, und es existiert daher zumindest eine im Innern des Einheitskreises gleichmäßig konvergente Teilfolge  $f^{(n^*)}(z, t_0)$ , welche dann wegen (2.2) gegen die Funktion  $f(z, t_0)$  konvergiert.

Damit haben wir den Beweis für Hauptsatz 1 zu Ende geführt. Es erscheint wünschenswert, Hauptsatz 1 direkt zu beweisen, ohne auf das Ergebnis von Löwner Bezug zu nehmen. Doch sei im Rahmen dieser Arbeit nicht darauf eingegangen.

3. *Iterationsfestigkeit.* Um beliebige (nicht notwendig beschränkte) schlichte Abbildungen (welche wir wieder normiert annehmen) zu approximieren, erinnern wir

<sup>5)</sup> L. V. (8), S. 117.

<sup>6)</sup> L. V. (8), S. 118.

uns, daß es offenbar wiederum genügt, analytisch berandete und daher beschränkte Gebiete zu approximieren und solche durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation  $w^* = \varrho w$  in das Innere des Einheitskreises zu bringen; so haben wir den Satz:

**Satz 3.** Für jede den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion  $f(z)$  gibt es eine Folge von Elementariterierten  $\Phi^{(n)} = \varrho_{(n)} g^{(n)}(z)$  mit  $g^{(n)}(z) = f_1(\dots f_n(z))$  aus der früher gekennzeichneten Familie  $\mathfrak{F}_n$ , welche im Innern des Einheitskreises gleichmäßig gegen die Funktion  $f(z)$  konvergieren.

Wollen wir also eine Eigenschaft als allen im Einheitskreis schlichten Funktionen zukommend erweisen, so reicht dazu nach diesem Satze z. B. hin, zu beweisen:

1. Sie kommt der identischen Abbildung  $w = z$  zu.
2. Wenn die Eigenschaft einer Funktion  $F(z)$  zukommt, dann auch a) der Funktion  $\varrho F(z)$  mit beliebigem  $\varrho > 0$ , sowie b) der mit einer beliebigen elementaren Schlitzabbildung Iterierten  $F(f_{(\vartheta, t)}(z))$  (und zwar genügt es hier, für beliebig kleine Werte von  $t$  den Beweis zu führen).
3. Wenn die Eigenschaft allen Funktionen einer im Innern gleichmäßig konvergenten Folge zukommt, dann auch der Grenzfunktion. (Diese dritte Eigenschaft ist bei allen Koeffizientenabschätzungen trivialerweise von selbst erfüllt.)

Um diesen Satz für Koeffizientenabschätzungen auszuwerten, gilt es also vor allem, Abschätzungen und Ungleichungen zu finden, die die Eigenschaft 2 b) besitzen, die wir kurz *Iterationsfestigkeit* nennen wollen.

Als Beispiel hierfür beweisen wir die für jede schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

seit langem bekannten Ungleichungen:

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_3 - a_2^2| \leq 1 \quad ^7).$$

Dazu genügt es lediglich, da sie für die Abbildung  $w = z$  sicher gelten und auch die Eigenschaft 2 a) erfüllen <sup>7a)</sup>, ihre Iterationsfestigkeit zu zeigen.

Wir setzen:

$$f_{(\vartheta, t)}(z) = \alpha(z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots), \quad \alpha = e^{-t}.$$

Dabei ist

$$s_2 = 2\eta(1 - \alpha), \quad s_2^2 - s_3 = \eta^2(1 - \alpha^2), \quad \eta = e^{i\vartheta},$$

und somit erhalten wir

$$F(f_{(\vartheta, t)}(z)) = \alpha(z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots)$$

mit den Koeffizienten

$$A_2 = s_2 + a_2 \alpha, \quad A_3 = s_3 + 2a_2 \alpha s_2 + a_3 \alpha^2, \\ A_2^2 - A_3 = (s_2^2 - s_3) + \alpha^2(a_2^2 - a_3).$$

Nehmen wir also nun etwa für die Funktion  $F(z)$  die Ungleichungen

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_2^2 - a_3| \leq 1$$

als richtig an, so erhalten wir für die Koeffizienten der Iterierten:

$$|A_2| = |2\eta(1 - \alpha) + a_2 \alpha| \leq 2(1 - \alpha) + |a_2| \alpha \leq 2(1 - \alpha) + 2\alpha = 2, \\ |A_2^2 - A_3| = |\eta^2(1 - \alpha^2) + \alpha^2(a_2^2 - a_3)| \leq 1 - \alpha^2 + \alpha^2 = 1,$$

womit alles gezeigt ist.

<sup>7)</sup> Vgl. L. V. (2), (25), (8), (13) u. a.

<sup>7a)</sup> — in nicht normierter Form ist in den Ungleichungen  $a_v$  durch  $\frac{a_v}{a_1}$  zu ersetzen —

Umgekehrt braucht aber eine für jede schlichte Funktion gültige Abschätzung noch keineswegs iterationsfest zu sein. Beispielsweise ist die Ungleichung  $|a_3| \leq 3$  nicht iterationsfest, d. h. es gibt Funktionen  $F(z)$  mit  $|a_3| \leq 3$ , für die die Iteration  $F(f_{(\vartheta, t)}(z)) = \alpha(z + A_2 z^2 + \dots)$  einen Koeffizienten  $A_3$  mit  $|A_3| > 3$  liefert. (Die Funktion  $F(z)$  ist dann nicht mehr schlicht.)

Wir werden im folgenden sehen, wie sich unser Satz weiter fruchtbar verwenden läßt, um neue Abschätzungen zu erhalten.

## II. Das Koeffizientenproblem im allgemeinen.

4. Die Koeffizientenbereiche und die Grundeigenschaft der Iterationskurven. Jeder in  $|z| < 1$  regulären Funktion  $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  ordnen wir im Koeffizientenraum  $a_2, a_3, \dots$  einen Punkt zu, dessen Koordinatenfolge  $(a_2, \dots, a_n, \dots)$  ist. Und ebenso wird damit in jedem endlichen Teilraum  $\mathfrak{R}^{2n-2}$  der Punkt mit den Koordinaten  $(a_2, \dots, a_n)$  der Funktion zugeordnet. Wie sieht nun der genaue Bereich im Koeffizientenraume aus, der alle und nur solche Punkte in seinem Innern oder auf dem Rande<sup>8)</sup> enthält, welche einer schlichten Funktion  $F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  zugeordnet sind? Genauer: Wir suchen für jedes  $n \geq 2$  einen (abgeschlossenen) Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  im Raum der Koordinaten  $(a_2, \dots, a_n)$  von der Eigenschaft, daß erstens für jede schlichte Funktion die Koeffizienten  $a_2, \dots, a_n$  im Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  liegen und daß es zweitens zu jedem System von  $(a_2, \dots, a_n)$  aus dem Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  eine Folge  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  derart gibt, daß die Funktion  $z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$  im Einheitskreis regulär und schlicht ist. Dann wollen wir also  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  den *genauen n-ten Variabilitätsbereich der schlichten Funktion* nennen.

Betrachten wir nun die Iteration im Koeffizientenraum etwas genauer. Halten wir die Zahl  $\eta = e^{i\vartheta}$  ( $\vartheta$  reell) zunächst einmal fest, während  $t$  beliebig positive Werte durchlaufe. Den iterierten Funktionen

$$F_t = \frac{1}{\alpha} F(f_{(\vartheta, t)}(t)) = z + A_2 z^2 + \dots \quad (\alpha = e^{-t})$$

entspricht dann bei variablem Parameter  $t$  im Koeffizientenraum die Kurve<sup>8)</sup>

$$\mathfrak{C}_\eta(P) = (A_2(t), A_3(t), \dots).$$

Ihr einer Endpunkt ist  $P = (a_2, a_3, \dots)$ , ihr anderer ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$Q = (2\eta, 3\eta^2, 4\eta^3, \dots, n\eta^{n-1}, \dots), \quad \eta = e^{i\vartheta}.$$

Zunächst stellen wir fest, daß jeder  $n$ -te Variabilitätsbereich der schlichten Funktionen auch wirklich iterationsfest ist. In der Tat gibt es zu jedem Punkt  $(a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})$  des Bereichs  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  eine in  $|z| < 1$  reguläre und schlichte Funktion:

$$f^{(0)}(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu^{(0)} z^\nu.$$

Dann ist aber auch die durch Iteration gewonnene Funktion schlicht, und dann liegen also auch die Koeffizienten  $A_2^{(0)}(t), \dots, A_n^{(0)}(t)$ ,  $t > 0$ , wieder in diesem Bereich. D. h. also, für diese besonderen Bereiche ist die oben formulierte Eigenschaft 2 b), wie auch 1), 2 a) und 3), notwendig erfüllt.

<sup>8)</sup> Wenn wir im folgenden gelegentlich von einer stetigen Kurve oder von Randpunkten eines Bereiches im Raum der unendlich vielen Veränderlichen  $a_2, a_3, \dots$  der Kürze halber sprechen, so meinen wir damit immer nur für jedes *endliche*  $n (\geq 2)$  die betreffende *Projektion* dieser Kurve oder dieses Randpunktes in den Teilraum  $(a_2, \dots, a_n)$ , nur daß dann die Betrachtung für jedes  $n \geq 2$  gilt.



5. Umgekehrt können wir schließen:

**Satz 4.** *Hat ein Bereich im Koeffizientenraum  $(a_2, \dots, a_n)$ , der den Nullpunkt enthält (siehe Eigenschaft 1)), die Eigenschaft, daß die von jedem Randpunkt  $P$  ausgehende Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  für jedes  $\eta$ ,  $|\eta| = 1$ , wenigstens ein Stück weit nirgends ins Äußere dringt, so enthält er den genauen Koeffizientenbereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  der schlichten Funktionen.*

Daß man dabei nur noch von den Randpunkten dieses Bereiches und in diesen nur noch von einem beliebig kleinen Anfangsstück der Iterationskurven zu reden braucht, ist bereits ein wichtiger Schluß. Dies zeigt sich so. Ein solcher Bereich enthält dann nämlich die von jedem inneren oder Randpunkt  $P$  ausgehende zugehörige Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  in ihrer ganzen Ausdehnung (und damit auch deren Endpunkt  $Q = (2\eta, 3\eta^2, 4\eta^3, \dots)$  für jedes  $|\eta| = 1$ , d. h. auch die Kurve  $(2e^{i\vartheta}, 3e^{2i\vartheta}, \dots)$ ,  $0 \leq \vartheta < 2\pi$ ). Nehmen wir nämlich an, daß die Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  irgendwo in das Äußere des Bereiches dringe, so können wir eine Stelle  $P'$  auf ihr finden mit kleinstmöglichem Parameterwert  $t'$ , wo sie für beliebige benachbarte Werte ins Äußere dringt. Nun aber ist die diesem Punkt  $P'$  zugeordnete Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P')$  mit demselben  $\eta$  genau das restliche Stück der Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$ , die dem Punkte  $P$  zugeordnet war, nur mit der Parameteränderung  $\tau = t - t'$ , denn es ist:

$$(5.1) \quad \boxed{F(f_{(\vartheta, t)}(f_{(\vartheta, \tau)}(z))) = F(f_{(\vartheta, t+\tau)}(z)).}$$

Diese Kurve dringt aber nach Voraussetzung über die Randeigenschaft unseres Bereiches in einer genügend kleinen Umgebung von  $P'$  sicher nicht ins Äußere, womit wir einen Widerspruch haben.

6. *Die Iterationsrichtungen und notwendige Kriterien.* Betrachten wir den Tangentenvektor an die Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  im Ausgangspunkt  $P$ . Er ist:  $\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} A_2 \right)_{t=0}, \left( \frac{\partial}{\partial t} A_3 \right)_{t=0}, \dots \right)$ . Diese Komponenten können wir aber leicht berechnen, es ist ( $A_1 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \left( \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(t) \right)_{t=0} z^\nu &= \left( \frac{\partial}{\partial t} (e^t F(f_{(\vartheta, t)}(z))) \right)_{t=0} = \left( F(f) + e^t F'(f) \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=0} \\ &= F(z) - F'(z) z \frac{1 + \eta z}{1 - \eta z}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$B_\nu = \left( \frac{\partial}{\partial t} A_\nu \right)_{t=0} = (1 - \nu) a_\nu - 2 \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \kappa a_\kappa \eta^{\nu-\kappa} \quad (a_1 = 1).$$

Die Tangente  $\mathfrak{T}_\eta(P)$  im Punkte  $P$  an die Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  hat dann die Parameterdarstellung

$$A_\nu^* = a_\nu + t B_\nu = a_\nu (1 - (\nu - 1)t) + (\nu - 1)t b_\nu, \quad \nu \geq 2,$$

worin

$$b_\nu = - \frac{2}{\nu - 1} ((\nu - 1) a_{\nu-1} \eta + (\nu - 2) a_{\nu-2} \eta^2 + \dots + 2a_2 \eta^{\nu-2} + \eta^{\nu-1})$$

ist.

(Es ist auch nützlich, gelegentlich die folgende Kurve zu betrachten, welche den Punkt  $(a_2, \dots, a_n)$  mit  $(b_1, \dots, b_n)$  verbindet und im Punkte  $P = (a_2, \dots, a_n)$  dieselbe Tangentenrichtung wie unsere Kurve  $\mathfrak{C}_\eta(P)$  aufweist:

$$A_\nu^* = a_\nu e^{-(\nu-1)t} + b_\nu (1 - e^{-(\nu-1)t}), \quad 0 < t < \infty.)$$

Als notwendiges Kriterium erhalten wir somit die Bedingung, daß in jedem Randpunkt unseres Koeffizientenbereiches jede Richtung des zweidimensionalen (Richtungs-)

Kegels

$$\mathfrak{R}^2(P) = (tB_v), \quad t > 0, \quad \eta = e^{i\theta}$$

ins Innere weist oder höchstens die Randfläche tangiert <sup>9)</sup>.

