Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

Eine der ersten Fragen in der, von einer Ordnungsdefinition aus orientierten, Strukturtheorie reeller Gebilde ist die nach den ordnungshomogenen Bestandteilen. Bei den Kurven darf diese Frage für eine Anzahl der in Betracht kommenden Fälle als im wesentlichen erledigt gelten [1]). Für Gebilde höherer Dimension ist dagegen in dieser Richtung bis jetzt noch wenig bekannt. Die folgenden Zeilen wollen einen ersten Beitrag zu diesen letzteren Problemen liefern [2]).

In einer vorangehenden Arbeit [3]) war für den Fall der Kurven und $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen im (projektiven) R_n folgende Frage behandelt worden: *Welche Einschränkungen bezüglich der lokalen Ordnung zieht die Voraussetzung hinreichend oftmaliger Differenzierbarkeit nach sich?* Es zeigte sich, daß — jeweils bis auf eine nirgends dichte Punktmenge — die Ordnung eines jeden Punktes bei Kurven gleich n, bei (Hyper-) Flächen, abgesehen von einer Klasse wohl definierter Ausnahmeflächen, mindestens gleich 2 und höchstens gleich n ist. M. a. W.: Die ordnungshomogenen Teilbogen sind von der Ordnung n, die ordnungshomogenen Hyperflächenstücke von höchstens der Ordnung n. Diese Tatsache, daß nämlich — mindestens unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen — die bei ordnungshomogenen Gebilden möglichen Ordnungen sehr wenig zahlreich sind, ergab eine erste Rechtfertigung des Begriffes „ordnungshomogen", jedenfalls für Kurven und (Hyper-)Flächen.

Schon seinerzeit wurde darauf hingewiesen, daß die soeben erwähnte Frage als Spezialfall in der folgenden enthalten sei: Gegeben sei im R_n mit $n \geqq 2$ ein „*k-dimensionales Flächenstück*" F_k (ein eindeutiges stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels) mit $1 \leqq k \leqq n-1$. Wir definieren die (hier stets beschränkte) *Ordnung* von F_k als maximale Mächtigkeit des Durchschnittes des F_k mit den linearen, $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} (jeder Punkt des Durchschnittes braucht für unsere Zwecke nur einfach gezählt zu werden); *dabei darf aber von einer gewissen* (später (vgl. Nr. 1, 21) noch zu definierenden) *im Raume aller L_{n-k} nirgends dichten* (*abgeschlossenen*) *Menge von L_{n-k}*

[1]) Vgl. O. Haupt, Strukturprobleme bei reellen Gebilden, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1935, S. 183ff.

[2]) Vgl. eine Voranzeige der in vorliegender Arbeit erhaltenen Ergebnisse, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen **65** (1934), S. 95/96.

[3]) O. Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Crelles Journal **169** (1933), S. 177ff. — Zu Seite 185, Zeile 1 bis 4 von unten ist zu ergänzen: Hat man *allgemein* eine „geradlinige" Hyperfläche $x_\nu = p_\nu(t_1, \ldots, t_{n-2}) + t q_\nu(t_1, \ldots, t_{n-2})$, $\nu = 1, \ldots, n$, (welche die Darstellung $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ gestattet), so folgt unter den entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen wieder $\Phi_\nu = 0$.

abgesehen werden. Die Vernachlässigung solcher Ausnahmemengen bei der Ordnungsdefinition liegt durchaus in der Natur der Sache. In der Tat wird man schon im Falle der ebenen Kurven letzten Endes zu derartigen Maßnahmen veranlaßt: falls nämlich die Ordnung als maximale *Schnitt*punktzahl definiert wird, also zunächst diejenigen Geraden, welche Stützpunkte oder geradlinige Teilbogen tragen, ausgeschlossen bzw. erst hinterher durch geeignete Festsetzungen einbezogen werden. Gefragt wird: Welche Ordnungen können bei ordnungshomogenen F_k auftreten, sobald nur über die F_k gewisse (später genau anzugebende) Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden?

Diese Frage wird nachstehend beantwortet. Zunächst (§ 1) werden wir Beispiele von F_k angeben, welche ordnungshomogen sind von einer Ordnung m und wobei m irgendeiner der ganzen Zahlen $(n-k+1)$, $(n-k+2), \ldots, (k(n-k)+1)$ gleich sein darf $(2 \leqq n, 1 \leqq k \leqq n-1)$. Diese Beispiele sind sogar *algebraisch*; genauer gesagt sind die Koordinaten x_ν der Punkte dieser F_k darstellbar als *Polynome* in $x_1, \ldots, x_k$ als Parameter: die F_k besitzt, wie wir sagen wollen, nur *Punkte von rationalem Charakter.* Die oben angegebene maximale Ordnung $(k(n-k)+1)$ zeigt volle Symmetrie in k und $(n-k)$, bleibt also bei „Dualisierung" unverändert. Im § 3 ergibt sich dann, daß *unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen* die in § 1 an Beispielen gefundenen Höchstordnungen $(k(n-k)+1)$ der ordnungshomogenen Elemente auch *genau* sind, d. h. im allgemeinen nicht überschritten werden. „Im allgemeinen" besagt: abgesehen von gewissen F_k, welche einem in § 3 angegebenen (von n und k abhängigen) Systeme partieller Differentialgleichungen genügen müssen. Aus dem Vorstehenden folgt übrigens unmittelbar, *daß unsere Differenzierbarkeitsforderung das Auftreten ordnungshomogener Gebilde von unendlicher Ordnung im allgemeinen ausschließt.* Die eben erwähnten Differentialgleichungen bzw. die ihnen genügenden k-dimensionalen Ausnahme-Flächenstücke haben als die Verallgemeinerung der geradlinigen F_2 im R_3 zu gelten; sie werden (bezüglich ihrer Ordnung) hier noch nicht näher untersucht, da dies für die gegenwärtigen Zwecke erst in zweiter Linie von Interesse ist.

Man sieht, wie für $k=1$ und $k=n-1$ die früher gewonnenen Ergebnisse sich einordnen. Die in vorliegender Arbeit angegebenen (algebraischen) Beispiele sind aber auch für $k=n-1$ von uns früher noch nicht angeführt worden; insbesondere erhalten wir jetzt auch Beispiele von $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächenstücken im R_n, welche von der Ordnung ν sind; dabei kann die ganze Zahl ν beliebig zwischen 2 und n gewählt werden $(2 \leqq \nu \leqq n)$.

Wir bemerken noch: Für $k=1$, $n=2$ weiß man, daß die vorstehend erwähnten, auf ordnungshomogene Gebilde bezüglichen Ergebnisse für *jede* Kurve endlicher Ordnung (also auch ohne jede Differenzierbarkeitsbedingung) gelten. Es liegt die Vermutung nahe, daß dies für beliebiges n und k ebenfalls zutrifft.

Schließlich bringt der § 2 Beispiele für Ordnungen, die in *einzelnen* Punkten auftreten können. Im Falle $k=1$ weiß man nun, daß die Ordnungen $n, n+1, \ldots, 2n-1$ die einzigen sind, welchen Punkte rationalen Charakters auf einer algebraischen Kurve entsprechen können und (bei geeigneter Wahl der Kurve) auch wirklich entsprechen; es sind das genau die Ordnungen, auf die wir auch im folgenden (§ 2) für $k=1$ stoßen werden und die mit dem von uns benutzten Beispieltypus nicht überschritten werden können. Es darf daher vermutet werden, daß auch für beliebiges k (mit $2 \leqq k \leqq n-1$) die von uns erreichten Ordnungen $(n-k+1), \ldots, (2(k(n-k)+1)-1)$ die einzigen sind, welche bei Punkten von rationalem Charakter auf algebraischen F_k auftreten können. Weiter weiß man im Falle $k=1$, daß bei Zulassung von Punkten nicht-rationalen Charakters höchstens die Ordnung $2n$ erreicht werden kann. Angesichts unserer

Ergebnisse könnte man dementsprechend vermuten, daß auch für beliebiges k bei Zulassung von Punkten nicht-rationalen Charakters die Ordnung eines Punktes auf algebraischen F_k nicht größer sein kann als $2(k(n-k)+1)$.

Die für den Fall $k = 1$ genannten Ergebnisse gelten übrigens nicht nur für algebraische Kurven, sondern allgemeiner für *elementare*, d. h. für Kurven des R_n, welche darstellbar sind als Summen endlich vieler ordnungshomogener Bogen von endlicher (d. h. n-ter) Ordnung [4]). Vielleicht gilt Entsprechendes auch im R_n für $2 \leqq k$.

Die soeben skizzierten Gedankengänge führen noch zu einer weiteren, hier aber nicht weiter zu verfolgenden, Frage, die unter hinreichend starken Differenzierbarkeitsannahmen am einfachsten Falle $n = 3$, $k = 2$ erläutert sei. Von den beiden in diesem Falle auftretenden Arten ordnungshomogener Flächenstücke (von den geradlinigen Flächenstücken sehen wir der Einfachheit wegen ab) sind die von zweiter Ordnung identisch mit den konvexen, besitzen also überall eine elliptische Indikatrix; hingegen besitzen die ordnungshomogenen Flächenstücke dritter Ordnung überall eine hyperbolische Indikatrix [5]). Wenn man also schon weiß, daß unser Flächenstück (im R_3) ordnungshomogen ist, so gibt der Trägheitsindex der Indikatrix die genaue Ordnung des Flächenstückes. Es wird nun zu untersuchen sein, wie sich diese Bemerkung auf den Fall beliebiger n und k verallgemeinern läßt.

Bezüglich der Einordnung der in vorliegender Arbeit behandelten Fragen in die allgemeine Strukturtheorie reeller Gebilde kann auf frühere Ausführungen[1]) verwiesen werden.

§ 1. Existenz k-dimensionaler algebraischer ordnungshomogener Gebilde im R_n der Ordnungen $(n-k+1)$ bis $(k(n-k)+1)$.

Wir konstruieren also zunächst Beispiele von algebraischen, k-dimensionalen, ordnungshomogenen Gebilden. Und zwar behandeln wir in Nr. **1**, 1—**1**, 5 gewisse Sonderfälle, welche auch an und für sich von Interesse sind und bei welchen der Gedankengang der Konstruktion besonders deutlich wird. Eine geringe Abänderung der Konstruktion führt dann (Nr. **1**, 6) zu Beispielen allgemeinerer Art.

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten im R_n, wobei $n \geqq 3$. Ferner sei k eine natürliche Zahl mit $2 \leqq k \leqq n-1$; im Falle $k = 1$ ist, wie schon früher [3]) gezeigt, nur die Ordnung $n = 1 \cdot (n-1) + 1$ möglich, weshalb für $k = 1$ die Konstruktion von Beispielen ordnungshomogener Gebilde überflüssig wird (denn jedes eindimensionale Gebilde enthält ordnungshomogene Teile).

1, 1. *Vorerst sei* $2k < n$, also $k < n - k$. Wir betrachten dann eine k-dimensionale (algebraische) Mannigfaltigkeit F_k, welche definiert ist durch:

$$(F) \qquad \begin{array}{lll} x_{k+1} & = x_1^m + x_1^{\tau_2} x_2 + \cdots + x_1^{\tau_k} x_k \\ x_{k+2} & = x_1^2 + x_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{2k} & = x_1^k & \qquad\qquad\qquad + x_k \\ x_{2k+1} & = x_1^{k+1} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n & = x_1^{n-k}\,. \end{array}$$

[4]) Vgl. F. Denk, Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen **67** (1935), S. 1ff.

[5]) Man vgl. für den Fall der konvexen Flächenstücke ($n = 3$, $k = 2$) die wichtige Arbeit der Herren H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math. **66** (1935), S. 1ff. Dort werden keinerlei Differenzierbarkeitsannahmen gemacht.

Dabei sollen $m, \tau_2, \ldots, \tau_k$ natürliche Zahlen (einschließlich der Null) sein, welche — unbeschadet weiterer Einschränkungen — folgenden Bedingungen genügen:

$$(1) \qquad n-k+1 \leqq m, \quad 0 \leqq \tau_\varkappa + (n-k) < m, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Die durch (F) definierte Mannigfaltigkeit ist k-dimensional sogar in dem Sinne, daß die Umgebung eines jeden ihrer Punkte (bis auf höchstens eine auf F_k nirgends dichte Ausnahmemenge) ein topologisches Bild des k-dimensionalen Würfels ist. In der Tat ist die Funktionaldeterminante der k ersten Gleichungen (F) gleich

$$m x_1^{m-1} + \tau_2 x_1^{\tau_2-1} x_2 + \cdots + \tau_k x_1^{\tau_k-1} x_k - 2x_1^{\tau_2+1} - \cdots - k x_1^{\tau_k+k-1},$$

also nicht identisch Null; denn wegen $2 \leqq k < n-k$ und wegen (1) gilt:

$$m-1 > \tau_k + (n-k) - 1 > \tau_k + k - 1 > 0.$$

Die Funktionalmatrix von (F) hat also nicht identisch einen Rang kleiner als k; und die Menge der Punkte, in welchen der Rang kleiner ist als k, liegt nirgends dicht auf F_k.

Zur Bestimmung der Ordnung von F_k in ihren einzelnen Punkten beschränken wir uns auf die Betrachtung derjenigen linearen $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} des R_n, deren Gleichungen sich in die Gestalt setzen lassen:

$$\text{(L)} \qquad x_{k+j} = \bar{L}_j(x_1, x_2, \ldots, x_k; x_{2k+1}, \ldots, x_n)$$
$$= \bar{a}_{j0} + \bar{a}_{j1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{jk} x_k + \bar{a}_{j\,2k+1} x_{2k+1} + \cdots + \bar{a}_{jn} x_n, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Dabei soll also $||\bar{a}_{j1}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn}||$ den Rang k besitzen.

Diese Beschränkung rechtfertigt sich wie folgt: Es sei L' eine *beliebige* $(n-k)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit des R_n, definiert durch ein System S linearer Gleichungen in den $x_1, \ldots, x_n$ vom Range k. Ist dann S keinem System der Form (L) linear äquivalent [6]), so erhält man doch durch eine beliebig kleine Änderung der Koeffizienten von S ein System, welches einem System der Form (L) linear äquivalent ist. Die den (L) (und den ihnen äquivalenten) zugeordneten L_{n-k} liegen also dicht in der auf geeignete Weise als Umgebungsraum erklärten [7]) Menge aller linearen $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k}. Überdies kann ein Gleichungssystem der Form (L) durch hinreichend kleine Änderung der Koeffizienten nur in ein zu einem (L) linear äquivalentes System übergeführt werden. Die L_{n-k} der Form (L) bilden daher sogar eine im Umgebungsraume *aller* L_{n-k} offene Menge (welche überdies im besagten Raume dicht liegt). Entsprechend der in der Einleitung in Aussicht genommenen Ordnungsdefinition werden wir daher zunächst von den zu (L) *nicht* linear-äquivalenten L_{n-k} absehen und — vorbehaltlich einer weiteren Modifikation (Nr. **1**, 21) — als *Ordnung von* F_k die maximale Mächtigkeit der Durchschnitte von F_k mit einer in der Gestalt (L) darstellbaren linearen L_{n-k} bezeichnen.

1, 2. Wir behaupten nun:

Für $n-k+1 \leqq m \leqq k(n-k)+1$ *und bei geeignet gewählten* $\tau_2, \ldots, \tau_k$ *ist die Ordnung der durch* (F) *definierten* F_k *in jedem Punkte genau gleich* m.

Dabei ist zunächst noch $k < n-k$ angenommen $(k \geqq 2)$; für $k \geqq n-k$ vgl. Nr. **1**, 3.

---

[6]) Zwei Systeme $S^{(1)}, S^{(2)}$ von linearen Gleichungen $E_\nu^{(j)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(j = 1, 2;\ \nu = 1, \ldots, n_j)$ heißen linear äquivalent, wenn die entsprechenden Systeme $E_\nu^{(1)}(x_1, \ldots, x_n)$ und $E_\nu^{(2)}(x_1, \ldots, x_n)$ von linearen Funktionen eine gemeinsame Linearbasis besitzen.

[7]) Etwa durch Deutung des Systems aller Koeffizienten (in dem die L_{n-k} darstellenden Gleichungsssyteme) als „Koordinate" der L_{n-k}.

1, 21. *Beweis.* Durch die letzten $n - 2k$ Gleichungen von (F) sind die $x_{2k+\varrho}$ je als lineare Funktionen von $x_1^{k+\varrho}$ bestimmt; dabei ist $1 \leqq \varrho \leqq n - 2k$. Setzt man dies in (L) ein, so ergibt sich

$$(\bar{\mathrm{L}}) \qquad x_{k+j} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \bar{a}_{j\varkappa} x_\varkappa + \sum_{\varrho=1}^{n-2k} \bar{a}_{j\,2k+\varrho} x_1^{k+\varrho} + \bar{a}_{j0}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Setzt man in $(\bar{\mathrm{L}})$ für $x_{k+2}, \ldots, x_{2k}$ die rechten Seiten der noch nicht benutzten Gleichungen von (F) (mit Ausnahme der ersten) ein, so folgt aus den $k - 1$ letzten Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}})$:

$$(\mathrm{L}^*) \qquad x_1^j - \bar{a}_{j1} x_1 - \bar{a}_{j0} - \left(\sum_{\varrho=1}^{n-2k} \bar{a}_{j\,2k+\varrho} x_1^{k+\varrho}\right) = \sum_{\varkappa=2}^{k} (\bar{a}_{j\varkappa} - \delta_{j\varkappa}) x_\varkappa;$$
$$j = 2, \ldots, k; \quad \text{also } k \geqq 2.$$

Dabei ist noch $\delta_{j\varkappa} = 0$ für $j \neq \varkappa$ und $\delta_{j\varkappa} = 1$ für $j = \varkappa$. Nun ist (L*) ein System aus $k - 1$ in den $x_2, \ldots, x_k$ linearen Gleichungen; seine Matrix ist durch

$$\| \bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{j\,n} \|, \qquad j = 2, \ldots, k,$$

eindeutig bestimmt.