7. Die beschränkten schlichten Funktionen. Sei  $s(z) = \alpha(z + a_2z^2 + \dots)$  eine in  $|z| < 1$  reguläre Funktion, welche dort schlicht und beschränkt (d. h. ihrem absoluten Betrag nach kleiner als 1) ist, und es sei wiederum  $\alpha$  reell positiv normiert, also  $0 < \alpha \leq 1$ . Alle Punkte  $(\alpha, a_2, \dots, a_n)$ , zu denen es eine in  $|z| < 1$  reguläre schlichte und beschränkte Funktion  $s(z) = \alpha(z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots)$  gibt, bilden eine gewisse Punktmenge  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}$  im Raum dieser Koordinaten. Ihre Teilmenge für  $\alpha = \text{const}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , ist abgeschlossen; wir wollen diese Teilmenge, im Raum der  $(a_2, \dots, a_n)$  gedeutet, mit  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}(\alpha)$  bezeichnen. Das Koeffizientenproblem der schlichten beschränkten Funktionen besteht in der Bestimmung der  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte der  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}(\alpha)$ ,  $n$  fest, für  $\alpha \rightarrow 0$  — im Raum der  $(a_2, \dots, a_n)$  gedeutet — mit  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}(0)$ , so ist, wie man sofort erkennt,

$$\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}(0) = \mathfrak{B}_z^{(n)}, \quad n = 2, \dots$$

Einen weiteren Aufschluß über die Lage dieser  $\mathfrak{B}_{bb}^{(n)}$  erhalten wir aus den folgenden zwei Sätzen.

**Satz 5.** Zu jeder in  $|z| < 1$  regulären schlichten beschränkten Funktion  $s(z) = \alpha(z + a_2z^2 + \dots)$  gibt es eine (eindeutig bestimmte) in  $|z| < 1$  reguläre schlichte Funktion  $S(z) = z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$  so, daß für alle  $|z| < 1$  gilt:

$$(7.1) \quad S(s(z)) = \alpha S(z).$$

*Vorbemerkung.* Diese Gleichung ist als *Schrödersche Funktionalgleichung* bekannt. Wir brauchen übrigens in diesem Satze  $\alpha$  nicht als normiert vorauszusetzen, es sei also lediglich  $0 < |\alpha| \leq 1$ .

*Beweis.* Ist  $|\alpha| = 1$ , so ist  $s(z) = e^{i\theta}z$ ,  $S(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}S(z)$ , d. h.  $S(z) = z$ , und der Satz trivialerweise richtig. Sei also  $0 < |\alpha| < 1$ , dann weiß man <sup>10)</sup>, daß es genau eine in einem gewissen Kreis  $|z| < \varrho$  reguläre Funktion  $S(z) = z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$  gibt, welche in  $|z| < \varrho$  der Schröderschen Funktionalgleichung  $s(z) = S^{-1}(\alpha S(z))$  genügt. (Ihre Koeffizienten  $A_2, A_3, \dots$  lassen sich übrigens rekurrent aus dieser Gleichung berechnen.) Bilden wir die in  $|z| < 1$  regulären und schlichten Funktionen:

$$s_1(z) = \frac{1}{\alpha} s(z), \quad s_2(z) = \frac{1}{\alpha} s_1(s(z)) = \frac{1}{\alpha^2} s(s(z)), \dots,$$

$$s_k(z) = \frac{1}{\alpha} s_{k-1}(s(z)), \quad k = 2, \dots,$$

so ist nach dem Schwarzschen Lemma  $|s(z)| < \varrho$  in  $|z| < \varrho$ , und daher hat man die in  $|z| < \varrho$  gültige Darstellung:

$$s_k(z) = \frac{1}{\alpha^k} S^{-1}(\alpha^k S(z)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Differenzieren wir nach  $z$ , so folgt:

$$s'_k(z) = S^{-1'}(\alpha^k S(z)) \cdot S'(z).$$

Hieraus erkennen wir, daß für jedes  $z$  in  $|z| < \varrho$  die Folge der Funktionen  $s'_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , gegen  $S'(z)$  konvergiert und zwar gleichmäßig in  $|z| \leq \varrho'$  für

<sup>9)</sup> Vgl. hierzu Nr. 11.

<sup>10)</sup> L. V. (17a).

beliebiges  $\varrho' < \varrho$ . Hieraus folgt, daß die  $s_k(z)$  in  $|z| < \varrho'$  für jedes  $\varrho' < \varrho$  gleichmäßig gegen die Funktion  $S(z)$  konvergieren. Jede in  $|z| < 1$  konvergente Teilfolge der (schlichten) Funktionen  $s_k(z)$  konvergiert also in jedem Kreis  $|z| \leq r$  mit beliebigem  $r < 1$  gleichmäßig gegen ein und dieselbe in  $|z| < 1$  reguläre und schlichte Funktion  $S^*(z)$ , welche in  $|z| < \varrho$  mit  $S(z)$  übereinstimmt.

Weil aber die  $s_k(z) = z + \dots$  in  $|z| < 1$  eine normale Familie bilden, so folgt hieraus: Die Folge  $s_k(z)$  konvergiert in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von  $|z| < 1$  gleichmäßig gegen eine in  $|z| < 1$  reguläre und schlichte Funktion  $S^*(z)$ , welche in  $|z| < \varrho$  mit  $S(z)$  übereinstimmt und deswegen die Gleichung  $S^*(s(z)) - \alpha S^*(z) = 0$  in  $|z| < \varrho$  und damit auch in  $|z| < 1$  erfüllt. Damit ist der Satz 5 bewiesen.

8. Wie wir schon sagten, lassen sich die Koeffizienten von  $S(z)$  der Reihe nach berechnen. Man erhält durch Koeffizientenvergleichung aus der Gleichung (7.1):

$$(8.1) \quad \begin{aligned} A_2 &= \frac{a_2}{1-\alpha}, & A_3 &= \frac{a_3}{1-\alpha^2} + \frac{2\alpha a_2^2}{(1-\alpha^2)(1-\alpha)}, \\ A_4 &= \frac{a_4}{1-\alpha^3} + \frac{a_3 a_2 \alpha (2+5\alpha)}{(1-\alpha^3)(1-\alpha^2)} + \frac{a_2^3 \alpha (1+5\alpha^2)}{(1-\alpha^3)(1-\alpha^2)(1-\alpha)} \end{aligned}$$

usw., allgemein:

$$A_n = A_n(\alpha, a_2, \dots, a_n).$$

Damit haben wir den

**Satz 6.** Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{U}^{(n)}(\alpha)$  den Bereich im Raum der  $(a_2, \dots, a_n)$ , der durch die Bedingung

$$(A_2(\alpha, a_2), A_3(\alpha, a_2, a_3), \dots, A_n(\alpha, a_2, \dots, a_n)) \text{ in } \mathfrak{B}_s^{(n)}$$

definiert ist, so gilt

$$\boxed{\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha) \subseteq \mathfrak{U}^{(n)}(\alpha)}.$$

Für  $n = 2$  folgt hiernach aus  $|A_2| \leq 2$ , daß  $|a_2| \leq 2(1-\alpha)$  ist für jede in  $|z| < 1$  reguläre beschränkte schlichte Funktion  $\alpha(z + a_2 z^2 + \dots)$ . Da die elementaren Schlitzabbildungen hierin für jedes  $\alpha$  das Gleichheitszeichen liefern, so gilt:  $\mathfrak{B}_{sb}^{(2)}(\alpha) = \mathfrak{U}^{(2)}(\alpha)$ , d. h. der genaue Bereich  $\mathfrak{B}_{sb}^{(2)}$  ist  $|a_2| \leq 2(1-\alpha)$ , ein seit langem bekanntes, von Pick und Löwner gefundenes Ergebnis. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß die Bereiche  $\mathfrak{B}_{sb}^{(n)}(\alpha)$  und  $\mathfrak{U}^{(n)}(\alpha)$  für  $n > 2$ , z. B. für  $n = 3$ , noch übereinstimmen, doch bleibt dies vorläufig noch unentschieden.

### III. Zusammenhang mit dem Problem der Koeffizienten einer sternförmigen Funktion.

9. *Grundeigenschaft gewisser sternförmig beschränkter Funktionen.* Die Eigenschaft (5.1) ist direkt zu ersehen aus der für jede elementare Schlitzabbildung  $w = f_{(\vartheta, t)}(z)$  bestehenden Beziehung:

$$(9.1) \quad \frac{w}{(1+\eta w)^2} = e^{-t} \frac{z}{(1+\eta z)^2}, \quad \eta = e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \text{ reell.}$$

Schreiben wir  $G_\eta(z) = \frac{z}{(1+\eta z)^2}$ , so ist also  $f_{(\vartheta, t)}(z) = G_\eta^{-1}(e^{-t} G_\eta(z))$  und daher

$$f_{(\vartheta, t_1)}(f_{(\vartheta, t_2)}(z)) = G_\eta^{-1}(e^{-t_1} G_\eta(G_\eta^{-1}(e^{-t_2} G_\eta(z)))) = G_\eta^{-1}(e^{-(t_1+t_2)} G_\eta(z)) = f_{\vartheta, t_1+t_2}(z).$$

Die Eigenschaft kommt also, wie man hieraus ersieht, auf jeden Fall solchen Funktionen zu, welche in der Form

$$(9.2) \quad g(z) = G^{-1}(e^{-t} G(z))$$

darstellbar sind, worin  $G(z)$  eine im Einheitskreis reguläre Funktion bedeutet.

Benützen wir zur Iteration eine beliebige schlichte beschränkte Funktion  $s(z) = e^{-t}(z + a_2 z^2 + \dots)$ , so wissen wir aus Satz 5, daß  $s(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$  ist mit einer gewissen in  $|z| < 1$  regulären schlichten Funktion  $S(z)$ . Soll aber die so gewonnene Funktion  $S(z)$  für jedes  $t > 0$  (es würde hier genügen, zu sagen, für jedes genügend kleine  $t > 0$ ) eine in  $|z| < 1$  reguläre beschränkte (schlichte) Funktion  $s_t(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$  liefern, so folgt, daß  $S(z)$  den Einheitskreis auf ein sternförmiges Gebiet abbildet, daß also  $S(z)$  eine sternförmige Funktion ist.

Die Funktion  $s(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z)) = e^{-t}z + \dots$  ist dann für jedes  $t > 0$  eine in  $|z| < 1$  (reguläre) sternförmige, beschränkte und damit immer auch schlichte Funktion <sup>11)</sup>.

**10. Haupteigenschaft des  $n$ -ten Variabilitätsbereiches der Koeffizienten einer schlichten Funktion.** Es sei  $S(z) = z + s_2 z^2 + \dots$  eine beliebige im Einheitskreis reguläre sternförmige Funktion. Mit ihrer Hilfe bilden wir für eine vorgegebene schlichte Funktion  $F(z) = z + b_2 z^2 + \dots$  die durch Iteration entstehende und wiederum normierte Funktion:

$$(10.1) \quad F_t^*(z) = e^t F(S^{-1}(e^{-t}S(z))) = z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots$$

Sie ist ebenfalls wieder schlicht und regulär im Einheitskreis. Schreiben wir:

$$A(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z)) = \alpha(z + a_2 z^2 + \dots), \quad \alpha = e^{-t},$$

mit

$$(10.2) \quad \begin{aligned} a_2 &= s_2(1 - \alpha), \\ a_3 &= s_3(1 - \alpha^2) - 2s_2^2\alpha(1 - \alpha), \\ a_4 &= s_4(1 - \alpha^3) - s_2 s_3 \alpha(1 - \alpha)(2 + 5\alpha) - s_2^3 \alpha(1 - \alpha)(1 - 5\alpha), \\ &\dots \end{aligned}$$

so erhalten wir z. B.:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} B_2 &= a_2 + b_2 \alpha, \\ B_3 &= a_3 + 2b_2 \alpha a_2 + b_3 \alpha^2, \\ B_4 &= a_4 + 2b_2 \alpha a_3 + b_2 \alpha a_2^2 + 3b_3 \alpha^2 a_2 + b_4 \alpha^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} B_2 &= s_2(1 - \alpha) + b_2 \alpha, \\ B_3 &= s_3(1 - \alpha^2) - 2s_2^2 \alpha(1 - \alpha) + 2\alpha b_2 s_2(1 - \alpha) + \alpha^2 b_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein:

$$B_n = \varphi_n(t; b_2, \dots, b_n; s_2, \dots, s_n) = \varphi_n(t; (b); (s)); \quad \alpha = e^{-t}.$$

(Wir schreiben kurz:  $(b) = (b_2, \dots, b_n)$ ,  $(s) = (s_2, \dots, s_n)$ .)

Halten wir die Systeme  $(b)$  und  $(s)$  fest, so haben wir damit (bei variablem Parameter  $t$ ,  $0 < t < \infty$ ) im  $n$ -ten Koeffizientenraum  $\mathfrak{R}^{2n-2}$  eine Kurve  $\mathfrak{C}_{(b), (s)}(t)$ , welche den Punkt  $(b)$  (für  $t = 0$ ) mit dem Punkt  $(s)$  (für  $t = \infty$ , d. h.  $\alpha = 0$ ) verbindet. Letzteres sieht man so ein. Es ist

$$\frac{d}{dz} F^*(z) = F^{*'}(z) = F'(S^{-1}(\alpha S(z))) \cdot S^{-1}'(\alpha S(z)) \cdot S'(z),$$

<sup>11)</sup> Verlangt man, daß  $S^{-1}(a^{-t}S(z))$ ,  $|a| < 1$ ,  $a$  nichtreelle feste Zahl, für beliebig kleines  $t > 0$  wieder in  $|z| < 1$  regulär und beschränkt ist, so ist  $S(z)$  eine spiralförmig abbildende Funktion (vgl. hierzu: L. V. (29), S. 12). Doch seien diese hier nicht weiter betrachtet. Sie liefern auch für unsere späteren Betrachtungen des Iterationsprozesses im Endeffekt nichts Neues.

und dies strebt für  $\alpha \rightarrow 0$  gegen  $1 \cdot 1 \cdot S'(z)$ ; daher gilt:

$$F^*(z) = z + \dots \rightarrow S(z) \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

11. Stellen wir noch den Tangentenvektor an die Kurve  $\mathfrak{C}_{(b), (s)}(t)$  im Punkte  $P = (b)$  auf. Er hat die Komponenten:

$$\left(\frac{d}{dt} \varphi_j\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} (B_j)\right)_{t=0} \quad (j = 2, \dots, n).$$

Es ist:

$$\begin{aligned} (11.1) \quad \sum_1^{\infty} \left(\frac{d}{dt} B_n\right)_{t=0} z^n &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (e^t F(S^{-1}(e^{-t} S(z))))\right]_{t=0} \quad (B_1 = 1) \\ &= [e^t F(S^{-1}(e^{-t} S)) - e^t F'(S^{-1}(e^{-t} S)) S^{-1'}(e^{-t} S) e^{-t} S]_{t=0} \\ &= F(z) - F'(z) \frac{S(z)}{S'(z)}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $\frac{S}{S'} = z(1 + 2\Sigma\sigma_\nu z^{\nu-1})$ , so ist

$$\begin{aligned} (11.2) \quad \sum_1^{\infty} \left(\frac{d}{dt} B_n\right)_{t=0} z^n &= \sum_1^{\infty} z^n \left(- (n-1) b_n - 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu b_\nu \sigma_{n+1-\nu}\right) \quad (b_1 = 1) \\ &= z^2(-b_2 - 2\sigma_2) + z^3(-2b_3 - 4b_2\sigma_2 - 2\sigma_3) \\ &+ z^4(-3b_4 - 6b_3\sigma_2 - 4b_2\sigma_3 - 2\sigma_4) + \dots \end{aligned}$$

Damit haben wir:

**Satz 7.** Für den genauen Variabilitätsbereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  gilt: Mit jedem Punkt  $P$  in ihm gehört auch die von ihm ausgehende Kurve  $\mathfrak{C}_{(b), (s)}(t)$  in ihrer Gesamtausdehnung dazu, sofern der Punkt  $(s) = (s_2, \dots, s_n)$  sich im genauen  $n$ -ten Variabilitätsbereich der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen befindet. Der Richtungsvektor  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  mit

$$\xi_k = - (k-1) b_k - 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} \nu b_\nu \sigma_{k+1-\nu}$$

weist in keinem Randpunkt von  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  ins Äußere.