Diejenigen (L), für welche die (L*) eindeutig nach $x_2, \ldots, x_k$ auflösbar sind, liefern eine im Raume der L_{n-k} dichte offene Menge. *Wir werden uns für die Ordnungsdefinition auf die Betrachtung dieser L_{n-k} beschränken.* Wir können dann statt (L*) schreiben:

$$(\mathrm{L}_*) \qquad x_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Die $(k - 1)(n - k + 1)$ Koeffizienten $b_{\varkappa\varrho}$ ($\varkappa = 2, \ldots, k$; $\varrho = 0, \ldots, n - k$) in (L_*) sind dabei vermittelst (L*) durch die $(k - 1)(n - k + 1)$ Koeffizienten

$$\bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jk}, \quad \bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn}, \qquad j = 2, \ldots, k,$$

eindeutig bestimmt. *Umgekehrt sind durch Vorgabe der $b_{\varkappa\varrho}$ ($\varkappa = 2, \ldots, k$; $\varrho = 0, \ldots, n - k$) diese $\bar{a}_{j0}, \ldots, \bar{a}_{jn}$ eindeutig bestimmt, sobald nur die Determinante*

$$|M| = \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Diese letzte Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen den $b_{\varkappa\varrho}$ und $\bar{a}_{j\tau}$. Um diesen zu finden, setzen wir für die $x_2, \ldots, x_k$ in (L*) die rechten Seiten von (L_*) ein und ordnen nach Potenzen von x_1. Dann ergibt sich:

$$\sum_{\varrho=0}^{n-k} x_1^\varrho \left[- \delta_{\varrho 0} \bar{a}_{j0} - \delta_{\varrho 1} \bar{a}_{j1} + \delta_{\varrho j} - \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\, k+\sigma} \bar{a}_{j\,2k+\sigma}\right] = \sum_{\varrho=0}^{n-k} x_1^\varrho \left[\sum_{\varkappa=2}^{k} (\bar{a}_{j\varkappa} - \delta_{j\varkappa}) b_{\varkappa\varrho}\right];$$
$$j = 2, \ldots, k.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten rechts und links zeigt für $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$, daß $\bar{a}_{j0}$ und $\bar{a}_{j1}$ durch die $b_{\varkappa 0}$, $b_{\varkappa 1}$ und die übrigen $\bar{a}_{j\tau}$ eindeutig bestimmt werden ($\varkappa = 2, \ldots, k$; $j = 2, \ldots, k$). Für diese übrigen $\bar{a}_{j\tau}$, also für $\tau = 2, \ldots, k$; $2k + 1, \ldots, n$, ergibt sich ebenso:

$$\delta_{\varrho j} + \left(\sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho} \delta_{j\varkappa}\right) = \sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho} \bar{a}_{j\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\, k+\sigma} \bar{a}_{j\,2k+\sigma}, \qquad \varrho = 2, \ldots, n - k; \; j = 2, \ldots, k.$$

Die quadratische Matrix der Koeffizienten der $\bar{a}_{j\varrho}$ ($\varrho = 2, \ldots, k$; $2k + 1, \ldots, n$) ist somit

$$M = \begin{Vmatrix} b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{k2} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{k3} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{2k} & b_{3k} & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2\,k+1} & b_{3\,k+1} & \cdots & b_{k\,k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{2\,n-k} & b_{3\,n-k} & \cdots & b_{k\,n-k} & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$$

und die Determinante von M ist

$$|M| = \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{k2} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{2k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}.$$

1, 22. In der vorstehenden Betrachtung (Nr. 1, 21) war die erste Gleichung des Systems ($\overline{\mathrm{L}}$) gar nicht herangezogen worden. Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung für $x_2, \ldots, x_k$ ihre Ausdrücke aus (L_*) ein, so ergibt sich:

$$(\mathrm{L}_*^1) \qquad x_{k+1} = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k+1\,\varrho}\, x_1^\varrho\,,$$

wobei

$$(\mathrm{B}_{k+1}) \quad b_{k+1\,\varrho} = \delta_{\varrho 0}\bar{a}_{10} + \delta_{\varrho 1}\bar{a}_{11} + \sum_{\varkappa=2}^{k} b_{\varkappa\varrho}\bar{a}_{1\varkappa} + \sum_{\sigma=1}^{n-2k} \delta_{\varrho\, k+\sigma}\bar{a}_{1\,2k+\sigma}, \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, n-k.$$

Man kann nun mit Hilfe des Systems (B_{k+1}) *bei beliebig vorgegebenen* $b_{i\varrho}$ ($i = 2, \ldots, k+1$; $\varrho = 0, 1, \ldots, n-k$) *die* $\bar{a}_{1\varkappa}$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, k$; $2k+1, \ldots, n$) *bestimmen und zwar eindeutig, sobald nur, wie vorausgesetzt,* $|M| \neq 0$.

In der Tat ist ja in (B_{k+1}) die Koeffizientenmatrix bezüglich der $\bar{a}_{12}, \ldots, \bar{a}_{1k}$; $\bar{a}_{1\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{1n}$ genau gleich M. Und nach Bestimmung dieser $\bar{a}_{12}, \ldots$ sind dann $\bar{a}_{10}$ und $\bar{a}_{11}$ ersichtlich auch eindeutig bestimmt.

Durch unsere $b_{\varkappa\varrho}$ *wird also eineindeutig eine in der Gestalt* (L) *darstellbare* L_{n-k} *bestimmt, sobald nur* $|M| \neq 0$ *ist. Dies Letztere wird im folgenden stets vorausgesetzt.*

1, 23. Nunmehr können wir aus der noch nicht benutzten *ersten* Gleichung von (F) die $x_2, \ldots, x_{k+1}$ mit Hilfe von (L_*) und (L_*^1) eliminieren. Wir erhalten so eine algebraische Gleichung in x_1 allein, nämlich:

$$x_1^m + x_1^{\tau_2}\Big(\sum_{\varrho=0}^{n-1} b_{2\varrho} x_1^\varrho\Big) + \cdots + x_1^{\tau_k}\Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k\varrho} x_1^\varrho\Big) - \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{k+1\,\varrho} x_1^\varrho = 0.$$

Dies ist aber eine Gleichung vom Grade m in x_1. Da sie nicht mehr als m reelle Nullstellen besitzt, so kann die F_k höchstens von der Ordnung m sein.

Um zu beweisen, daß die vorgelegte F_k bei passender Wahl der $\tau_2, \ldots, \tau_k$ in jedem ihrer Punkte P_0 von der Ordnung m ist, haben wir festzustellen: Für geeignet gewählte $b_{j\varrho}$ besitzt die obige Gleichung m-ten Grades genau m reelle verschiedene Nullstellen, welchen m verschiedene, in beliebig vorgeschriebener Nähe von P_0 gelegene Punkte des Durchschnittes einer L_{n-k} von der Form (L) mit der F_k entsprechen. Zu dem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor: Es sei $P_0 = (x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n)$ der gegebene Punkt. Soll P_0 auf der F_k liegen, so *müssen* $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ *vermöge* (F) *durch* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *bestimmt sein.* Außerdem sollen L_{n-k} von der Gestalt (L) durch zu P_0 beliebig benachbarte und zugleich auf F_k gelegene Punkte gehen. Um letzteres zu erreichen, verlangen wir von den $b_{j\varrho}$ zunächst, daß

$$(\mathrm{A}^*) \qquad \xi_j = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, k.$$

(A*) ist gleichwertig mit

$$(\mathrm{A}^*_*) \qquad b_{j0} = \xi_j - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, k.$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten von (A^*_*) in die obige Gleichung m-ten Grades folgt:

$$(\mathrm{G}_m) \quad G_m(x_1) = x_1^m + \sum_{j=2}^{k} x_1^{\tau_j}\left\{\left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}x_1^\varrho\right) + \left(\xi_j - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{j\varrho}\xi_1^\varrho\right)\right\} - b_{k+1\,0} - \left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{k+1\,\varrho}\, x_1^\varrho\right) = 0.$$

Wir werden jetzt zeigen: Man kann bei gegebenen n, m, k, sowie bei passender Verfügung über $\tau_2, \ldots, \tau_k$, die in $G_m(x_1)$ auftretenden $b_{k+1\,0}$; $b_{j\varrho}$ ($j = 2, \ldots, k+1$; $\varrho = 1, \ldots, n-k$) so wählen, daß $G_m(x_1) = 0$ genau m reelle verschiedene Nullstellen x_1 besitzt, die in beliebig vorgeschriebener Nähe von ξ_1 liegen. Wegen (A*) und (A^*_*) liegen dann auch die aus (L_*) zu berechnenden $x_2, \ldots, x_k$ in beliebiger Nähe der $\xi_2, \ldots, \xi_k$. Die aus (F) sich ergebenden $x_{k+1}, \ldots, x_n$ liegen dann ebenfalls beliebig nahe bei $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, und außerdem liegt der so gefundene Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ nicht nur auf (F), sondern auch auf der mit den (geeignet gewählten) $b_{j\varrho}$ gebildeten und durch sie definierten L_{n-k}, falls eine solche existiert.

1, 24. Bei der in Nr. **1**, 23 skizzierten Konstruktion der Koeffizienten von $G_m(x_1)$ waren die $b_{k+1\,0}$ und $b_{j\varrho}$ ($j = 2, \ldots, k+1$; $\varrho = 1, \ldots, n-k$) zunächst nur unter Rücksicht darauf gewählt worden, daß $G_m(x_1)$ lauter reelle Nullstellen besitze. Bei hinreichend kleiner Abänderung aller dieser $b_{j\tau}$ oder auch nur eines Teiles von ihnen ändern sich dann die Nullstellen unserer Gleichung $G_m(x_1) = 0$ beliebig wenig, bleiben also insbesondere alle getrennt, reell und in beliebiger Nähe des vorgeschriebenen Wertes ξ_1. Nun kann aber durch beliebig kleine Abänderung der $b_{22}, \ldots, b_{kk}$ stets $|M| \neq 0$ gemacht werden. Und dann entsprechen den gewählten Werten $b_{j0}, \ldots, b_{j\,n-k}$ auch eindeutig zugehörige Werte $\bar{a}_{j0}, \bar{a}_{j1}, \bar{a}_{j2}, \ldots, \bar{a}_{jk}$; $\bar{a}_{j\,2k+1}, \ldots, \bar{a}_{jn}$, $j = 1, \ldots, k$. Daher gibt es alsdann ein System (L), welches genau die von uns vorgeschriebenen Werte $b_{j\tau}$ liefert, so daß die durch (L) dargestellte L_{n-k} mit der F_k genau m verschiedene, zu P_0 beliebig benachbarte Punkte gemeinsam hat. Die in Nr. **1**, 2 aufgestellte Behauptung ist somit vollständig bewiesen, sobald nur solche $b_{j\tau}$ gefunden sind, für welche $G_m(x_1)$ lauter reelle, beliebig nahe bei ξ_1 gelegene Nullstellen besitzt.

1, 25. Nun zur Wahl der $\tau_2, \ldots, \tau_k$ und der $b_{j\varrho}$. Zunächst sei $\tau_2 + n - k = m - 1$ gesetzt, also $\tau_2 = m - (n-k) - 1$; wegen der über m gemachten Annahme ist $\tau_2 \geqq 0$. Damit ist erreicht, daß in den zu x_1^m in $G(x_1)$ benachbart stehenden Gliedern $\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{2\varrho}x_1^{\varrho+\tau_2}$ alle Potenzen von x_1 mit Exponenten von $m-1$ bis $m-n+k$ einschließlich und zwar mit den beliebig wählbaren Koeffizienten $b_{2\varrho}$, $\varrho = 1, \ldots, n-k$, auftreten. Weiterhin sind nur zwei Fälle möglich:

Erster Fall: $\tau_2 > n - k \geqq 1$. Dann setzen wir $\tau_2 = \tau_3 + n - k = m - n + k - 1$, also $\tau_3 = m - 2(n-k) - 1$. Jetzt treten in $G(x_1)$ weiterhin die Potenzen $x_1^{m-(n-k)-1}, \ldots, x^{\tau_3+1}$ auf und zwar mit Koeffizienten

$$(\mathrm{I}) \qquad b_{3\,n-k} + \xi_2 - \left(\sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{2\varrho}\,\xi_1^\varrho\right); \quad b_{3\,n-k-1}; \ldots; b_{31},$$

denen wir ebenfalls willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen können.

Zweiter Fall: $0 \leqq \tau_2 \leqq n - k$. Wir setzen alsdann $\tau_j = \tau_2$, $j = 3, \ldots, k$, und erhalten:

$$x_1^m + (b_{2\,n-k} + b_{3\,n-k} + \cdots + b_{k\,n-k})\,x_1^{m-1} + \cdots + (b_{2\,n-k+1-\tau_2} + \cdots)\,x_1^{n-k+1}$$
$$+ (-\,b_{k+1\,n-k} + \cdots)\,x_1^{n-k} + (-\,b_{k+1\,n-k-1} + \cdots)\,x_1^{n-k-1} + \cdots$$
$$+ (-\,b_{k+1\,0} + \cdots) = 0\,.$$

Infolgedessen kann man durch passende Wahl der $b_{2\,1}, \ldots, b_{k\,n-k}$ den Koeffizienten von $x_1^{m-1}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen. Die Koeffizienten von $x_1^{n-k}, x_1^{n-k-1}, \ldots$ können bei passender Verfügung über die noch freien $b_{k+1\,\varrho}$, $\varrho = 0, \ldots, n-k$, ebenfalls willkürlich gewählt werden. Damit ist im zweiten Falle das Gewünschte erreicht (vgl. Nr. 1, 24).

Im *ersten Falle* hat man das Verfahren ganz ähnlich wie oben fortzusetzen und zwar ergibt sich wieder die Unterscheidung in zwei Fälle, je nachdem nämlich $\tau_3 > n - k$ oder $\tau_3 \leqq n - k$ ist. Nach endlich vielen Schritten tritt dabei einmal der *zweite Fall* ein, womit das Verfahren seinen Abschluß findet. Sämtliche Koeffizienten können also jeweils willkürlich gewählt werden. Die Konstruktion einer Gleichung m-ten Grades, in welcher kein Glied fehlt, ist übrigens nur dann möglich, wenn $m \leqq k(n-k) + 1$.

Damit ist die Behauptung von Nr. 1, 2 für $2k < n$ bewiesen.

1, 3. Wir haben bisher die Annahme $2k < n$ zugrunde gelegt.

Der Fall $2k \geqq n$, d. h. $n - k \leqq k \leqq n - 1$ läßt sich ganz ähnlich erledigen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß wir F_k definieren für $k < n - 1$ durch

$$(\mathrm{F}') \qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_1^m + x_1^{\tau_2} x_2 + \cdots + x_1^{\tau_k} x_k \\ x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_1^{n-k} + x_{n-k}\,, \end{aligned}$$

hingegen für $k = n - 1$ durch die erste dieser Gleichungen allein; und die L_{n-k} definieren durch

$$(\mathrm{L}') \qquad x_\varkappa = \bar{L}'_\varkappa(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \bar{a}_{\varkappa 0} + \bar{a}_{\varkappa 1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{\varkappa\,n-k}\, x_{n-k}, \qquad \varkappa = n-k+1, \ldots, n.$$

Entsprechend wie für $2k < n$ zeigt man, daß durch (F′) eine (im früher (Nr. 1, 1) präzisierten Sinne k-dimensionale) Mannigfaltigkeit F_k definiert wird.

Aus den letzten $n - k - 1$ Gleichungen (F′) setzen wir sodann die rechter Hand stehenden Ausdrücke für die $n - k - 1 \leqq k - 1$ Variablen $x_{k+2}, \ldots, x_n$ in die letzten $n - k - 1$ Gleichungen (L′) ein und erhalten [8])

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 = \bar{a}_{k+2\,0} + \bar{a}_{k+2\,1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{k+2\,n-k}\, x_{n-k} \\ x_{k+3} &= x_1^3 + x_3 = \bar{a}_{k+3\,0} + \bar{a}_{k+1\,3} x_1 + \cdots + \bar{a}_{k+3\,n-k}\, x_{n-k} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_1^{n-k} + x_{n-k} = \bar{a}_{n\,0} + \bar{a}_{n\,1} x_1 + \cdots + \bar{a}_{n\,n-k}\, x_{n-k}\,. \end{aligned}$$

Dies sind $n - k - 1$ in $x_2, \ldots, x_{n-k}$ lineare Gleichungen. Wie vorhin beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher (L′), für welche die letztgenannten Gleichungen eindeutig nach $x_2, \ldots, x_{n-k}$ auflösbar sind. Also

$$(\mathrm{L}'_*) \qquad x_j = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho} x_1^\varrho, \qquad j = 2, \ldots, n-k.$$

Dabei sind, wie man leicht nachrechnet, die $b_{j\varrho}$ ($j = 2, \ldots, n-k$; $\varrho = 0, \ldots, n-k$) den $a_{k+j\,\varrho}$ eineindeutig zugeordnet, falls $\|b_{j2} \ldots b_{j\,n-k}\|$ den Rang $n - k - 1$ besitzt.

---

[8]) Falls $n = k + 1$, also $k = n - 1$ ist, besitzt (L′) von vornherein die den (L′$_*$) entsprechende Gestalt (vgl. weiter unten).