Dabei müssen wir noch näher erklären, was es heiße, daß eine Richtung in einem Randpunkt ins Äußere weist. Zwar sehen wir leicht aus der eben erwähnten Eigenschaft, daß von jedem Punkt des abgeschlossenen Bereiches  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  ein Bündel von Kurven zu gewissen Punkten im Inneren führt, daß der Rand unseres Bereiches in der Umgebung jedes Randpunktes aus einem  $(2n-3)$ -dimensionalen Jordanschen Flächenstück besteht. Daß dieses aber in jedem Punkte (der nicht auf der Normkurve liegt) stetig differenzierbar ist, wissen wir noch nicht. Daher wollen wir sagen, eine Halbgerade vom Randpunkt  $P$  aus bestimme eine innere bzw. äußere Richtung für die Randfläche in  $P$ , wenn es eine Richtungsumgebung für sie so gibt, daß die zugehörigen Halbgeraden von  $P$  aus in einer gewissen Vollumgebung nur innere bzw. äußere Punkte enthalten. Eine Richtung, welche zwar selbst nicht innere bzw. äußere Richtung für die Randfläche in  $P$  ist, jedoch noch Häufungsrichtung von solchen ist, nennen wir eine von innen bzw. außen tangierende Richtung.

Jeder Richtungsvektor  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  der obigen Form weist also in diesem Sinne ins Innere oder tangiert höchstens von innen.

Dabei berechnen sich die  $\sigma_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ , aus den  $s_2, \dots, s_n$ . Die  $\xi_k$  hängen dann also nicht mehr linear von den  $s_2, \dots, s_k$  ab. Wir wollen durch eine Transformation des Koordinatenraumes diese Richtungsvektoren der Iterationskurven in ihren Komponenten linearisieren, d. h. einen solchen Koordinatenraum finden, in dem die betreffenden  $\tilde{\xi}_k$

bilineare Funktionen der neuen Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes der Iterationskurven sind. Der neue Raum  $\tilde{\mathfrak{R}}$  wird uns für unser Problem eine gewisse Symmetrie liefern, welche für die weiteren Untersuchungen von Wert sein dürfte. Die Formel (11. 1) wird uns dabei einen Fingerzeig geben.

Bevor wir uns der weiteren Untersuchung der iterationsfesten Bereiche widmen, wollen wir kurz auf die sternförmigen Funktionen eingehen.

12. Kennzeichnung der genauen Koeffizientenbereiche der im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen.

Für jede im Einheitskreis reguläre sternförmige Funktion  $S(z) = z + s_2 z^2 + \dots$  gilt:  $\Re \frac{f'z}{f} > 0$  in  $|z| < 1$ . Es erweist sich im folgenden besonders zweckmäßig, für die nähere Untersuchung der Koeffizientenbereiche zu einem anderen Koordinatenraum  $\tilde{\mathfrak{R}}$  überzugehen. Wir wollen hinfort für irgendeine in  $|z| < 1$  reguläre Funktion  $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$  mit  $f'(z) \neq 0$  in  $|z| < 1$ , die Funktion

$$\frac{f}{f'} = z + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_{\nu} z^{\nu}$$

bilden und daraus jeweils den zugeordneten Punkt im Koordinatenraum  $\tilde{\mathfrak{R}}$

$$(\beta) = (\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n) \text{ für alle } n$$

entnehmen. Die neuen Koordinaten stehen mit den alten in den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\frac{b_2}{2}, \\ \beta_3 &= -b_3 + b_2^2, \\ (12. 1) \quad \beta_4 &= +\frac{1}{2} (-3b_4 + 7b_2 b_3 - 4b_2^3), \\ \beta_5 &= \frac{1}{2} (-4b_5 + 10b_2 b_4 - 20b_2^2 b_3 + 6b_2^3 + 8b_2^4), \\ &\dots \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist im folgenden Sinn eindeutig umkehrbar: Erstens lassen sich aus den  $\beta_2, \dots, \beta_n, \dots$  wieder eindeutig die  $b_2, b_3, \dots$  berechnen:

$$\begin{aligned} (12. 2) \quad b_2 &= -2\beta_2, \\ b_3 &= 4\beta_2^2 - \beta_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

und zweitens ist für jede in  $|z| < 1$  reguläre und dort nirgends verschwindende Funktion

$$\Phi(z) = 1 + 2(\beta_2 z + \beta_3 z^2 + \dots)$$

die Funktion

$$F = z e^{\int \frac{1-\Phi}{\Phi z} dz} = z + b_2 z^2 + \dots,$$

wie man sofort erkennt, in  $|z| < 1$  regulär, dort von nicht verschwindender Ableitung und erfüllt die Beziehung

$$\frac{F}{F'} = \Phi \cdot z = z + 2(\beta_2 z^2 + \dots).$$

Entsprechend haben wir also auch (es ist ja  $S' \neq 0$  in  $|z| < 1$ ):

$$\begin{aligned} (12. 3) \quad \frac{S}{S'} &= z + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \sigma_{\nu} z^{\nu}, \\ \sigma_2 &= -\frac{s_2}{2}, \quad \sigma_3 = -s_3 + s_2^2, \dots \quad (\text{analog zu (12. 1)}). \end{aligned}$$

Nun ist aber bekannt<sup>12)</sup>, daß für die Funktion  $\frac{1}{2} \frac{S}{S'z} = \frac{1}{2} + \sum_2^{\infty} \sigma_n z^{n-1}$ , deren Realteil ja nach dem eben Erwähnten ebenfalls wie  $\Re \frac{S'z}{S}$  im Innern des Einheitskreises positiv ist, im  $n$ -ten Koeffizientenraum  $\tilde{\mathfrak{R}}^{2n-2}$  der Punkt mit den Koordinaten  $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$  im kleinsten konvexen Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  gelegen ist, der die Normkurve

$$(12. 4) \quad \sigma_2 = e^{i\theta}, \quad \sigma_3 = e^{2i\theta}, \quad \dots, \quad \sigma_n = e^{(n-1)i\theta}$$

enthält.

Umgekehrt ist die Funktion  $S_0 = \frac{z}{(1 + \eta z)^2}$ ,  $\eta = e^{i\theta}$ , in  $|z| < 1$  sternförmig.

Für sie gilt

$$\frac{1}{2} \frac{S}{S'z} = \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \eta^v z^v.$$

Außerdem ist mit je  $p$  vorgegebenen Funktionen

$$S_1(z) = z + \dots, \quad \dots, \quad S_p(z) = z + \dots,$$

welche in  $|z| < 1$  regulär und sternförmig sind, auch die Funktion  $S^*(z) = z + \dots$  regulär und sternförmig, für welche die Beziehung besteht:

$$(12. 5) \quad \Phi(z) = \frac{S^*}{S^{*'}z} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{S_j}{S_j'z}$$

mit beliebigen  $\lambda_j$ , für welche  $\sum_1^p \lambda_j = 1$ ,  $\lambda_j \geq 0$ , für alle  $1 \leq j \leq p$  gilt. Denn erstens ist  $\Phi(z) = 1 + \beta_2^* z + \dots \neq 0$  in  $|z| < 1$ , und daher erhalten wir der Reihe nach als sämtlich in  $|z| < 1$  reguläre Funktionen

$$\frac{S^{*'}(z) \cdot z}{S^*(z)} = \frac{1}{1 + \beta_2^* z + \dots} = 1 - \beta_2^* z + \dots$$

und mit ihr auch

$$\left( \frac{S^{*'}(z) \cdot z}{S^*(z)} - 1 \right) \frac{1}{z} = -\beta_2^* + \gamma z + \dots,$$

$$\log \frac{S^*}{z} = \int_0^z \left( \log \frac{S^*}{z} \right)' dz = \int_0^z \left( \frac{S^{*'}}{S^*} - \frac{1}{z} \right) dz = \int_0^z \frac{1 - \Phi}{\Phi z} dz$$

und schließlich

$$S^* = z e^{\int_0^z \frac{1 - \Phi}{\Phi z} dz}.$$

Andererseits ist

$$\Re \frac{S^*}{S^{*'}z} = \sum_1^p \lambda_j \Re \frac{S_j}{S_j'z} > 0 \quad \text{in } |z| < 1.$$

Eine solche Funktion ist aber dann auch im Einheitskreis schlicht und sternförmig.

Da sich aber nun<sup>13)</sup> für jeden Punkt  $P_0$  im Innern und auf dem Rande von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$   $n$  Punkte auf der Normkurve  $P^{(j)} = (e^{i\theta_j}, e^{2i\theta_j}, \dots)$  und dazu gehörige Gewichte

<sup>12)</sup> L. V. (6).

<sup>13)</sup> L. V. (6), S. 11.

$\lambda_j \geq 0, \Sigma \lambda_j = 1$ , so angeben lassen, daß  $P_0$  Schwerpunkt dieser auf die  $n$  Punkte verteilten Massen ist, so erkennen wir, daß es zu jedem Punkt  $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$  im Innern oder auf dem Rande von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  eine Funktion  $S(z) = z + \dots$  gibt, welche im Einheitskreis regulär, schlicht und sternförmig ist und deren Entwicklung in  $z=0$  so beginnt:

$$S(z) = z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots \quad \text{mit} \quad \frac{S}{S'} = z + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \sigma_{\nu} z^{\nu},$$

d. h. aber, die konvexe Hülle  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  von (12.4) ist der genaue  $n$ -te Variabilitätsbereich für die im Einheitskreis regulären und sternförmigen Funktionen.

Es ist  $\mathfrak{B}_*^{(\nu)}$  durch die Ungleichungen gegeben:

$$(12.6) \quad \begin{aligned} |\sigma_2| &\leq 1 && \text{für} \quad \nu = 2, \\ |\sigma_3 - \sigma_2^2| &\leq 1 - |\sigma_2|^2 && \text{für} \quad \nu = 3, \\ |\sigma_4(1 - |\sigma_2|^2) - 2\sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^3 + \bar{\sigma}_2\sigma_3^2| &\leq (1 - |\sigma_2|^2)^2 - |\sigma_3 - \sigma_2^2|^2 && \text{für} \quad \nu = 4, \end{aligned}$$

allgemein (für  $\nu = n$ )<sup>14)</sup>:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \bar{\sigma}_2 & 1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \bar{\sigma}_3 & \bar{\sigma}_2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\sigma}_n & \dots & \bar{\sigma}_2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

oder im ursprünglichen Koordinatenraum:

$$|s_2| \leq 2, \quad |3s_2^2 - 4s_3| \leq 4 - |s_2|^2, \quad \text{usw.}$$

13. Sei nun  $\mathfrak{B}_0^{(n)}$  irgendein iterationsfester Bereich in  $\mathfrak{R}^{2n-2}$ . Wir gehen zu den Koordinaten des Raumes  $\tilde{\mathfrak{R}}$  über. In diesem schreibt sich die Iteration wie folgt:

$$(13.1) \quad \begin{aligned} \frac{F^*}{F^{*'}z} &= 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} X_n z^{n-1}, & \frac{F}{F'z} &= 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n z^{n-1}, & \frac{S}{S'z} &= 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n z^{n-1}, \\ X_2 &= \beta_2 \alpha + \sigma_2(1 - \alpha), \\ X_3 &= \beta_3 \alpha^2 + \sigma_3(1 - \alpha^2), \\ X_4 &= \beta_4 \alpha^3 - 2\beta_3 \sigma_2 \alpha^2(1 - \alpha) + \beta_2 \sigma_3 \alpha(1 - \alpha)^2 + \sigma_4(1 - \alpha^3), \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein

$$X_n = X_n(t; (\beta), (\sigma)); \quad \alpha = e^{-t}, \quad (\beta) = (\beta_2, \dots, \beta_n), \quad (\sigma) = (\sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Im  $\tilde{\mathfrak{R}}^{2n-2}$  verbindet die Kurve

$$(13.2) \quad \mathfrak{C}_{(\beta), (\sigma)}(t) = (X_2(t), \dots, X_n(t))$$

den Punkt  $(\beta)$  ( $t = 0$ ) mit  $(\sigma)$  ( $t = \infty$ ). Wie man sieht, ist sie eine Kurve von höchstens  $n$ -ter Ordnung — man betrachte dazu den Parameter  $\alpha$  — und im allgemeinen auch von genau  $n$ -ter Ordnung, und liegt jeweils sicher in einem  $(2n - 4)$ -dimensionalen ebenen Teilraum. Ihre Ordnung kann sich allerdings auch erniedrigen. (Beispiel:  $n = 3$ ,  $(\beta) = (1, 1)$ ,  $(\sigma) = (1, -1)$ .) Berechnen wir den Tangentenvektor der Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta), (\sigma)}(t)$  im Punkte  $P = (\beta)$ . Seine  $j$ -te Komponente ist

$$\omega_j(P) = \left( \frac{d}{dt} X_j(t) \right)_{t=0}.$$

<sup>14)</sup> L. V. (6), S. 17ff.



Wir finden für  $\Phi^* = \frac{F^*}{F'^*}$ ,  $\Phi = \frac{F}{F'}$ :

$$(13.3) \quad \frac{d}{dt} \Phi^*(z) = \frac{d}{dt} \frac{F(\varphi)}{F'(\varphi) \varphi'} = \left(\frac{F}{F'}\right)' \frac{1}{\varphi'} \frac{d}{dt} \varphi - \frac{F}{F'} \frac{1}{\varphi'^2} \frac{d}{dt} \varphi'.$$

Für  $\varphi(z) = S^{-1}(\alpha S)$ ,  $\alpha = e^{-t}$ , ist aber

$$(13.4) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -S^{-1'}(e^{-t}S) e^{-t}S, \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{S}{S'},$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi' = S^{-1'}(\alpha S) \alpha S',$$

$$\frac{d}{dt} \varphi' = -S^{-1''}(\alpha S) \alpha^2 S' S - S^{-1'}(\alpha S) \alpha S',$$

$$(13.5) \quad \left(\frac{d}{dt} \varphi'\right)_{t=0} = -S^{-1''}(S) S' \cdot S - S^{-1'}(S) S';$$

wegen der Beziehungen  $S^{-1}(S) = z$ ,  $S^{-1'}(S) S' = 1$ ,  $-S^{-1''}(S) S'^2 = \frac{S''}{S'}$  folgt:

$$(13.6) \quad \left(\frac{d}{dt} \varphi'\right)_{t=0} = \frac{SS''}{S'^2} - 1 = -\left(\frac{S}{S'}\right)'.$$

Daher erhalten wir:

$$(13.7) \quad 2 \sum_2^{\infty} \left(\frac{d}{dt} X_n(t)\right)_{t=0} z^n = \left(\frac{d}{dt} \Phi^*(z)\right)_{t=0} = -\left(\frac{F}{F'}\right)' \frac{S}{S'} + \frac{F}{F'} \left(\frac{S}{S'}\right)'$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_2^{\infty} \left(\frac{d}{dt} X_n(t)\right)_{t=0} z^n = & - [(\beta_2 - \sigma_2) z^2 + 2(\beta_3 - \sigma_3) z^3 + 3(\beta_4 - \sigma_4 + 2\beta_3\sigma_2 - 2\sigma_3\beta_2) z^4 \\ & + 4(\beta_5 - \sigma_5 + \beta_4\sigma_2 - \beta_2\sigma_4) z^5 + \dots \\ & + ((n-1)(\beta_n - \sigma_n) + 2 \sum_{\nu=2}^{n-1} (2\nu - n - 1) \beta_{\nu} \sigma_{n+1-\nu}) z^n + \dots], \end{aligned}$$

hieraus:

$$(13.8) \quad \omega_n \equiv \left(\frac{d}{dt} X_n(t)\right)_{t=0} = -[(n-1)(\beta_n - \sigma_n) + 2 \sum_{\nu=2}^{n-1} (2\nu - n - 1) \beta_{\nu} \sigma_{n+1-\nu}].$$

14. *Vorbereitung des Hauptsatzes 10.* Hieraus erkennt man (wegen der Linearität des Ausdruckes  $\omega_n$  in den  $\sigma_j$ ), daß das Richtungsbüschel  $\mathfrak{B}(\beta) = (\omega_j(\beta))$  der von dem einen Punkt  $(\beta)$  ausgehenden Kurven  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ , wenn  $(\sigma)$  beliebig im Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  variiert, das kleinste konvexe Richtungsbüschel ist, das den bereits früher erwähnten zweidimensionalen Richtungskegel  $\mathfrak{R}^2(P)$  umfaßt. Wir erhalten also als notwendiges Kriterium für einen iterationsfesten Bereich, wenn wir uns der Erklärungen auf S. 72 erinnern:

**Satz 8.** *In jedem Randpunkt  $P = (\beta)$  eines iterationsfesten Bereiches weist keine Richtung des  $(2n-3)$ -dimensionalen Richtungskegels  $\mathfrak{R}^{2n-3}(P)$ , der das Richtungsvollbüschel  $\mathfrak{B}(\beta)$  berandet, ins Äußere des Bereiches.*

Auf der anderen Seite haben wir das hinreichende Kriterium:

**Satz 9.** *Es habe ein Bereich im  $\mathfrak{R}^{2n-2}$  die Eigenschaft, daß in jedem Randpunkt  $P = (\beta)$  alle von ihm ausgehenden Kurven (13.1)  $X_j = X_j(t; (\beta), (\sigma))$ , die auf dem Rande des von  $(\beta)$  zu allen Punkten von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  hinführenden Kurvenbüschels liegen<sup>15)</sup>, nirgends in*

<sup>15)</sup> d. h. also alle „ $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  von  $(\beta)$  umhüllenden“ Iterationskurven.

einer gewissen Umgebung ins Äußere dringen. Dann ist der Bereich iterationsfest und enthält den Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  der schlichten Funktionen.

In der Tat sind nämlich dann insbesondere die Kurven  $\mathfrak{C}_\eta(P)$ , die von  $P$  ausgehen, für jedes  $\eta = e^{i\theta}$  in einer gewissen Umgebung ebenfalls im Innern oder höchstens auf dem Rande gelegen, weil sie ja auch unter den Kurven  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  vorkommen und all diese von den im Satz angegebenen umhüllt werden. Damit ist aber auch dieses hinreichende Kriterium bewiesen.

Im übrigen sehen wir genau wie früher auf direktem Wege (obwohl wir hier nicht mehr eigens nötig haben, es direkt herzuleiten): auch keine Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  dringt irgendwo in ihrem Gesamtverlauf ins Äußere des Bereiches, wenn nur ihr Anfangspunkt nicht im Äußeren liegt. Dies folgt wieder genau so aus der für die Funktion  $g_{(\sigma),t}(z) = S^{-1}(e^{-t}S(z))$  bestehenden funktionalen Beziehung:

$$(14. 1) \quad g_{(\sigma),t_1}(g_{(\sigma),t_2}(z)) = g_{(\sigma),t_1+t_2}(z).$$

15. *Der Hauptsatz 10.* Nun mögen irgend zwei Bereiche im  $\mathfrak{R}^{2n-2}$  der Koordinaten  $(\beta_2, \dots, \beta_n)$  vorgegeben sein, welche die eben in Satz 9 erwähnte Eigenschaft haben, daß die von jedem Randpunkt ausgehende Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  bei beliebig im Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  variierendem Endpunkt  $(\sigma)$  in einer gewissen Umgebung wenigstens nirgends ins Äußere dringt, dann kommt diese Eigenschaft auch dem Durchschnittsbereich der beiden Bereiche zu. Wir können dies ebenso für beliebig endlich oder abzählbar unendlich viele Bereiche aussprechen und erhalten so das Ergebnis:

**Satz 10** (*Haupteigenschaft des Bereiches  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$* ). *Der genaue  $n$ -te Variabilitätsbereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  der Koeffizienten der im Einheitskreis regulären und schlichten Funktionen ist der kleinste den Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  enthaltende Bereich mit der Randeigenschaft, daß kein beliebig kleines Anfangskurvenstück des jedem Randpunkt  $P$  zugeordneten Kurvenbüschels  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  mit beliebig variierendem Endpunkt  $(\sigma) \in \mathfrak{B}_*^{(n)}$  ins Äußere dringt.*

Übrigens bleibt Satz 10 richtig, wenn wir nur das Kurvenbüschel  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  mit beliebig auf der Normkurve variierendem Endpunkt  $(\sigma)$  verwenden (d. h. in ihm „ $(\sigma) \in \mathfrak{B}_*^{(n)}$ “ durch die Worte „ $(\sigma)$  auf der Normkurve“ ersetzen).

Wir können sogar sagen:

**Satz 11.** *Zu jedem Randpunkt  $P(\beta)$  von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  gibt es sogar eine Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  mit einem gewissen Endpunkt  $(\sigma) \in \mathfrak{B}_*^{(n)}$  und eine Randpunktfolge  $P_\nu \rightarrow P$ , so daß gewisse jeweils in  $P_\nu$  von innen tangierende Richtungsvektoren  $\mathfrak{B}_\nu$  des Randes gegen die Tangente der Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  in  $P$  konvergieren.*

Wir bemerken, daß auch Satz 11 richtig bleibt, wenn wir an Stelle von „ $(\sigma) \in \mathfrak{B}_*^{(n)}$ “ die Forderung setzen: „ $(\sigma)$  auf der Normkurve“. Der nachfolgende Beweis gilt hierfür nämlich ganz genau so.

*Beweis.* Es genügt, den Beweis für einen Randpunkt zu führen, der nicht auf der Normkurve liegt, weil sich ja auch gegen die Punkte der Normkurve solche Randpunkte häufen. Gäbe es aber für einen Randpunkt  $P$  von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ , der nicht auf der Normkurve liegt, eine Vollumgebung  $U(P)$  von der Art, daß für keine Folge von Randpunkten  $P_\nu$  aus ihr, welche gegen einen Randpunkt  $Q$  aus  $U(P)$  konvergiert, der Fall eintritt, daß zu  $P_\nu$  gehörende von innen tangierende Richtungen gegen einen Vektor  $\mathfrak{B}_Q$  konvergieren, der unserem dem Punkte  $Q$  zugeordneten Richtungsbüschel angehört, dann könnten wir unsere Randfläche, soweit sie in  $U$  liegt, so durch eine stetig differentiierebare Deformation des ganzen Raumstückes abändern, daß der neue begrenzte Bereich auch noch iterations-

fest und zugleich ein echter Teilbereich von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  ist, d. h. also  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  wäre dann nicht der kleinste derartige Bereich. (Es genügt, hierbei die stetige Zuordnung des Richtungsbündels zu jedem Randpunkt zu beachten.) Daher gibt es in jeder Umgebung  $U$  von  $P$  wenigstens eine solche Folge  $P$ , mit der obigen Eigenschaft, und damit haben wir Satz 11 bewiesen.

16. *Zusammenfassung.* Wir haben also jedem im Äußeren von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  gelegenen Punkt ( $\beta$ ) einen  $(2n - 3)$ -dimensionalen Richtungskegel zugeordnet, den wir daraus erhalten, daß wir alle möglichen Kurven  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  zu den *Randpunkten* von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  hinziehen und von diesen ihnen in  $P$  zukommenden Tangentenrichtungen wiederum lediglich den *berandenden Richtungskegel* benutzen.

Unser abgeschlossener genauer Variabilitätsbereich  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  ist also von der Art, daß

1.  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  und insbesondere die Normkurve

$$(e^{i\vartheta}, e^{2i\vartheta}, \dots, e^{(n-1)i\vartheta}), \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

in ihm enthalten ist,

2. für jeden Randpunkt  $P$  eine Folge von Randpunkten  $P_\nu \rightarrow P$  und zugehörigen in  $P$  von innen tangierenden Richtungsvektoren  $\mathfrak{B}_\nu$  so existiert, daß a) die  $\mathfrak{B}_\nu$  gegen eine Richtung  $\mathfrak{B}$  aus dem zugeordneten Richtungskegel konvergieren und b) dabei die Kurven  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  [ $(\sigma)$  beliebig in  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ ] in einer Umgebung nirgends ins Äußere dringen,

3. kein kleinerer Bereich mit den Eigenschaften 1 und 2 existiert.

Diese Kennzeichnung bedeutet für jeden stetig differenzierbaren Teil des Randes von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ , daß er einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt.

17. *Die Differentialgleichung für einen beliebigen differenzierbaren Teil des Randes von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ .* Die Aufstellung der Differentialgleichung, der jeder stetig differenzierbare Teil der Berandungsfläche des genauen Variabilitätsbereiches  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  genügen muß, ist ein Eliminationsproblem.

Wir betrachten im folgenden auf der  $(2n - 3)$ -dimensionalen Berandungsfläche des  $(2n - 2)$ -dimensionalen Bereiches  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  nur solche Flächenteile, d. h.  $(2n - 3)$ -dimensionale Bereiche unserer Fläche, in denen eine eindeutige  $((2n - 3)$ -dimensionale) Tangentialhyperebene  $\mathfrak{X}(P)$  existiert und stetig ist, schließen also insbesondere Kantenpunkte aus. Wir wissen, daß die Tangentialhyperebene  $\mathfrak{X}(P)$  in einem solchen Punkte  $P$  wenigstens eine Kurve  $\mathfrak{C}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  berührt, worin  $(\sigma)$  auf der Normkurve ( $\sigma_\nu = e^{i(\nu-1)\vartheta}$ ) gelegen ist, und alle Richtungen aus dieser einparametrischen Schar von Kurven ( $(\sigma)$  beliebig auf der Normkurve) ganz auf einer Seite läßt<sup>16)</sup>.

Wenn  $F_n(\beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_n, \bar{\beta}_n) = 0$  die Gleichung des Randes von  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  sei, so setzen wir speziell:

$$(17.1) \quad \sigma_k = e^{i(k-1)\vartheta} = \gamma^{k-1}; \quad \frac{\partial F_n}{\partial \beta_j} = p_j, \quad \frac{\partial F_n}{\partial \bar{\beta}_j} = q_j = \bar{p}_j;$$

$$\lambda_j(\vartheta) = -(j-1)\beta_j + 2 \sum_{\nu=2}^{j-1} (-2\nu + j + 1)\beta_\nu e^{i(j-\nu)\vartheta} + (j-1)e^{i(j-1)\vartheta}.$$

Unsere Randfläche genügt dann in jedem Punkte des betrachteten Flächenteiles der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi(p_2, \dots, p_n; q_2, \dots, q_n; (\beta); (\bar{\beta})) = 0,$$

<sup>16)</sup> Um dies zu erschließen, hätten wir natürlich die Überlegungen, welche zu den Nachsätzen von Satz 10 und 11 führen, auch direkt an Nr. 7 anschließen können.

welche man aus den beiden folgenden Gleichungen durch Elimination von  $\vartheta$  erhält:

$$(17. 2) \quad \sum_{j=2}^n (\lambda_j(\vartheta) p_j + \overline{\lambda_j(\vartheta)} q_j) = 0, \\ \sum_{j=2}^n \left( \left( \frac{d}{d\vartheta} \lambda_j(\vartheta) \right) p_j + \overline{\left( \frac{d}{d\vartheta} \lambda_j(\vartheta) \right)} q_j \right) = 0, \quad \lambda_j(\vartheta) \text{ aus (17. 1).}$$

18. Allerdings kann man diese Differentialgleichung um eine reelle Dimension noch erniedrigen, wenn man bedenkt, daß unser Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  und damit auch seine Randfläche die folgende einparametrische Gruppe von Transformationen in sich gestattet:

$$x_2 = e^{i\vartheta} x_2^0, \dots, x_n = e^{(n-1)i\vartheta} x_n^0.$$

So können wir z. B. für  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  uns darauf beschränken, den Durchschnitt des Bereiches mit  $\Im\beta_2 = 0$  zu bestimmen. Setzen wir hier zur Abkürzung:

$$x = |\beta_2|, \quad y + iz = \beta_3 \frac{\overline{\beta_2}}{\beta_2}, \quad y, z \text{ reell,}$$

so sei der Rand des Bereiches  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  in der Form

$$-f(x, y) \leq z \leq f(x, y)$$

gegeben. (Die Symmetrie in bezug auf  $z = 0$  folgt daraus, daß mit  $f(z) = \sum_1^\infty b_\nu z^\nu$  auch die Funktion  $\sum_1^\infty \overline{b_\nu} z^\nu$  schlicht ist.) Dabei sei  $(x, y)$  im genauen Bereich der reellen Koeffizienten  $(\beta_2, \beta_3)$  einer beliebigen schlichten Funktion gelegen<sup>17)</sup>. Dann müssen die Vektoren<sup>18)</sup>

$$\xi_1 = \left( 1, 0, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \xi_2 = \left( 0, 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \xi_3 = (0, x, -2f, 2y),$$

zusammen mit dem Vektor  $\xi_4 = (\cos \vartheta - x, \sin \vartheta, 2(\cos 2\vartheta - y), 2(\sin 2\vartheta - f))$  ebenso wie zusammen mit dem Vektor  $\xi_5 = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, -4 \sin 2\vartheta, 4 \cos 2\vartheta)$  linear abhängig sein, d. h. also je eine verschwindende Determinante besitzen. Dies ergibt die beiden Gleichungen:

$$(18. 1) \quad \begin{aligned} 2(y + ff_y) \sin \vartheta + xf_x \cos \vartheta - 2x \sin 2\vartheta + 2xf_y \cos 2\vartheta + x(2f - 2yf_y - xf_x) &= 0 \\ 2(y + ff_y) \cos \vartheta - xf_x \sin \vartheta - 4x \cos 2\vartheta - 4xf_y \sin 2\vartheta &= 0; \end{aligned}$$

hieraus ist  $\vartheta$  zu eliminieren.