Setzen wir die durch (L'_*) gegebenen Ausdrücke für die x_j in die noch nicht benutzten $2k - n + 1$ ersten Gleichungen (L') ein, so erhalten wir

$$x_\varkappa = \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j}\Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{j\varrho} x_1^\varrho\Big) + \bar{a}_{\varkappa 0} + \bar{a}_{\varkappa 1} x_1$$

$$= \Big(\bar{a}_{\varkappa 0} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j0}\Big) + \Big(\bar{a}_{\varkappa 1} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j1}\Big) x_1 + \sum_{\varrho=2}^{n-k}\Big(\sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j\varrho}\Big) x_1^\varrho,$$

$$\varkappa = n - k + 1, \ldots, k + 1.$$

Setzt man

$$x_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x^\varrho,$$

so folgt:

Falls $M = ||b_{j2} \ldots b_{j\,n-k}||$ den Rang $n - k - 1$ besitzt, sind die $\bar{a}_{\varkappa j}$ bei festem $\varkappa$ mit $n - k + 1 \leqq \varkappa \leqq k + 1$ durch Angabe der Werte der $b_{\varkappa\varrho} = \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j\varrho}$ für $\varrho = 2, \ldots, n - k$ eindeutig bestimmt (und umgekehrt). Alsdann ist auch $a_{\varkappa 1}$ und $a_{\varkappa 0}$ eindeutig bestimmt durch Vorgabe von $b_{\varkappa 0} = \bar{a}_{\varkappa 0} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j0}$ und von $b_{\varkappa 1} = \bar{a}_{\varkappa 1} + \sum_{j=2}^{n-k} \bar{a}_{\varkappa j} b_{j1}$, und umgekehrt. Wie erhalten also schließlich wieder

$$(L'_*) \qquad x_\sigma = \sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\sigma\varrho} x_1^\varrho, \qquad \sigma = 2, \ldots, k + 1,$$

wobei die $b_{\sigma\varrho}$ den $a_{\varkappa\tau}$ in (L') ein-eindeutig entsprechen, falls $|M| \neq 0$.

Nun haben wir noch die bis jetzt nicht benutzte erste Gleichung (F'), nämlich $x_{k+1} = x_1^m + x_1^{r_1} x_2 + \cdots$, heranzuziehen und in sie aus (L'_*) die Darstellungen der $x_2, \ldots, x_{k+1}$ durch Polynome in x_1 einzusetzen. Wir gelangen dann wieder zu einer Gleichung $G(x_1) = 0$ vom Grade m in x_1 und haben damit den Anschluß an die Betrachtungen des Falles $n < 2k$ erreicht.

1, 4. Wir haben somit den

Satz. *Es gibt im R_n algebraische k-dimensionale Gebilde F_k, deren sämtliche im Endlichen gelegenen Punkte eine und dieselbe vorgeschriebene Ordnung m bezüglich einer wohldefinierten überall dichten offenen Menge von linearen $(n - k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzen: d. h. F_k ist (im Endlichen) ordnungshomogen von der Ordnung m. Und zwar kann als m jede der ganzen Zahlen $n - k + 1, n - k + 2, \ldots, k(n - k) + 1$ gewählt werden.*

1, 5. Wir bemerken noch:

Jede lineare Mannigfaltigkeit des R_n, welche in einer der von uns betrachteten, durch (F) *oder* (F') *dargestellten F_k enthalten ist, muß im Durchschnitte einer Hyperebene $x_1 =$ konst. mit F_k enthalten sein. Und jeder solche Durchschnitt ist selbst eine zu F_k gehörige lineare Mannigfaltigkeit von der Dimension $k - 1$.*

Beweis. Jede lineare Mannigfaltigkeit L_d läßt sich darstellen in der Form

$$x_\nu = A_{\nu 0} + \sum_{\tau=1}^{d} A_{\nu\tau}\lambda_\tau, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Dabei ist d gleich der Dimension von L_d, die Matrix der $A_{\nu\tau}$ hat den Rang d und die λ_τ sind unabhängige Veränderliche. Setzen wir dies in (F) ein, so erhalten wir im Falle $k < n - 1$ z. B. aus $x_{k+2} = x_1^2 + x_2$, daß $A_{11} = \cdots = A_{1d} = 0$, d. h. daß $x_1 =$ konst. Auch im Falle $k = n - 1$ kann man entsprechend schließen. Für $x_1 =$ konst. ergibt aber (F) eine lineare $(k - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, w. z. z. w.

Anmerkung. Für $n = 3$, $k = 2$ liefert unser Beispiel ein ordnungshomogenes, *geradliniges* Flächenstück 3. Ordnung.

Die von uns zur Ordnungsbestimmung zugelassenen L_{n-k} (vgl. Nr. **1**, 21) von der Form (L) bzw. (L′) enthalten natürlich keine der kritischen Hyperebenen $x_1 =$ konst.

1, 6. Die von uns bisher konstruierten F_k waren insofern noch von ziemlich spezieller Natur, als die Gleichungen (F) in *allen* $x_2, \ldots, x_k$ *sämtlich* linear sind.

Durch eine geringe Abänderung unserer Konstruktion erhalten wir indes (für $k \geqq 2$) auch Systeme (F), deren erste Gleichung in mindestens einer der $x_2, \ldots, x_k$ *nicht* linear ist. Damit hat man (jedenfalls für $k = n - 1$ und $m \geqq n - k + 2$) die Möglichkeit zur Konstruktion ordnungshomogener F_k, welche keinen linearen Unterraum von mindestens $(k - 1)$-ter Dimension enthalten.

Zur Bildung der gewünschten Systeme (F) ändern wir gegenüber (F) in Nr. **1**, 1 bzw. (F′) in Nr. **1**, 3 nur die erste Gleichung ab und setzen für $k < n - 1$:

$$\text{(F)}\qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_1^m + c_2 x_1^{\beta_2} x_2^{\alpha_2} + c_3 x_1^{\beta_3} x_3^{\alpha_3} + \cdots + c_k x_1^{\beta_k} x_k^{\alpha_k} + d_2 x_2^2 + \cdots + d_k x_k^2 \\ x_{k+2} &= x_1^2 + x_2 \\ &\;\vdots \\ x_n &= x_1^{n-k} \quad \text{bzw.} \quad x_n = x_1^{n-k} + x_{n-k}, \end{aligned}$$

je nachdem $2k < n$ oder $2k \geqq n$. Im Falle $k = n - 1$ wird nur die erste Gleichung beibehalten. Wie in Nr. **1**, 5 bestätigt man, sowohl für $k < n - 1$ als für $k = n - 1$, daß in F_k etwa enthaltene lineare Mannigfaltigkeiten höchstens in $x_1 =$ konst. ($x_2, \ldots, x_n$ beliebig) enthalten sind. Die Aufgabe besteht nun in der Festlegung der *natürlichen Zahlen* $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$; $\beta_2, \ldots, \beta_k$ sowie der reellen Konstanten $c_2, \ldots, c_k$; $d_2, \ldots, d_k$ *in Abhängigkeit von* m derart, daß die Bestimmung der Ordnung der durch (F) definierten F_k auf eine Gleichung m-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen führt. Hierbei können die Überlegungen der Nr. **1**, 1—**1**, 22 bzw. **1**, 3 unverändert übernommen werden, weil bei ihnen die erste Gleichung von (F) bzw. von (F′) überhaupt nicht herangezogen wurde. Ausgenommen ist nur der Nachweis, daß die Punkte, in welchen die (F) bzw. (F′) entsprechende Funktionalmatrix einen Rang kleiner als k besitzt, nirgends dicht liegen; dieser Nachweis läßt sich aber wie in Nr. **1**, 1 führen. Wir erhalten also (entsprechend der Nr. **1**, 23) die Gleichung

$$G_m(x_1) = x_1^m + \sum_{\varkappa=2}^{k} c_\varkappa x_1^{\beta_\varkappa} \Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho\Big)^{\alpha_\varkappa} + \sum_{\varkappa=2}^{k} d_\varkappa \Big(\sum_{\varrho=0}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} x_1^\varrho\Big)^2 - \Big(\sum_{\varrho=0}^{k-n} b_{k+1\,\varrho}\, x_1^\varrho\Big) = 0.$$

Dabei ist noch (vgl. (A$^*_*$))

$$b_{\varkappa 0} = \xi_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{n-k} b_{\varkappa\varrho} \xi_1^\varrho, \qquad \varkappa = 2, \ldots, k.$$

1, 7. Die $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ und $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ sind jetzt so zu wählen, daß x_1^m Glied höchsten Grades in $G_m(x_1)$ wird, ferner daß den m übrigen Koeffizienten von $G_m(x_1)$ durch passende Wahl der $b_{21}, \ldots, b_{k\,n-k}$, $b_{k+1\,0}, \ldots, b_{k+1\,n-k}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilt werden können; dabei sollen nicht gleichzeitig alle α gleich Eins und alle d gleich Null sein. Dazu dient folgende Bemerkung:

I. *In der Entwicklung von*

$$\Big(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho\Big)^q, \qquad \textit{wo}\quad q > 0 \ \textit{ganzzahlig},$$

nach Potenzen von x *können im Falle eines* ungeraden *Exponenten* q *den Koeffizienten von* $x^{rq}, \ldots, x^{(q-1)r+1}$ *beliebig vorgegebene Werte erteilt werden, indem man nur* $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1$ *passend wählt.*

In der Tat ist

$$\left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho\right)^q = b_r^q x^{rq} + \frac{q!}{(q-1)!} b_r^{q-1} b_{r-1} x^{rq-1} + \cdots + \left(\sum \frac{q!}{\tau_r! \cdots \tau_0!} b_r^{\tau_r} \cdots b_0^{\tau_0}\right) x^{rq-\lambda} + \cdots;$$

dabei ist im allgemeinen Glied über alle ganzzahligen $\tau_r, \ldots, \tau_0$ zu summieren, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$\tau_\varrho \geqq 0, \quad \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_r = q, \quad 0 \cdot \tau_0 + 1 \cdot \tau_1 + \cdots + r \cdot \tau_r = rq - \lambda,$$

und mithin

$$\sum_{\varrho=0}^{r} (r-\varrho)\, \tau_\varrho = \lambda.$$

Für $1 \leqq \lambda \leqq r - 1$ muß daher (wegen $\tau_\varrho \geqq 0$) jedenfalls $\tau_\varrho = 0$ sein, wenn $0 \leqq \varrho \leqq r - \lambda - 1$. Und aus $\tau_{r-\lambda} \neq 0$ folgt: $\tau_{r-\lambda} = 1$, $\tau_r = q - 1$, alle übrigen $\tau_\varrho = 0$. Im Koeffizienten von $x^{rq-\lambda}$, dargestellt als Polynom in den $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_0$, treten also für $\lambda \geqq 1$ nur $b_r, \ldots, b_{r-\lambda}$ auf und zwar $b_{r-\lambda}$ nur in dem Gliede $\frac{q!}{(q-1)!\,1!} b_r^{q-1} b_{r-\lambda}$, also insbesondere nur in der ersten Potenz; für $\lambda = 0$ haben wir als Koeffizienten b_r^q. Da q nach Voraussetzung ungerade ist, hat die Gleichung $y^q = A$ für *jedes A* (genau) eine reelle Lösung, so daß b_r^q jeden vorgeschriebenen Wert annehmen kann. Nach Festlegung von $b_r \neq 0$, also des Koeffizienten von x^{rq}, kann dann (durch Auflösung einer linearen Gleichung) b_{r-1} eindeutig so bestimmt werden, daß der Koeffizient von x^{rq-1} einen beliebig vorgeschriebenen Wert annimmt, usw. Daraus folgt die Behauptung.

Ferner bemerken wir:

II. *In der Entwicklung von*

$$x^r\left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho\right) + \left(\sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho x^\varrho\right)^2 - \left(\sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho x^\varrho\right)^2$$

nach Potenzen von x kann durch passende Wahl der $b_r, \ldots, b_1, c_r, \ldots, c_1$ den Koeffizienten von $x^{2r}, \ldots, x^{r+1}$ jeder beliebig vorgeschriebene Wert erteilt werden.

In der Tat: Der Koeffizient von x^{2r} ist $b_r + b_r^2 - c_r^2$. Ist daher b_r^* der vorgeschriebene Wert, so kann man durch hinreichend große Wahl von $b_r > 0$ erreichen, daß $b_r + b_r^2 - b_r^* > 0$ ist; alsdann gibt es genau ein $c_r > 0$ mit $b_r + b_r^2 - b_r^* = c_r^2$ d. h. mit $b_r + b_r^2 - c_r^2 = b_r^*$, wie behauptet. Der Koeffizient von x^{2r-1} ist nun gleich $(1 + 2b_r)\, b_{r-1} - 2c_r c_{r-1}$ usw. (vgl. I). Daraus ergibt sich ohne weiteres die Behauptung.

1, 8. Auf Grund der in Nr. 1, 7 gemachten Bemerkungen kann jetzt die Festlegung der $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, c_\varkappa, d_\varkappa$ ähnlich erfolgen wie früher die der $\tau_\varkappa$ (vgl. Nr. 1, 25). Es wird genügen, dies für den *Fall $k > 2$ und für $m \geqq 2(n-k) + 1$* zu skizzieren. (Dabei soll $m \leqq k(n-k) + 1$ sein.)

Wir dividieren m durch $n - k$, lassen aber auch „Reste" gleich $n - k$ zu, setzen also:

$$m = \sigma(n-k) + \beta + 1$$

wo σ und β ganzzahlig mit $0 \leqq \beta \leqq n - k - 1$, also $2 \leqq \sigma \leqq k - \frac{\beta}{n-k}$.

1, 81. *Es sei zunächst $\sigma \equiv 1 \pmod 2$.*

Wir setzen

$\beta_2 = \beta$, $\alpha_2 = \sigma$, $c_2 = 1$; $\beta_3 = \beta + (n-k)$, $\alpha_3 = \sigma - 2$, $c_3 = 1$; $\beta_4 = \beta$, $\alpha_4 = \sigma - 2$, $c_4 = 1$; usw.; bis wir zu $\sigma - 2\mu = 1$, also zu $\beta_{2\mu+1} = \beta + (n-k)$, $\alpha_{2\mu+1} = 1$, $c_{2\mu+1} = 1$ gelangt sind. Wegen $\sigma \leqq k$ ist auch $2\mu + 1 \leqq k$.

1, 811. *Im Falle* $\sigma = 2\mu + 1 < k$ ist $3 < k$ und wir setzen:

$c_{2\mu+2} = \cdots = c_k = 0$; $d_{2\mu+1} = d_{2\mu+2} = \cdots = -d_k = 1$; alle übrigen $d_\varkappa = 0$.

Es ergibt sich:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^\beta x_2^\sigma + x_1^{\beta+(n-k)} x_3^{\sigma-2} + \cdots + x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\mu+1} + x_{2\mu+1}^2 + \cdots - x_k^2 - x_{k+1};$$

dabei denken wir uns für $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ die zugehörigen Polynome in x_1 gemäß (L^*), (A_*^*) bzw. (L_*') usw. schon eingesetzt. Durch passende Wahl der $b_{2\varkappa}, \ldots, b_{2\mu\,\varkappa}$ mit $\varkappa = 1, \ldots, n-k$, lassen sich jetzt den Koeffizienten von $x_1^{\beta+\sigma(n-k)}, \ldots, x_1^{\beta+2(n-k)}$ beliebige Werte erteilen (gemäß Nr. **1**, 7; I). Bei der Bestimmung der übrigen Koeffizienten behandeln wir die Fälle $\beta > 0$ und $\beta = 0$ getrennt.

Falls $\beta > 0$, wählen wir die $b_{2\mu+2\,\varkappa}, \ldots, b_{k-1\,\varkappa}$ beliebig ($\varkappa = 1, \ldots, n-k$, soweit nicht schon $2\mu + 2 = k$), ebenso die $b_{k\,n-k}, \ldots, b_{k\,\beta+1}$. Durch passende Wahl der $b_{2\mu+1\,n-k}, \ldots, b_{2\mu+1\,1}$ können wir dann den Koeffizienten von $x_1^{\beta+2(n-k)}, \ldots, x_1^{\beta+(n-k)+1}$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen, wie die Betrachtung von $x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\mu+1} + x_{2\mu+1}^2$ lehrt. Die Betrachtung der noch übrigen Glieder des gleichen Ausdruckes zeigt, daß durch passende Wahl der $b_{k\beta}, \ldots, b_{k1}$ (vgl. Nr. **1**, 7; I, für $q = 2$, $r = n - k$) auch den Koeffizienten von $x_1^{\beta+(n-k)}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürliche Werte erteilt werden können. Schließlich kann man durch passende Verfügung über die noch völlig freien $b_{k+1\,n-k}, \ldots, b_{k+1\,0}$ den Koeffizienten von $x_1^{n-k}, \ldots, x^0$ willkürlich vorgeschriebene Werte erteilen, womit alles Gewünschte geleistet ist.

Falls $\beta = 0$, besteht die Änderung nur darin, daß wir jetzt den Koeffizienten von $x_1^{2(n-k)}, \ldots, x_1^{n-k+1}$ willkürliche Werte dadurch erteilen, daß wir die $b_{2\mu+1\,n-k}, \ldots, b_{2\mu+1\,1}$ zusammen mit den $b_{k\,n-k}, \ldots, b_{k1}$ gemäß Nr. **1**, 7; II geeignet bestimmen.

1, 812. *Im Falle* $\sigma = 2\mu + 1 = k$ muß $\beta = 0$ sein (wegen $m \leqq k(n-k) + 1$ und $k \geqq 3$ (wegen $k \geqq 2$)). Es tritt dann jedenfalls x_2 in der ersten Gleichung (F) in mindestens der dritten Potenz auf. Wir setzen alle $d_\varkappa = 0$ und verfahren im übrigen wie in Nr. **1**, 811.

1, 82. *Nunmehr sei* $\sigma \equiv 0 \pmod 2$.