#### IV. Methode der infinitesimalen mehrfachen Schlitze.

19. *Mehrfache Radialschlitzte.* Zunächst die Frage: Welche sternförmigen Abbildungen gehören zu einem Punkte  $(\sigma)$  auf dem Rande des Bereiches  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$ ?

Zu jedem Randpunkt  $(\sigma)$  auf  $\mathfrak{B}_*^{(n)}$  gibt es  $p$  ( $1 \leq p \leq n - 1$ ) Punkte auf der Normkurve mit den Parameterwerten  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_p$  und dazugehörige positive Gewichte  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  so, daß

$$\sum_1^p \lambda_\nu = 1, \quad \sigma = \sum_1^p \lambda_\nu e^{i(j-1)\vartheta_\nu} \quad (j = 2, \dots, n)$$

ist. Wir wollen die verschiedenen Fälle von  $p$  in der einen Formel zusammenfassen

$$\sigma_j = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \eta_\nu^{j-1} \quad (\eta_\nu = e^{i\vartheta_\nu})$$

<sup>17)</sup> Siehe Nr. 28.

<sup>18)</sup> Wir schreiben die reellen Komponenten:  $(\Re\beta_2, \Im\beta_2, \Re\beta_3, \Im\beta_3)$ .

und lassen dabei  $\lambda_\nu \geq 0$  zu,  $\sum_1^{n-1} \lambda_\nu = 1$ . Die  $\lambda_\nu$  und  $\eta_\nu$  sind eindeutig durch  $(\sigma)$  bestimmt <sup>19)</sup>.

Dann gilt für die zugehörige Abbildungsfunktion  $f(z)$ :

$$(19.1) \quad \frac{f}{f'} = z \sum_1^{n-1} \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}.$$

Geht man zum Koeffizientenraum von  $\frac{f'}{f}$  über, so sind darin die Bereiche  $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$  ebenfalls konvex <sup>20)</sup>, und unserem Randpunkt  $(\sigma)$  entspricht dort ein gewisser Randpunkt  $(\tau)$  von  $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$ . Daher gibt es auch  $2(n-1)$  <sup>21)</sup> Zahlen

$$\zeta_\nu = e^{i\theta_\nu}, \quad \mu_\nu \geq 0, \quad \sum \mu_\nu = 1, \quad \nu = 1, \dots, n-1,$$

sodaß

$$(19.2) \quad \frac{f'}{f} = \frac{1}{z} \sum_1^{n-1} \mu_\nu \frac{1 - \zeta_\nu z}{1 + \zeta_\nu z}$$

ist. Hieraus erhält man aber

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{f}{z}\right)' &= \frac{f'}{f} - \frac{1}{z} = -2 \sum \mu_\nu \frac{\zeta_\nu}{1 + \zeta_\nu z}, \\ \log \frac{f}{z} &= -2 \sum \mu_\nu \log(1 + \zeta_\nu z) \end{aligned}$$

oder

$$(19.3) \quad f = \frac{z}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1 + \zeta_\nu z)^{2\mu_\nu}},$$

worin im Nenner bei jedem Faktor derjenige Funktionszweig genommen sei, der für  $z=0$  den Wert 1 hat.

Ganz entsprechend unseren früheren Überlegungen folgt, daß  $f(z)$  im Einheitskreis regulär, schlicht und sternförmig ist. Aus der Entwicklung von  $f(z)$  in den Punkten  $z = -\bar{\zeta}_\nu$  folgert man, daß das Bildgebiet dadurch entsteht, daß man die Ebene längs  $p$  radialer geradliniger Schlitzte vom Unendlichen her aufschneidet. Je zwei benachbarte Radialschlitze bilden untereinander die Winkel  $2\mu_\nu\pi$ , ihre Endpunkte im Endlichen liegen in

$$f(-\bar{\eta}_\nu) = \frac{-\bar{\eta}_\nu}{\prod_1^{n-1} (1 - \zeta_\nu \bar{\eta}_\nu)^{2\mu_\nu}}.$$

**20. Infinitesimale gegabelte Schlitzabbildungen.** Wir bilden aus der Funktion  $f(z)$  (von 19.3) die beschränkte sternförmige Abbildung:

$$(20.1) \quad \varphi = f^{-1}(e^{-t}f(z)), \quad t > 0;$$

dann ist

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{f}{f'} = -z \sum_1^{n-1} \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z},$$

<sup>19)</sup> L. V. (6), S. 11.

<sup>20)</sup> und zwar ist  $[\mathfrak{B}_*^{(n)}]$  der kleinste konvexe Bereich, der die Normkurve  $(e^{i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta})$  enthält.

<sup>21)</sup> wiederum eindeutig bestimmte (siehe Fußnote <sup>19)</sup>).

und damit für eine beschränkte schlichte normierte Abbildung  $w = F(z)$ :

$$(20. 2) \quad \left( \frac{d}{dt} \varphi(F(z)) \right)_{t=0} = - w \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\nu} \frac{1 + \eta_{\nu} w}{1 - \eta_{\nu} w}.$$

Sei  $\mathfrak{S}_p$  ein *Gabelschlitz*, der von der Peripherie des Einheitskreises aus ins Innere ragt und den Nullpunkt vermeidet, d. h. ein (abgesehen vom einen Endpunkt) in  $|z| < 1$  gelegener zusammenhängender endlicher topologischer (Kurven-) Komplex (= Gesamtheit von endlich vielen Jordankurvenstücken, welche höchstens gewisse Endpunkte gemeinsam haben), der 1. ein topologischer Baum ist (d. h. also, es soll nicht möglich sein, aus gewissen von den Jordankurvenstücken eine geschlossene Jordankurve zu bilden) und 2. genau einen Punkt auf  $|z| = 1$ , dagegen nicht den Nullpunkt enthält. Außerdem mögen genau  $p$  freie Endpunkte im Innern des Einheitskreises vorhanden sein. Dann wollen wir  $\mathfrak{S}_p$  einen *p-fachen Gabelschlitz* nennen,  $p \geq 1$ .

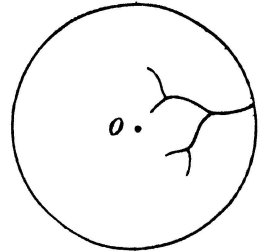


Fig. 1.

Nehmen wir aus dem Einheitskreis  $|w| < 1$  die gegabelten Schlitzte  $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_p$  heraus, welche miteinander punktfremd sind, abgesehen evtl. von ihren Endpunkten auf  $|w| = 1$ , und welche den Nullpunkt vermeiden, so heiße ein solches Gebiet ein *beschränktes p-faches Gabelschlitzgebiet*, wenn  $p_1 + p_2 + \dots + p_p = p$  ist.

21. Nach diesen Erklärungen können wir nun aber in Hinblick auf (20. 2) genau die gleichen Überlegungen anstellen, wie Löwner es in seiner Arbeit für die (gewöhnlichen) in unserem Sinne 1-fachen beschränkten Schlitzgebiete tut. Weil die Beweisführung vollkommen gleich läuft, begnügen wir uns mit dem Resultat. Wir erhalten auf diese Weise den

**Satz 12.** *Für jedes beschränkte p-fache Schlitzgebiet gibt es 2p stetige reellwertige Funktionen  $\vartheta_{\nu}(t), \lambda_{\nu}(t) \geq 0, 0 \leq t \leq t_0, \nu = 1, \dots, p$ , mit  $\sum_1^p \lambda_{\nu}(t) = 1$ , sodaß die zugehörige normierte Abbildungsfunktion  $w = \varphi(z)$  durch Integration der Differentialgleichung*

$$(21. 1) \quad \frac{d}{dt} \varphi(z, t) = - \varphi(z, t) \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\nu} \frac{1 + \eta_{\nu} \varphi(z, t)}{1 - \eta_{\nu} \varphi(z, t)} \quad \text{mit} \quad \eta_{\nu} = e^{i\vartheta_{\nu}(t)}$$

und den Anfangsbedingungen  $\varphi(z, 0) = z$  als Lösung  $\varphi(z, t_0) = \varphi(z) = e^{-t_0}(z + \dots)$  gewonnen werden kann.

Wir haben damit eine Verallgemeinerung der Löwnerschen Differentialgleichung <sup>22)</sup> erhalten. Umgekehrt gilt auch hier:

**Satz 13.** *Jede Lösung von (21. 1) liefert bei beliebigen stetigen oder höchstens endlich oft unstetigen Funktionen  $\vartheta_{\nu}(t), \lambda_{\nu}(t) \geq 0, 0 \leq t \leq t_0, \sum_1^p \lambda_{\nu} = 1$ , eine im Einheitskreis reguläre und schlichte beschränkte Abbildung ( $0 < t_0$ ).*

Dies schließt man nach demselben Verfahren, das wir schon einmal anwandten <sup>23)</sup>: Erstens ist jede Lösung von (21. 1), sofern die Funktionen  $\lambda_{\nu}, \eta_{\nu}$  im Intervall  $0 \leq t \leq t_0$  stückweise konstant sind (bei Aufteilung auf endlich viele, etwa  $q$ , Teilintervalle) eine schlichte Abbildung von der Form  $\varphi_1(\dots \varphi_q(z))$  worin  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  elementare p-fache beschränkte Schlitzabbildungen von der Form (19. 1) sind <sup>24)</sup>. Und zweitens läßt sich

<sup>22)</sup> L. V. (8), S. 117.

<sup>23)</sup> Siehe Nr. 2.

<sup>24)</sup> Denn für  $\varphi = f^{-1}(e^{-t}f)$  ist  $\frac{d\varphi}{dt} = -f^{-1}'(e^{-t}f)e^{-t}f$  und

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad f^{-1}'(u) = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))}, \quad -\frac{u}{f'(f^{-1}(u))} = f^{-1}(u) \cdot \sum_1^p \lambda_{\nu} \frac{1 + \eta_{\nu} f^{-1}(u)}{1 - \eta_{\nu} f^{-1}(u)}$$

nach (19. 1), und hieraus ( $u = e^{-t}f(z)$ ):  $\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi \cdot \sum_1^p \lambda_{\nu} \frac{1 + \eta_{\nu} \varphi}{1 - \eta_{\nu} \varphi}$ .

wiederum jede Lösung von (21. 1) mit solchen ebengenannten approximieren, wobei wir lediglich zu bedenken haben einerseits, daß (wie aus der koeffizientenweisen Integration der Differentialgleichung folgt) die Koeffizienten dabei konvergieren, und andererseits, daß wir eine normale Folge (mit  $\varphi'(0) = e^{-t_0} = \text{const.}$  für alle Funktionen der Folge) vor uns haben. Dann folgt bekanntlich aus der Schlichtheit der Funktionen der Folge auch diejenige für die Grenzfunktion.

22. *Integration der verallgemeinerten Differentialgleichung.* Für die Integration der Differentialgleichung geht man besser von einer anderen aus <sup>25)</sup>. Wir bilden für unsere Funktionen <sup>25)</sup>  $\varphi(z, t)$ , welche Lösungen von (21. 1) bei variablem  $t$  (jedoch denselben Funktionen  $\lambda, \eta$ ) sind:

$$(22. 1) \quad g(z, t) = \varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0).$$

Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0) \cdot \frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial t}, \quad u = \varphi^{-1}(z, t),$$

und

$$\frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t},$$

somit

$$\frac{\partial g}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\varphi^{-1}(z, t), t_0) \cdot \frac{\partial \varphi^{-1}(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial t}.$$

D. h. die durch (22. 1) bestimmte Funktion  $g(z, t)$  genügt der Differentialgleichung:

$$(22. 2) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} g(z, t) \cdot z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}$$

mit der Anfangsbedingung  $g(z, t_0) = z$ ,  $g(z, 0) = \varphi(z, t_0)$ .  $\varphi(z, t)$  wie auch die Funktionen  $g(z, t)$  liefern eine beschränkte  $q$ -fache Gabelschlitzabbildung, mit  $q \leq p$ .

23. Wir führen die Funktionen

$$F(z) = \frac{\varphi}{\varphi'}, \quad G(z, t) = \frac{g}{g'}$$

ein und erhalten:

$$(23. 1) \quad \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = - \frac{1}{\varphi'} \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} + \frac{\varphi}{\varphi'} \left( \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} \right)'$$

Dabei ist für die Funktion  $f(z)$

$$(23. 2) \quad \frac{f(z)}{f'(z)} = A(z) = z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}.$$

Hingegen genügt die Funktion  $G(z, t)$ , wie man ebenso leicht sofort aus (22. 2) folgert, der bemerkenswerten Gleichung:

$$(23. 3) \quad \frac{\partial}{\partial t} G(z, t) = A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G(z, t) - G(z, t) \cdot \frac{d}{dz} A(z); \quad A(z) = z \sum_1^p \lambda_\nu \frac{1 + \eta_\nu z}{1 - \eta_\nu z}.$$

Von ihr wollen wir für die Integration unserer Differentialgleichung ausgehen. Es sei

$$G(z, t) = z \left( 1 + 2 \sum_2^\infty \gamma_\nu z^{\nu-1} \right), \quad A(z) = z \left( 1 + 2 \sum_2^\infty \alpha_\nu z^{\nu-1} \right), \quad \alpha_\nu = \sum_1^p \lambda_j \eta_j^{\nu-1}$$

<sup>25)</sup> Ähnlich wie in L. V. (8), S. 117.

gesetzt. Dann erhalten wir, wenn wir die Koeffizienten in (23. 3) links und rechts vergleichen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \gamma_2 = \gamma_2 - \alpha_2, \\
 & \frac{d}{dt} \gamma_3 = 2(\gamma_3 - \alpha_3), \\
 (23. 4) \quad & \frac{d}{dt} \gamma_4 = 3(\gamma_4 - \alpha_4) + 2(\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2), \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \frac{d}{dt} \gamma_n = (n - 1) (\gamma_n - \alpha_n) + 2 \sum_2^{n-1} (2\nu - n - 1) \gamma_\nu \alpha_{n+1-\nu}.
 \end{aligned}$$

Wir verzichten darauf, die allgemeine Integration, die durch schrittweise Quadraturen zu erreichen ist, auszuführen und hinzuschreiben und begnügen uns mit den ersten Koeffizienten. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 & \gamma_2(t) = - e^t \int_{t_0}^t e^{-\tau} \alpha_2 d\tau, \\
 (23. 5) \quad & \gamma_3(t) = - 2e^{2t} \int_{t_0}^t e^{-2\tau} \alpha_3 d\tau, \\
 & \gamma_4(t) = e^{3t} \left[ - 3 \int_{t_0}^t e^{-3\tau} \alpha_4 d\tau - 2 \int_{t_0}^t e^{-2\tau_1} \alpha_3(\tau_2) \int_{\tau_2}^{t_0} e^{-\tau_1} \alpha_2(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right. \\
 & \quad \left. + 4 \int_{t_0}^t e^{-\tau_1} \alpha_2(\tau_2) \int_{\tau_2}^{t_0} e^{-2\tau_1} \alpha_3(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right], \\
 & \beta_n = \gamma_n(0).
 \end{aligned}$$

24. Wir vermerken noch folgenden

**Satz 14.** *Ist in demselben Intervall  $0 \leqq t \leqq t_0$  eine Folge von Systemen von stetigen oder stückweise stetigen reellen Funktionen (mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen) gegeben:*

$$\vartheta_k^{(\nu)}(t), \lambda_k^{(\nu)}(t) \geqq 0; \quad k = 2, \dots, n, \quad \sum_{\kappa=2}^n \lambda_\kappa^{(\nu)} = 1, \quad \nu = 1, \dots,$$

*die im gesamten Intervall  $0 \leqq t \leqq t_0$  gleichmäßig gegen ein System von stetigen oder stückweise stetigen Funktionen (mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen)*

$$\vartheta_k(t), \lambda_k(t) \quad (k = 2, \dots, n)$$

*konvergiert, so konvergiert wenigstens eine Teilfolge der Lösungen  $\varphi_{(\nu)}(z, t_0)$  der zugehörigen Differentialgleichung gegen eine im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion  $\varphi(z, t_0)$ , welche Lösung der zu  $\vartheta_k(t), \lambda_k(t)$  gehörigen Differentialgleichung (21. 1) ist.*

Dies folgt aus den beiden bereits erwähnten Tatsachen, daß

1. die Koeffizienten nacheinander durch Quadraturen erhältlich sind und der Reihe nach sämtlich konvergieren,

2. die Funktionen jeweils schlicht sind und eine Ableitung  $\varphi'_{(\nu)}(0) = e^{-t_0} = \text{const.}$  haben; daher ist die Folge normal und ihre Grenzfunktion wieder schlicht.

### V. Der Bereich $\mathfrak{B}_1^{(3)}$ .

25. *Der reelle Variabilitätsbereich.* Wie wir schon einmal bemerkten, ist mit der Funktion  $f(z) = \Sigma a_\nu z^\nu$  auch die Funktion  $f^*(z) = \Sigma \bar{a}_\nu z^\nu$  im Einheitskreise schlicht



[denn wäre etwa  $\Sigma \bar{a}_v z_1^v = \Sigma \bar{a}_v z_2^v$  für  $z_1 \neq z_2$ ,  $|z_1|, |z_2| < 1$ , so wäre auch  $\Sigma a_v \bar{z}_1^v = \Sigma a_v \bar{z}_2^v$  entgegen der Voraussetzung]. Dies bedeutet für den Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ , daß mit jedem Punkt  $(\beta_2, \dots, \beta_n)$  auch der Punkt  $(\bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n)$  darinnen liegt; der Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  hat also eine gewisse Symmetrie gegenüber der  $(n - 1)$ -dimensionalen Achsenebene  $E^{n-1}$ :

$$\Im \beta_2 = \Im \beta_3 = \dots = \Im \beta_n = 0.$$

$E^{n-1}$  ist der reelle Koeffiziententeilraum. Den Durchschnitt unseres Bereiches  $\mathfrak{B}_s^{(n)}$  mit dieser Ebene  $E^{n-1}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{E}_s^{(n)}$  und nennen ihn den  $n$ -ten *reellen* Variabilitätsbereich, er hat also — um dies klar zu stellen — die folgende ihn charakterisierende Eigenschaft: Für jede im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

mit den  $n$  reellen Koeffizienten  $1, a_2, \dots, a_n$  ist der Punkt  $(a_2, \dots, a_n)$  im (abgeschlossenen) Bereich  $\mathfrak{E}_s^{(n)}$  gelegen, und zu jedem Punkt aus ihm mit den (reellen) Koordinaten  $(a_2, \dots, a_n)$  gibt es eine Folge von (nicht notwendig reellen) Zahlen  $a_{n+1}, \dots$  so, daß die Funktion  $f(z) = z + \sum_2^\infty a_v z^v$  im Einheitskreis regulär und schlicht ist.

26. Die Haupteigenschaft von  $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ . Es gilt der

**Satz 15.** *Liegt ein Punkt  $(\beta_2, \beta_3)$  im Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  [im Raume  $\mathfrak{R}$ ], so ist auch der Punkt  $(\Re \beta_2, \Re \beta_3)$  ein Punkt von  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  [und damit von  $\mathfrak{E}_s^{(3)}$ ].*

*Beweis.* Es genügt, den Satz für eine in  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  überall dicht liegende Punktmenge  $(\beta_2, \beta_3)$  zu beweisen. Aus dem Löwnerschen Hauptsatz<sup>25a)</sup> folgt, daß diejenigen Punkte  $(\beta_2, \beta_3)$  in  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  überall dicht liegen, für welche es eine stetige Funktion  $\eta(\tau)$ ,  $|\eta| = 1$ ,  $0 \leq \tau < \infty$  gibt derart, daß  $\beta_2 = \int_0^\infty e^{-\tau} \eta d\tau$ ,  $\beta_3 = \int_0^\infty e^{-2\tau} \eta^2 d\tau$  gilt. Hieraus ergibt sich für diese Punkte:

$$\Re \beta_2 = \int_0^\infty e^{-\tau} \cdot \frac{1}{2} (\eta + \bar{\eta}) d\tau,$$

$$\Re \beta_3 = \int_0^\infty e^{-2\tau} \cdot \frac{1}{2} (\eta^2 + \bar{\eta}^2) d\tau.$$

Integrieren wir das Differentialgleichungssystem (21.1) mit dem neuen System von Funktionen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{\eta}_1 = \eta_2 = \bar{\eta},$$

so ergibt sich nach Satz 13 eine schlichte Funktion

$$\varphi(z) = e^{-t_0} (z + a_2^0 z^2 + \dots)$$

mit der Beziehung

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = z + 2\Re \beta_2 z^2 + 2\Re \beta_3 z^3 + 2\beta_4^* z^4 + \dots, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Dies heißt aber, wenn wir uns des Satzes 14 bedienen, für jeden Punkt  $(\beta_2, \beta_3)$  aus  $\mathfrak{E}_s^{(3)}$  gibt es eine konvergente Folge von iterierten Funktionen  $\varphi_k$  aus  $f_k^*$  mit *nur* reellen ersten zwei Koeffizienten so, daß  $\beta_2^{(k)} \rightarrow \beta_2$ ,  $\beta_3^{(k)} \rightarrow \beta_3$ , d. h. wiederum, wenn wir

<sup>25a)</sup> L. V. (8).

uns der Bedeutung dieser Iteration erinnern und den Durchschnittsbereich des Bereiches  $\mathfrak{B}_*^{(3)}$  mit der zweidimensionalen Achsenebene  $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$  mit  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  bezeichnen, es gilt

**Satz 16.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  in  $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$  mit dem genauen dritten reellen Variabilitätsbereich  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  identisch ist, ist die Eigenschaft, daß von jedem Randpunkt von  $\mathfrak{G}$  aus die Kurve  $\mathfrak{G}_{(\beta),(\sigma)}(t)$ , die hier immer eine Parabel ist, ein Stück weit wenigstens nirgends ins Äußere dringt, wenn  $(\sigma)$  beliebig in  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  variiert, und daß es das kleinste dieser Art ist <sup>26)</sup>.*

**27. Herleitung des Bereiches  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$ .** Hieraus können wir nun leicht den genauen Bereich  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  bestimmen. (Im folgenden sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\beta_2 > 0$ ; wir schreiben auch die Koordinaten  $x, y$  für  $\sigma_2, \sigma_3$  bzw.  $\beta_2, \beta_3$ ).

Wir haben in  $(\beta)$  für die von ihm ausgehenden Kurven  $\mathfrak{G}_{(\beta),(\sigma)}(t)$  die Richtungsvektoren  $(\xi_2, \xi_3)$ :

$$\xi_2 = (\sigma_2 - \beta_2), \quad \xi_3 = 2(\sigma_3 - \beta_3),$$

wobei  $(\sigma_2, \sigma_3)$  beliebig auf dem Rand von  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  variiere.  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  ist (nach 12. 6) durch die Ungleichungen gegeben:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 2x^2 - 1 \leq y \leq 1.$$

Dann berechnet <sup>27)</sup> man leicht die beiden extremalen Lagen der Richtungsvektoren dieses Büschels:

$$(27. 1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \left( -1, -8 \left( x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}} \right) \right), \quad \xi_2 = \left( -1, -8 \left( x + \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}} \right) \right) \\ &\quad \text{für } y \geq 8(x-1) + 1 \\ \xi_1 &= \left( -1, -8 \left( x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}} \right) \right), \quad \xi_2 = (-x+1, 2(-y+1)) \\ &\quad \text{für } y \leq 8(x-1) + 1. \end{aligned}$$

Es zeigt sich leicht durch eine elementare Betrachtung des Richtungsfeldes und der Randbedingungen des Problems, daß für die Integration nur das Vektorfeld  $\xi_1$  in Frage kommt.

Wir haben die Differentialgleichung

$$(27. 2) \quad \boxed{y' = 8 \left( x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}} \right)}$$

zu integrieren mit der Randbedingung  $y(1) = 1$ , sowie mit  $-1 \leq y \leq 1$  für  $0 \leq x \leq 1$  <sup>28)</sup>. Zu diesem Zweck führen wir die neue Funktion

$$(27. 3) \quad \boxed{\eta(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}}}}$$

<sup>26)</sup> Nach früherer Schlußweise muß in jedem Randpunkt  $P$  eines stetig differentiierbaren Randteiles von  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$ , der nicht Randpunkt von  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  ist, sogar eine Iterationsparabel die Randkurve *berühren*.

<sup>27)</sup> Es genügt wegen  $|\beta_2| < 1$  (s. Nr. 3),  $|\beta_3| < 1$ , nur noch Punkte mit  $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$  zu betrachten.

<sup>28)</sup> Siehe <sup>27)</sup>. (Diese Bedingung schließt das Vektorfeld  $\xi_2$  aus.)

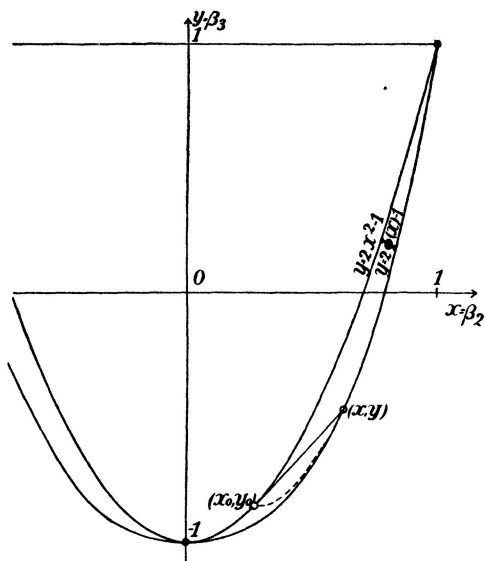


Fig. 2.

ein (im Äußern von  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  ist  $x^2 - \frac{y+1}{2} > 0$ ) und erhalten aus (27. 2)

$$\eta'(x) = \frac{\eta(x)}{x(1 - \eta(x))}.$$

Dies liefert aber  $x = \gamma \eta e^{-\eta}$ . Um die Konstante  $\gamma$  zu bestimmen, beachten wir die Randbedingung:

für  $x \rightarrow 1$  gilt  $y \rightarrow 1$ , d. h.  $\eta \rightarrow 1$ .

Aus ihr folgt  $\gamma = e$ . Damit können wir nun die von uns gewünschte Kurve so schreiben: Es sei mit  $\varphi(x)$  die im Intervall  $0 < x \leq 1$  eindeutig erklärte Umkehrfunktion von

$$(27. 4) \quad \boxed{x = \varphi e^{1-\varphi}}$$

mit  $\varphi \geq 1$  bezeichnet. Dann lautet die Gleichung der Integrationskurve, die unseren gesuchten Bereich  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  berandet:

$$x - \sqrt{x^2 - \frac{y+1}{2}} = \varphi(x)$$

oder:

$$(27. 5) \quad \frac{y+1}{2} = \frac{x^2}{\varphi^2(x)} (2\varphi(x) - 1) = \Phi(x).$$

Wir behaupten also: Der genaue Bereich  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  ist umschrieben durch:

$$(27. 6) \quad \boxed{|x| \leq 1, \quad 2\Phi(x) - 1 \leq y \leq 1},$$

worin  $x = |\beta_2|$ ,  $y = \beta_3$  und  $\Phi(x)$  durch (27. 5) und (27. 4) erklärt ist.