Wegen $\sigma \geqq 2$ (vgl. die Voraussetzung in Nr. **1**, 8) können wir setzen:

$$\beta_2 = \beta + (n-k),\ \alpha_2 = \sigma - 1,\ c_2 = 1;\quad \beta_3 = \beta,\ \alpha_3 = \sigma - 1,\ c_3 = 1;$$
$$\beta_4 = \beta + (n-k),\ \alpha_4 = \sigma - 3;\quad c_4 = 1;\ \text{usw.},$$

bis wir zu $\sigma - 2\nu + 1 = 1$, also $\beta_{2\nu} = \beta + (n-k)$, $\alpha_{2\nu} = 1$, $c_{2\nu} = 1$ gelangt sind.

Im Falle $2\nu = \sigma = k$ ist wieder $\beta = 0$ und wir erhalten:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^{n-k} x_2^{k-1} + \cdots + x_1^{n-k} x_k - x_{k+1} = 0.$$

Die Koeffizienten von $G_m(x_1)$, als Polynom in x_1 betrachtet, sind ersichtlich beliebiger Werte fähig (Nr. **1**, 7; I).

Im Falle $2\nu = \sigma < k$ setzen wir:

$$G_m(x_1) = x_1^m + x_1^{\beta+(n-k)} x_2^{\sigma-1} + \cdots + x_1^{\beta+(n-k)} x_{2\nu} + x_{2\nu}^2 + x_{2\nu+1}^2 + \cdots - x_k^2 - x_{k+1} = 0.$$

Im übrigen verlaufen die Schlüsse entsprechend wie oben.

§ 2. Existenz k-dimensionaler algebraischer Gebilde im R_n mit Punkten bis zur Ordnung $2(k(n-k)+1)$ einschließlich.

Durch eine leichte, sogleich anzugebende Abänderung der in Nr. **1**, 1—**1**, 4 benutzten Beispiele gelangt man zu algebraischen k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten F_k mit *einzelnen* Punkten von höherer Ordnung als $k(n-k)+1$. Dabei sind die betrachteten

Punkte wieder von rationalem Charakter (insofern nämlich für die F_k wieder eine Darstellung (F) gilt, in welcher $n - k$ der Koordinaten *Polynome* in den übrigen sind).

Der Gedankengang ist folgender: Zunächst können wir die in Nr. **1**, 23 angegebenen Bedingungen (A_*) weglassen; denn wir brauchen ja nur für die Umgebung eines einzigen (passend gewählten) Punktes die F_k als von der gewünschten Ordnung nachzuweisen. Durch den Wegfall von (A_*) werden nun $k - 1$ neue Koeffizienten frei verfügbar. Daher ist die Existenz von Punkten höherer als m_0-ter Ordnung bereits wahrscheinlich ($m_0 = k(n - k) + 1$). Um nun Punkte möglichst hoher Ordnung zu bekommen, müssen wir auf eine Gleichung $G(x_1) = 0$ von möglichst hohem Grade und mit lauter reellen Nullstellen ausgehen. Der günstigste Fall ist dabei derjenige, in welchem $G(x_1)$ ein Polynom möglichst hohen Grades m in $y = x_1^2$ mit lauter positiven verschiedenen Nullstellen y ist. Dann erhalten wir nämlich im ganzen $2m$ verschiedene reelle Nullstellen x_1 von $G(x_1)$.

Den eben gemachten Andeutungen entsprechend, setzen wir zunächst *im Falle* $2k < n$:

$$\text{(F)}\qquad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_1^m + x_1^{\tau_2} x_2 + \cdots + x_1^{\tau_k} x_k^k \\ x_{k+2} &= x_1^{\sigma_2} + x_2 \\ x_{k+3} &= x_1^{\sigma_3} + x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2k} &= x_1^{\sigma_k} + x_k \\ x_{2k+1} &= x_1^{\sigma_{k+1}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_1^{\sigma_{n-k}}. \end{aligned}$$

Wie in § 1 stellen wir wieder durch Elimination die Gleichung $G(x_1) = 0$ her; diese lautet jetzt:

$$\begin{aligned} x_1^m &+ x_1^{\tau_2}(b_{20} + b_{21} x_1 + b_{22} x_1^{\sigma_2} + \cdots + b_{2\,n-k} x_1^{\sigma_{n-k}}) + \cdots \\ &+ x_1^{\tau_k}(b_{k0} + b_{k1} x_1 + b_{k2} x_1^{\sigma_2} + \cdots + b_{k\,n-k} x_1^{\sigma_{n-k}}) \\ &= b_{k+1\,0} + b_{k+1\,1} x_1 + b_{k+1\,2} x_1^{\sigma_2} + \cdots + b_{k+1\,n-k} x_1^{\sigma_{n-k}}. \end{aligned}$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: *m ist eine gerade ganze Zahl, $m = 2t$, mit*

$$k(n - k) + 2 \leqq m \leqq 2k(n - k).$$

Wir setzen alsdann $b_{j1} = 0$, $j = 2, \ldots, k, k + 1$; ferner $\sigma_\varkappa = \sigma_{\varkappa-1} + 2$, $\varkappa = 2, \ldots, n - k$ mit $\sigma_1 = 0$, so daß $\sigma_\varkappa = 2(\varkappa - 1)$. Darnach bestimmen wir τ_2 wie folgt:

Ist $m > 2(n - k)$, so setzen wir $\sigma_{n-k} + \tau_2 = 2(n - k - 1) + \tau_2 = m - 2$, also $\tau_2 = 2(t - n + k) > 0$.

Ist $m \leqq 2(n - k)$, so werden wir τ_2 sowie alle $b_{2\varrho}$ gleich Null setzen, deren zugehöriges $\sigma_\varrho \geqq m$ ist. Ferner setzen wir alle übrigen $b_{j\varrho}$ gleich Null ($j = 3, \ldots, k, k + 1$; $\varrho = 0, 2, \ldots, n - k$). Die noch übrig bleibenden Glieder b_{20} und $b_{2\tau} x^{\sigma_\tau}$, $\tau = 2, 3 \ldots$, zusammen mit x^m liefern uns dann ein Polynom $P(y)$ in $y = x_1^2$ vom Grade t, dessen höchstes Glied den Koeffizienten 1 hat, während den Koeffizienten aller übrigen Glieder beliebige Werte erteilt werden können, also insbesondere solche, daß $P(y)$ lauter positive beliebig nahe an Null gelegene, verschiedene Nullstellen besitzt.

Somit haben wir im Falle $m \leqq 2(n - k)$ bereits die gewünschte Gleichung. Wir erhalten so einen Punkt der gewünschten Ordnung, nämlich (vgl. (F) und (A_*)):

$$(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = b_{20}, \ldots, \xi_k = b_{k0};\quad \xi_{k+1} = 0,\ \xi_{k+2} = b_{20}, \ldots, \xi_{2k} = b_{k0},\ \xi_{2k+1} = \cdots = \xi_n = 0).$$

Im Falle $m > 2(n-k)$ haben wir das Verfahren weiter fortzusetzen, nämlich τ_3 zu bestimmen. Dabei verfahren wir ganz entsprechend wie für τ_2. Wir machen nämlich den Ansatz: $\tau_2 - 2 = \tau_3 + 2(n-k-1)$, wobei dann wieder $\tau_3 = 0$ usw. zu nehmen ist für $\tau_2 \leqq 2(n-k)$. Das Verfahren bricht spätestens mit der Wahl von τ_k ab. Soll in diesem Falle die Konstruktion eines Polynoms in $x_1^2 = y$ mit dem Koeffizienten 1 für das höchste Glied möglich sein, dessen sämtlichen übrigen Koeffizienten beliebige Werte erteilt werden können, so muß ersichtlich $\tau_k \leqq 2(n-k)$ sein, also

$$m \leqq 2(n-k) + 2(k-1)(n-k) = 2k(n-k).$$

Zweiter Fall: *m ist eine ungerade ganze Zahl, $m = 2t-1$, mit*

$$k(n-k) + 2 \leqq m \leqq 2k(n-k) + 1.$$

Um auch jetzt Gleichungen mit lauter reellen beliebig benachbarten Nullstellen zu konstruieren, bemerken wir zunächst: Ist

$$P(x^2) = x^{2t} + a_1 x^{2t-2} + \cdots + a_{t-1} x^2 + a_t$$

ein Polynom mit lauter reellen, absolut beliebig kleinen Nullstellen ($a_t \neq 0$), so gilt das Gleiche von

$$Q(x) = x^{2t+1} + a_1 x^{2t-1} + \cdots + a_{t-1} x^3 + a_t x + b,$$

wenn nur b hinreichend klein ist. Demgemäß setzen wir $\sigma_\varkappa = \sigma'_\varkappa + 1$, legen der Betrachtung $m' = m - 1$ statt m zugrunde und wählen die $\sigma_\varkappa$ genau so wie im ersten Falle. Ferner setzen wir, wie vorhin, $\tau_2 = m' - 2 - \sigma'_{n-k}$ bzw. $\tau_2 = 0$, je nachdem $m' > 2(n-k)$ oder $m' \leqq 2(n-k)$. Im letzteren Falle nehmen wir ferner $b_{2\varrho} = 0$ für alle ϱ, für welche $\sigma'_\varrho \geqq m' = 2t$, sowie auch $b_{21} = 0$. Ferner setzen wir dann noch diejenigen $b_{j\varrho}$ gleich Null, für welche $j = 3, \ldots, k+1$; $\varrho = 0, 1, \ldots, n-k$, *mit Ausnahme von* $b_{k+1\,0}$. Ersichtlich gelangen wir so zu einem Polynom $Q(x)$ von der oben angegebenen Form, dessen sämtliche Koeffizienten frei wählbar sind, womit das Gewünschte erreicht ist.