Wir sehen unmittelbar, daß jede Iterationskurve (Parabel)<sup>29)</sup>, von einem beliebigen Punkt von der Kurve (27. 5) ausgehend, nirgends ins Äußere des Bereiches (27. 6) dringt. Außerdem müssen wir uns noch überzeugen, daß diese Kurve das kleinste  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  umfassende Gebiet berandet, das die Eigenschaft des Satzes 16 besitzt. Dies ist aber leicht einzusehen. Wir brauchen uns nur das Richtungsfeld  $\mathfrak{r}_1$  in den Punkten im Innern von (27. 6), aber noch außerhalb  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$  anzusehen und können sagen, würde noch eine andere Randkurve vom Punkte  $(0, -1)$  zum Punkte  $(1, +1)$  in diesem Feld verlaufen, so fänden wir leicht in elementarer Betrachtung eine Stelle auf ihr, wo die ihr vorgeschriebene extremale Iterationsrichtung des Feldes ins Äußere führen würde.

28. Damit haben wir den

**Satz 17.** Für jede in  $|z| < 1$  reguläre und schlichte Funktion

$$f(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

gilt:

$$1 \geq \Re \beta_3 \geq 2\Phi(\Re \beta_2) - 1 \quad \text{mit} \quad \beta_2 = -\frac{b_2}{2}, \quad \beta_3 = b_2^2 - b_3,$$

worin  $\Phi(x)$  für  $-1 \leq x \leq 1$  durch (27. 4) und (27. 5) definiert ist.

<sup>29)</sup>  $X(t) = x e^{-t} + (1 - e^{-t}) x_0$ ,  $Y(t) = y e^{-2t} + (1 - e^{-2t}) y_0$ ;  $x_0, y_0$  in  $\mathfrak{G}_*^{(3)}$ ,  $e^{-t} = \alpha$ .

Zugleich ist diese Abschätzung für  $\Re\beta_2, \Re\beta_3$  scharf<sup>30)</sup>, d. h. zu jedem Paar reeller  $\beta_2, \beta_3$ , das diese Ungleichung erfüllt, gibt es wenigstens eine in  $|z| < 1$  reguläre schlichte Funktion

$$f(z) = z - 2\beta_2 z^2 + (4\beta_2^2 - \beta_3) z^3 + \dots$$

Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß die Berandungsfläche des genauen dritten Variabilitätsbereiches  $\mathfrak{B}_3^{(3)}$  keine algebraische Fläche ist. Ihr Schnitt mit  $\Im\beta_2 = \Im\beta_3 = 0$  ist nämlich zum einen Teil die transzendente Kurve

$$y = 2\Phi(x) - 1 = -1 + \frac{x^2}{\varphi^2} (2\varphi - 1) \quad \text{mit} \quad \varphi e^{1-\varphi} = x \quad \text{31)}.$$

29. Herleitung der Ungleichung von Fekete und Szegö. Aus dem Satz 17 können wir unmittelbar eine Bestätigung eines Resultates von Fekete und Szegö<sup>32)</sup> herleiten. Wir fragen nach der bestmöglichen Abschätzung des Maximums des absoluten Betrages des Koeffizienten  $b_5$  einer in  $|z| < 1$  regulären schlichten ungeraden Funktion  $f(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$ . Zu einer beliebigen solchen Funktion gibt es bekanntlich immer eine im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion  $F(z) = z + B_2 z^2 + \dots$ , so, daß die Beziehung  $f(z) = \sqrt{F(z^2)}$  besteht.

Es ist dabei  $b_3 = \frac{B_2}{2}$ ,  $b_5 = \frac{1}{2} \left( B_3 - \frac{B_2^2}{4} \right)$ , und die Frage läuft darauf hinaus, das Maximum von  $\left| \frac{1}{2} \left( B_3 - \frac{B_2^2}{4} \right) \right|$  für beliebige schlichte Funktionen  $F(z)$  zu bestimmen.

Es ist aber

$$\text{Max} |2b_5| = \text{Max} \Re \left( B_3 - \frac{B_2^2}{4} \right)$$

und, wenn man wie oben,  $B_2 = -2\beta_2$ ,  $B_3 = 4\beta_2^2 - \beta_3$  setzt,

$$\begin{aligned} \Re \left( B_3 - \frac{B_2^2}{4} \right) &= \Re(3\beta_2^2 - \beta_3) = 3(\Re\beta_2)^2 - 3(\Im\beta_2)^2 - \Re\beta_3 \\ &\leq 3(\Re\beta_2)^2 - \Re\beta_3 \\ &\leq 3x^2 - 2\Phi(x) + 1 \equiv H(x), \end{aligned}$$

mit  $x = \Re\beta_2$  und  $-1 \leq x \leq +1$ .

Wir suchen von  $H(x)$  das Maximum für  $0 < x \leq 1$ <sup>33)</sup>. Man findet

$$\frac{d}{dx} H(x) = 2x \left( 3 - \frac{4}{\varphi(x)} \right)$$

und erkennt, daß  $H(x)$  für  $\varphi = \frac{4}{3}$ , d. h.  $x_0 = \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}}$  das Maximum annimmt. Es folgt also  $|2b_5| \leq H(x_0) = 2e^{-\frac{2}{3}} + 1$ , und dies ist das Resultat von Fekete und Szegö. Gleichzeitig sehen wir, daß die Abschätzung wirklich scharf ist. Denn sie wird wirklich erreicht von  $\beta_2 = \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}}$ ,  $\beta_3 = 2\Phi(x_0) - 1 = \frac{10}{3} e^{-\frac{2}{3}} - 1$ , und diese Koeffizienten entsprechen einem Punkte am Rande unseres genauen reellen Bereiches  $\mathfrak{G}_3^{(3)}$ .

<sup>30)</sup> und damit auch für reelle  $b_2, b_3$ .

<sup>31)</sup> Eine dem widersprechende Bemerkung in L. V. (1), die sich übrigens in der dort zitierten Literatur L. V. (4) nicht findet, ist damit hinfällig.

<sup>32)</sup> Siehe L. V. (14).

<sup>33)</sup> Es ist ja  $\Phi(x) = \Phi(-x)$ .

**30. Abschätzung des Bereiches  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  von innen her.** Wie steht es mit dem genauen Bereich des dritten Koeffizienten  $\beta_3$ ? Wir wollen ihn durch Iteration auszuschöpfen suchen. Sei  $\beta_2$  reell <sup>34)</sup>,  $\Re\beta_3 = y$ ,  $\Im\beta_3 = z$ . Zunächst können wir in jeder Ebene  $\frac{1-y}{z} = \text{ctg } \delta$ ,  $\Im\beta_2 = 0$ , die unseren Bereich  $\mathfrak{B}_*^{(3)}$  im Gebiet  $2(x^2 - 1) \leq \frac{y-1}{\cos \delta} \leq 0$  schneidet, bei den Iterationen in dieser Ebene selbst bleiben und erhalten dann genau dasselbe zu integrierende Richtungsfeld wie oben, nur alles mit der Transformation:

$$x^* = x, \quad y^* - 1 = (y - 1) \cos \delta \quad (z = (1 - y) \text{tg } \delta).$$

Wir bekommen nach denselben Überlegungen wie vorhin hier als Grenzbereich der Koeffizienten, bei allen möglichen Iterationen, solange wir bei der Iteration *in der Ebene*  $\frac{1-y}{z} = \text{ctg } \delta$  bleiben, den Bereich

$$2(\Phi(x) - 1) \leq \frac{y-1}{\cos \delta} \leq 0, \quad |\delta| < \frac{\pi}{2},$$

und haben damit auf jeden Fall folgenden Bereich  $\mathfrak{B}_1$  gefunden:

$$(30. 1) \quad \mathfrak{B}_1: \quad |y + iz - \Phi(x)| \leq 1 - \Phi(x)$$

und für ihn bewiesen:

$$\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_s^{(3)}.$$

Wir könnten für diesen Bereich  $\mathfrak{B}_1$  sogar zeigen, daß man bei beliebigen Iterationen mit *reellen*  $\beta_2$  und  $\sigma_2$  <sup>35)</sup> nirgends aus dem Bereich  $\mathfrak{B}_1$  herauskommt. (Wir wollen jedoch diesen Beweis hier nicht erbringen.) Trotzdem zeigt sich, daß  $\mathfrak{B}_1$  nicht der genaue Bereich ist, sondern daß der Bereich  $\mathfrak{B}_s^{(3)}$  über  $\mathfrak{B}_1$  hinausragt.

**31.** Dies wollen wir kurz zeigen:

Der volle vierdimensionale Bereich  $\mathfrak{B}_1^{(4)}$  <sup>36)</sup> hat in Parameterdarstellung die Begrenzungsfläche:

$$\mathfrak{F}: \quad \xi = \begin{cases} x = x_0 e^{i\vartheta} \\ y + iz = (y_0 + iz_0) e^{2i\vartheta} \end{cases}$$

mit  $y_0 + iz_0 = \Phi(x_0) - (1 - \Phi(x_0)) e^{-2i\vartheta}$  und  $0 \leq x_0 \leq 1$ ,  $0 \leq \vartheta, \delta \leq 2\pi$ .

Die Berandung von  $\mathfrak{B}_*^{(3)}$  schreibt sich:

$$\mathfrak{F}^*: \quad \xi^* = \begin{cases} \xi = \xi_0 e^{i\lambda} \\ \eta + i\zeta = (\eta_0 + i\zeta_0) e^{2i\lambda} \end{cases}$$

mit  $\eta_0 + i\zeta_0 = \xi_0^2 - (1 - \xi_0^2) e^{-2i\beta}$  und  $0 \leq \xi_0 \leq 1$ ,  $0 \leq \beta, \lambda \leq 2\pi$ .

Es sei für das folgende  $x$  wieder reell, d. h.  $\vartheta = 0$ , jedoch  $\xi$  beliebig.

Wir spannen die Tangentialvektorenmannigfaltigkeit an  $\mathfrak{F}$  durch die drei Vektoren

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = (1, (1 + e^{-2i\delta}) \Phi'), & \xi_2 &= \frac{\partial \xi}{\partial \delta} = (0, (1 - \Phi) 2ie^{-2i\delta}), \\ \xi_3 &= \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = (ix_0, 2i(y_0 + iz_0)) \end{aligned}$$

<sup>34)</sup> Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit.

<sup>35)</sup> in der Bezeichnung von Nr. 23.

<sup>36)</sup> den man aus  $\mathfrak{B}_1$  erhält durch die Gruppe:

$$x = x_0 e^{i\vartheta}, \quad y + iz = (y_0 + iz_0) e^{2i\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

auf. Fügen wir noch den vierten Vektor  $\xi_4 = (\xi - x, 2(\eta + i\zeta) - 2(y + iz))$  der Anfangsrichtung der Iterationskurve hinzu, so ist der Wert der Determinante  $D = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  [worin also für  $\xi_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)$  die betreffende Spalte

$$\begin{pmatrix} \Re u_\lambda \\ \Im u_\lambda \\ \Re v_\lambda \\ \Im v_\lambda \end{pmatrix}$$

lautet] z. B. für  $\delta = \beta = \lambda = 0$

$$D = -4x_0(1 - \Phi)[(\xi_0 - x_0)\Phi' + (2\Phi - 1) - (2\xi_0^2 - 1)] \geq 0$$

und sicher für gewisse  $x_0, \xi_0$  positiv.

Wäre unser Bereich der genaue Variabilitätsbereich, so müßte die Iterationsrichtung immer ins Innere zeigen oder höchstens die Randfläche tangieren. D. h. aber, es müßte für alle  $(x, y), (\xi, \eta)$  unsere Determinante  $D \geq 0$  sein, solange  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  linear unabhängig sind<sup>37)</sup> und daher ihren Schraubensinn nicht ändern können.

Es ist

$$\frac{2}{1 - \Phi} D = A \cos 2\delta + B \sin 2\delta + C$$

mit

$$A = -x_0[(\xi_0 \cos \lambda - x_0)\Phi' + 2\Phi - 2\xi_0^2 \cos 2\lambda],$$

$$B = -2 \sin \lambda [2x_0 \xi_0^2 \cos \lambda - \xi_0 \Phi],$$

$$C = -x_0[2(\Phi - 1) + 4 \cos^2 \lambda (1 - \xi_0^2) - 2(1 - \xi_0^2) + \Phi'(\xi_0 \cos \lambda - x_0)].$$

Dann müßte aber auch noch

$$\Delta = \text{Min}_{0 \leq \delta < 2\pi} \frac{2}{1 - \Phi} D \geq 0$$

sein. Es ist  $\Delta = C - \sqrt{A^2 + B^2}$ . Es müßte also  $A^2 + B^2 \leq C^2$  sein. Setzen wir

$$\omega = (\xi_0 \cos \lambda - x_0)\Phi' + (2\Phi - 1) - 2\xi_0^2 \cos^2 \lambda + 1,$$

so ist

$$A = -x_0(\omega - 2\xi_0^2(\cos^2 \lambda - 1)),$$

$$C = -x_0(\omega + 2(\xi_0^2 - 2)\sin^2 \lambda),$$

$$C^2 - (A^2 + B^2) = 4 \sin^2 \lambda [-2\omega x_0^2 - 4x_0^2(1 - \xi_0^2)\sin^2 \lambda - \xi_0^2(\Phi - 2x_0 \xi_0 \cos \lambda)^2].$$

Nun kann man aber bei fest gegebenem  $x_0 \neq 0$  den Wert von  $\xi_0 \cos \lambda$  so wählen, daß  $\omega = 0$  wird, dazu ist nur nötig,

$$\xi_0 \cos \lambda = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \Phi}$$

zu nehmen.

Dabei werden aber die zwei übrigen Terme in der Klammer nicht = 0, d. h. es gibt gewisse Werte  $(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)$  so, daß  $\varphi - (A^2 + B^2) < 0$  wird.

Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{B}_2$  den Bereich  $|\beta_3| \leq 1, \Re \beta_3 \geq 2\Phi(\Re \beta_2) - 1$ , so haben wir damit gezeigt:

$$\mathfrak{B}_1^4 \subset \mathfrak{B}_i^{(3)} \subseteq \mathfrak{B}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1^4 \neq \mathfrak{B}_i^{(3)}.$$

<sup>37)</sup> eine leichte Rechnung zeigt, daß dies für  $x_0 \neq 0, \neq 1, y_0 \neq 1$  der Fall ist.

32. Die Schrankenfunktionen zu  $\mathfrak{G}_s^{(8)}$ . Wir wollen noch die Schrankenfunktionen aufstellen, d. h. solche im Einheitskreis schlichte und reguläre Funktionen suchen, für welche die Koeffizienten  $\beta_2, \beta_3$  reell und auf dem Rande von  $\mathfrak{G}_s^{(8)}$  gelegen sind.

(1) Für den einen Teil des Randes  $-1 \leq \beta_2 \leq 1, \beta_3 = +1$ , gibt es elementare Schrankenfunktionen. Setzen wir die Abbildungen

$$w = \frac{z}{(1+z)^2} \quad \text{und} \quad w^* = \frac{\lambda w}{1-2\lambda w}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2,$$

zusammen, so erhalten wir die im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion

$$w^* = f(z) = \frac{z}{1+2(1-\lambda)z+z^2} = z - 2(1-\lambda)z^2 + (4(1-\lambda)^2 - 1)z^3 + \dots$$

mit

$$\beta_2 = -\frac{b_2}{2} = 1 - \lambda, \quad \beta_3 = b_2^2 - b_3 = 1.$$

(2) Für den anderen Teil des Randes (den wir nur für  $0 \leq \beta_2$  zu betrachten brauchen):

$$\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1,$$

stellen wir folgende Überlegung an. Wir suchen eine stetig eingliedrige Schar von im Einheitskreis regulären Funktionen  $f(z, \tau) = z + \dots$ ,  $\tau \geq 0$  reell, welche für  $\tau = 0$  sich auf  $f(z, 0) = \frac{z}{(1+z)^2}$  reduzieren, und welche man auseinander durch infinitesimale zweifache Radialschlitz-Iteration erhalten kann. Sei  $f(z, \tau) = z + \dots$  eine Funktion aus der Schar, so wollen wir aus ihr eine neue herleiten:

$$F(z, \tau, t) = e^t f(S^{-1}(e^{-t}S)) \quad \text{mit} \quad \frac{S}{S'} = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}, \quad \sum_{j=1}^2 \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad |\eta_j| = 1.$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, \tau, t)|_{t=0} = f(z, \tau) - f'(z, \tau) \cdot \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}.$$

Denken wir uns die Funktionen unserer Schar nacheinander durch infinitesimale Iterationen *dieser Art* auseinander entstehen, so werden wir zunächst rein heuristisch zu folgender Differentialgleichung geführt:

$$(32.1) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} f(z, \tau) = f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{1 + \eta_j z}{1 - \eta_j z}.$$

Da für eine beliebige im Einheitskreis schlichte reguläre Funktion  $f(z) = z + \dots$  die Funktionen  $f(z, \tau) = e^t f(S^{-1}(e^{-t}S))$  mit konstanten  $\lambda_j, \eta_j$  eine Lösung der Differentialgleichung (32.1) sind, so zeigt man leicht, daß jede Lösung von (32.1), worin  $\lambda_j, \eta_j$  beliebige stetige Funktionen von  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , sind und  $f(z, 0) = z + \dots$  eine schlichte reguläre Funktion ist, für jedes  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , sich durch eine Folge von  $n$ -fachen Iterierten der Form

$$e^{\tau_1 + \dots + \tau_n} f(s_1(\dots s_n(z) \dots)), \quad s_r(z) = S^{-1}(e^{-\tau_r} S), \quad \frac{S}{S'} = \sum_{j=1}^2 \lambda_j^{(v)} \frac{1 + \eta_j^{(v)} z}{1 - \eta_j^{(v)} z}$$

beliebig genau approximieren läßt<sup>38)</sup>. Wendet man noch bekannte Sätze über Schlichtheit und normale Funktionenfolgen an, so ergibt sich der

**Satz 18.** Sind für  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  die in (32.1) auftretenden Funktionen  $\lambda_j, \eta_j$  als beliebige stetige Funktionen von  $\tau$  ( $\sum \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, |\eta_j| = 1$ ) vorgegeben und ist  $f(z) = z + \dots$  eine beliebige im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion, so ist jede Lösung der Differentialgleichung für  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ , mit  $f(z, 0) = f(z)$ , eine im Einheitskreis reguläre schlichte Funktion<sup>39)</sup>.

Wir wählen für unsere Zwecke  $f(z, 0) = \frac{z}{(1+z)^2}$ ,

(32.2)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \eta_1 = \bar{\eta}_2 = \eta(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}$ .

Wir erhalten für die Koeffizienten der Lösung  $f(z, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\tau) z^{\nu}$  die Werte

$$b_0(\tau) = 0, \quad b_1(\tau) = 1 \quad \text{für alle } 0 \leq \tau \leq \tau_0,$$

ferner, wenn wir die Ableitungen nach  $\tau$  mit Punkten bezeichnen:

$$\dot{b}_2 = -b_2 - 2 \cos \vartheta,$$

$$\dot{b}_3 = -2b_3 - 4b_2 \cos \vartheta - 2 \cos 2\vartheta,$$

$$\dot{\beta}_2 = -\frac{\dot{b}_2}{2} = -\beta_2 + \cos \vartheta,$$

$$\dot{\beta}_3 = (b_2^2 - b_3) = -2\beta_3 + 2 \cos 2\vartheta$$

und durch Integration (mit den Anfangsbedingungen  $\beta_2(0) = \beta_3(0) = 1$ ):

$$e^{\tau} \beta_2(\tau) - 1 = \int_0^{\tau} e^{\tau} \cos \vartheta d\tau,$$

$$e^{2\tau} \beta_3(\tau) - 1 = 2 \int_0^{\tau} e^{2\tau} \cos 2\vartheta d\tau.$$

Wir setzen speziell:

(32.3)  $\cos \vartheta = e^{-\tau}$ .

(Dies wird durch die Betrachtung der extremalen Richtung der infinitesimalen Iteration nahe gelegt. Schreiben wir nämlich

$$\frac{f}{f'} = z + 2 \sum_2^{\infty} \beta_{\nu} z^{\nu}, \quad \frac{S}{S'} = z + 2 \sum_2^{\infty} \cos(\nu-1)\vartheta z^{\nu},$$

$$F(z, t) = e^t f(S^{-1}(e^{-t} S)), \quad \frac{F}{F'} = z + 2 \sum_2^{\infty} B_{\nu} z^{\nu},$$

so erhalten wir im Anschluß an die Betrachtungen in Nr. 27 für die extremale Iterationsrichtung für einen Punkt am Rande des Bereiches ( $t = 0$ ), wenn wir  $\cos \vartheta = \sigma$  setzen:

$$\sigma = \beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{dt} B_2\right)_{t=0} = -\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}},$$

<sup>38)</sup> Vergleiche den Beweis in Nr. 2.

<sup>39)</sup> Natürlich läßt sich dieser Satz wörtlich für beliebige  $p$ -fache Radialschlitz-Iterationen aussprechen und beweisen (mit denselben Formeln, in denen nur  $j = 1, \dots, p$  läuft). Doch haben wir an dieser Stelle kein Interesse daran.



und hieraus unter Benutzung der Gleichung  $\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1$  sowie der zu postulierenden

Relation  $d\beta = \left(\frac{d}{dt} B_2\right)_{t=0} dt$ :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}}} = -dt, \quad \sigma = e^{-t}.$$

Mit (32. 3) wird nun

$$\begin{aligned} \beta_2 &= (1 + \tau) e^{-\tau}, & \dot{\beta}_2 &= -\tau e^{-\tau}. \\ \beta_3 &= 2(1 + 2\tau) e^{-2\tau} - 1, & \dot{\beta}_3 &= -8\tau e^{-2\tau}. \end{aligned}$$

Man berechnet ferner:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{\dot{\beta}_3}{\dot{\beta}_2} = 8e^{-\tau}, \quad \beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2} = \tau^2 e^{-2\tau}, \quad \beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3 + 1}{2}} = e^{-\tau}.$$

Also ist die Differentialgleichung (27. 2) erfüllt und weil diese (bei positiv genommener Wurzel) für die Anfangsbedingungen  $\beta_2 = \beta_3 = 1$  nur eine Lösung hat, so ist:

$$\beta_3 = 2\Phi(\beta_2) - 1.$$

Wir haben damit, wenn wir noch in (32. 1) die speziellen Werte (32. 2) und  $\cos \vartheta = e^{-\tau}$  einsetzen, sowie den neuen Parameter

$$\sigma = \cos \vartheta = e^{-\tau}, \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

einführen, das *Ergebnis*: Die für jedes  $\sigma$ ,  $0 < \sigma \leq 1$ , eindeutig bestimmte Lösung  $f(z, \sigma) = z + b_2 z^2 + \dots$  der partiellen Differentialgleichung:

(32. 4)

$$\sigma f_\sigma - f_z \frac{z(1-z^2)}{1-2\sigma z+z^2} + f = 0$$

mit der Anfangsbedingung  $f(z, 1) = \frac{z}{(1+z)^2}$  ( $\sigma = 1$ ), ist erstens eine im Einheitskreis reguläre und schlichte Funktion, und zweitens gelten für sie die Gleichungen:

$$-\frac{b_2}{2} = \beta_2 = (1 - \lg \sigma) \sigma \quad (\sigma = e^{-\tau}),$$

$$b_2^2 - b_3 = \beta_3 = 2(1 - 2 \lg \sigma) \sigma^2 - 1 = 2\Phi(\beta_2) - 1,$$

d. h. sie ist für jedes  $\sigma$  *Schrankenfunktion* für den unter (2) betrachteten Teil des Randes von  $\mathfrak{G}_\sigma^{(8)}$ .

**33. Integration von (32. 4).** Die Differentialgleichung (32. 4) läßt sich durch Quadraturen lösen; man hat als Gleichungssystem für die Charakteristiken ( $e^x = H$  gesetzt):

$$(33. 1) \quad \frac{d\sigma}{dH} = -\sigma,$$

$$(33. 2) \quad z(z^2 - 1) \frac{d\sigma}{dz} = \sigma(1 - 2\sigma z + z^2);$$

letztere liefert eine lineare Differentialgleichung für  $\kappa = \frac{1}{\sigma}$ :

$$z(z^2 - 1) \kappa' + (1 + z^2) \kappa - 2z = 0, \quad \kappa' = \frac{d\kappa}{dz}.$$

Hieraus erhalten wir

$$(\log v \equiv) \frac{1 - z^2}{\sigma z} + 2 \log z = \text{const.}$$

Aus (33. 1) folgt

$$\sigma \cdot e^H = \text{const.}$$

Aus diesen beiden unabhängigen Integralen setzen wir unsere Lösung zusammen:

$$(33. 3) \quad \sigma F - \psi(v) = 0.$$

$\sigma = 1$  liefert die Bedingung

$$(33. 4) \quad \frac{z}{(1+z)^2} = \psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{z}}\right),$$

d. h. für die Umkehrfunktion  $w^{-1} = \varphi$  ist, wenn wir  $\frac{z}{(1+z)^2} = \zeta$  setzen:

$$\varphi(\zeta) = z^2 \cdot e^{\frac{1-z^2}{z}} = \frac{1}{2\zeta^2} [1 - 4\zeta + 2\zeta^2 - (1 - 2\zeta)\sqrt{1 - 4\zeta}] e^{\frac{\sqrt{1-4\zeta}}{\zeta}}.$$

Damit ist auch  $\psi(v)$  bekannt, wir erhalten schließlich aus (33. 3) die Schrankenfunktion ( $0 < \sigma \leq 1$ ):

$$F(z, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \psi\left(z^2 e^{\frac{1-z^2}{\sigma z}}\right) = z - 2(1 - \lg \sigma) \sigma z^2 + (2(1 - 2 \lg \sigma + 2(\lg \sigma)^2) \sigma^2 + 1) z^3 + \dots$$

(Für  $(\beta_2, \beta_3) = (0, -1)$  genügt es,  $\frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + \dots$  zu betrachten.)

### Literaturverzeichnis.

#### 1. Zusammenfassende Darstellungen:

- (1) L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen in der Theorie der konformen Abbildung, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II, 3, 1, 382—532.
  - (2) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, Leipzig 1931.
  - (3) P. Montel-F. Marty, Leçons sur les fonctions univalentes, Paris 1933.
2. Einzeldarstellungen (bis etwa Anfang 1935), vor allem:
- (4) L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitz. Ber. Berliner Akademie 1916, 941—955.
  - (5) L. Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rendic. Palermo 38 (1914), 98—112.
  - (6) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rendiconti Palermo 32 (1911), 1—25.
  - (7) J. Dieudonné, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, Annales de l'Ecole Normale supérieure 58 (1931), 247—358.
  - (8) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. 89 (1923), 103—121.
  - (9) W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift 35 (1932), 93—121.  
sowie:
  - (10) L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildungen, Math. Annalen 77 (1916), 153—172.
  - (11) L. Bieberbach, Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen, Math. Zeitschrift 4 (1919), 295—305.
  - (12) L. Bieberbach, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Bull. of the Calcutta Math. Soc. 20 (1928), 17—20.
  - (13) G. Faber, Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung, Sitz.-Ber. Akademie München 1916, 39—42.
  - (14) M. Fekete-G. Szegő, Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, Journal London Math. Soc. 8 (1933), 85—89.
  - (15) Grandjot, siehe (32).

- (16) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schriften des math. Seminars u. des Institutes für angewandte Mathematik der Universität Berlin **1** (1932), 95—140.
- (17) H. Grunsky, Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, Jahresber. d. D. M. V. **43** (1934), 140.
- (17a) G. Koenigs, Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles, Annales de l'Ecole Normale (3) **1** (1884), Supplément.
- (18) E. Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, Math. Zeitschr. **30** (1929), 608—634.
- (19) E. Landau, Über ungerade schlichte Funktionen, Math. Zeitschr. **37** (1933), 33—35.
- (20) V. Lewin, Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen, Math. Zeitschr. **38** (1934), 307—311.
- (21) V. Lewin, Über die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen, Math. Zeitschr. **38** (1934), 565—590.
- (22) A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Annalen **107** (1932), 49.
- (23) Paley-Little, A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, Journal of London Math. Soc. **7** (1932), 167—169.
- (24) G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz, Leipziger Berichte **68** (1916), 58—64.
- (25) G. Pick, Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet, Wiener Berichte (Abtlg. IIa) **126** (1917), 47—263 (1—17).
- (26) Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis **2** (Berlin 1925), 4. Abschnitt, 2. Kapitel.
- (27) H. Prawitz, Über Mittelwerte analytischer Funktionen, Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik **20** (1927/28) Nr. 6, S. 8.
- (28) J. Privaloff, Sur les fonctions qui donnent la représentation conforme bi-univoque, Recueil soc. math. de Moscou **31** (1924), 350—365 (russisch mit französischem Auszug).
- (29) L. Spaček, Contribution à la théorie des fonctions univalentes, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **62** (1932), 12.
- (30) E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie **2** (Konforme Abbildung einfachzusammenhängender Bereiche), Leipzig 1913 (bes. S. 109).
- (31) Strohäcker, Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Zeitschrift **37** (1934), 372.
- (32) Szegő, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Math. Annalen **100** (1928), 188—211 (hierin auch Beitrag von Grandjot).

Das Literaturverzeichnis macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Vor allem sei deswegen noch einmal auf (3), sowie für die ältere Literatur auf (1) verwiesen.

---

Eingegangen 10. Juni 1936.