Im Falle $m' > 2(n-k)$ führen wir die Rechnung entsprechend weiter, indem wir wieder $b_{21} = 0$ setzen und zur Bestimmung von τ_3 die gleichen Überlegungen und Fallunterscheidungen vornehmen wie bei der Bestimmung von τ_2. Man sieht, wie das Verfahren fortzusetzen ist und daß dabei $m' + 1 = m \leqq 2k(n-k) + 1$ sein muß, falls man schließlich zu einem Polynom $Q(x)$ gelangen will, über dessen *sämtliche* Koeffizienten sich frei verfügen läßt.

Der Fall $2k \geqq n$ erledigt sich entsprechend, wenn man die in § 1 angegebene Behandlung sinngemäß abändert.

Zusammenfassend erhalten wir also den

Satz. *Es gibt k-dimensionale algebraische Gebilde F_k im R_n, welche Punkte der Ordnung π besitzen, wo π irgendeine ganze Zahl aus der Reihe $n-k+1, \ldots, 2k(n-k)+1$ sein kann. Diese Punkte können überdies so gewählt werden, daß sie von rationalem Charakter (im oben definierten Sinne) sind.*

Ferner gilt:

Falls die F_k Punkte von nicht-rationalem Charakter enthalten darf, kann man sogar zu Punkten der Ordnung $2k(n-k) + 2 = 2[k(n-k)+1]$ gelangen.

Beweis. Es werde F_k wie in § 1 durch (F) definiert mit dem Zusatze $x_1 = t^2$, so daß also in der Umgebung der Hyperebene $x_1 = 0$ *reelle* Punkte nur mit $x_1 > 0$ auftreten können. Man konstruiert nun $G(x_1)$ mit $m = k(n-k) + 1$ wie in § 1, indem man als zu betrachtenden Punkt $P_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ den Punkt $(\xi_1 = 0; \xi_2, \ldots, \xi_n)$ wählt, wo die

$\xi_2, \ldots, \xi_k$ beliebig seien. Alsdann setzt man $x_1 = t^2$ und bestimmt die sämtlich willkürlichen Koeffizienten so, daß lauter reelle, beliebig nahe bei $t = 0$ gelegene Nullstellen t existieren; deren Anzahl ist dann $2[k(n-k)+1]$.

§ 3. $(k(n-k)+1)$ als obere Schranke der Ordnung differenzierbarer, ordnungshomogener k-dimensionaler Gebilde im R_n.

Zunächst sei wieder $2k < n$. Wir betrachten dann im euklidischen R_n ein k-dimensionales Gebilde F_k. Wir denken uns jetzt F_k dargestellt als abgeschlossene Hülle einer Summe von k-dimensionalen ordnungshomogenen Gebilden H_k, deren offene Kerne paarweise fremd sind[9]). Über F_k machen wir folgende

Voraussetzung I. F_k werde definiert durch $n-k$ Gleichungen

$$(\Phi) \qquad \Phi_\tau(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \tau = k+1, \ldots, n.$$

Der Definitionsbereich sei ein n-dimensionaler Würfel, etwa $|x_\nu| \leqq 1$, $\nu = 1, \ldots, n$. Ferner seien die Φ_τ so oft stetig differenzierbar, als es im folgenden für sie und die aus ihnen gewonnenen Funktionen gebraucht wird, und es sei die Funktionalmatrix $\left\| \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial x_\nu} \right\|$ vom Range $n-k$.

Voraussetzung II. Der Durchschnitt einer Umgebung des auf H_k betrachteten Punktes mit einer passenden, die jeweils in Frage kommenden L_{n-k} enthaltenden, L_{n-k+1} soll ein Bogen sein (vgl. die ausführlichere Fassung weiter unten).

Wir wollen zeigen, daß jedes solche ordnungshomogene Gebilde höchstens von der Ordnung $m = k(n-k)+1$ sein kann bezüglich einer nachher festzulegenden Menge von L_{n-k}, welche im Raume aller L_{n-k} offen und überall dicht ist. Es genügt, die Umgebung U eines inneren Punktes P eines solchen H_k, also die Umgebung etwa von $(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}; x_{k+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, zu untersuchen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (gegebenenfalls bei passender Umnumerierung der x_ν) H_k in U darstellbar sei in der Form

$$(\mathrm{F}) \qquad x_{k+\varrho} = \psi_\varrho(x_1, \ldots, x_k), \qquad \varrho = 1, \ldots, n-k,$$

sowie daß die ψ_j in U so oft differenzierbar sind, als wir es nötig haben. Das alles folgt aus der Voraussetzung I.

Abgesehen von einer (im Raume aller L_{n-k}) nirgends dichten Menge können wir jede L_{n-k} in der Gestalt schreiben

$$(\mathrm{L}) \qquad x_{k+j} = a_{j0} + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\tau} x_\tau + \sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu} x_\mu, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Durch die letzten $n-2k$ Gleichungen (F) sind die $x_{2k+\tau}$ ($\tau = 1, \ldots, n-2k$) als Funktionen von $x_1, \ldots, x_k$ bekannt. Diese setzen wir in die Gleichungen (L) ein und erhalten unter Heranziehung der noch übrigen k ersten Gleichungen (F):

$$(\overline{\mathrm{L}}) \quad x_{k+j} = a_{j0} + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\tau} x_\tau + \sum_{\mu=2k+1} a_{j\mu} \psi_{\mu-k}(x_1, \ldots, x_k) = \psi_j(x_1, \ldots, x_k), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Die $(\overline{\mathrm{L}})$ sind k Gleichungen in den $x_1, \ldots, x_k$ als Unbekannten. Soll H_k ordnungshomogen von mindestens der Ordnung m sein, so muß $(\overline{\mathrm{L}})$ bei passender Wahl der $k + k \cdot k + k(n-2k) = k(n-k) + k$ willkürlichen Koeffizienten $a_{j\lambda}$ mindestens m verschiedene Lösungs-k-tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ besitzen, die in beliebiger Nähe eines beliebig vorgegebenen Punktes $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ von U liegen. Durch Auswahl erhalten wir

[9]) Diese Darstellung ist immer möglich. Vgl. O. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 50ff., Einleitung.

eine konvergente[10]) Folge (L_ν) solcher L_{n-k} mit dem Limes

$$(\bar{\mathrm{L}}^*) \qquad x_{k+j} = a_{j\tau}^* + \sum_{\tau=1}^{k} a_{j\mu}^* x_\tau + \sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* x_\mu\,, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Übrigens müssen die Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}}^*)$ für $x_\nu = x_\nu^*$, $\nu = 1, \ldots, n$, erfüllt sein.

Wir stellen zunächst eine *notwendige Bedingung dafür auf, daß ein vorgegebener Punkt P^* mindestens die Ordnung m besitzt.*

Dabei benutzen wir die *Voraussetzung* II, die in ausführlicherer Fassung so lautet: Für alle Punkte $(a_{10}, \ldots, a_{kn})$ einer im Raume aller $k(n-k+1)$-tupel $(a_{j\varkappa})$ dichten offenen Menge sollen $k-1$ der Gleichungen $(\bar{\mathrm{L}})$ nach $k-1$ der Unbekannten, etwa nach $x_2, \ldots, x_k$, eindeutig auflösbar sein in der Umgebung von P^*, und zwar sollen die so erhaltenen

$$(\mathrm{L}_*) \qquad x_\tau = \varphi_\tau(x_1)$$

eindeutige Funktionen von x_1 mit entsprechend hohen gleichmäßig beschränkten stetigen Differentialquotienten sein in einer festen Umgebung von $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Demgemäß sei nun $x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1;\, a_{10}, \ldots, a_{kn})$, $\lambda = 2, \ldots, k$. Setzen wir das in die noch nicht verwendete Gleichung von $(\bar{\mathrm{L}})$ ein, so erhalten wir eine Gleichung in x_1 allein: $G(x_1) = 0$. Angenommen, es besitze $G(x_1)$ für fast alle (L_ν) mindestens m verschiedene (reelle) Nullstellen, welche für fast alle ν in beliebiger Nähe von x_1^* liegen. Dann hat die ϱ-te Ableitung von $G(x_1)$ in eben dieser Nähe mindestens $m-\varrho$ verschiedene Nullstellen, $\varrho = 1, \ldots, m-1$. Wegen der vorausgesetzten Existenz und gleichmäßigen Beschränktheit der Differentialquotienten der φ_λ erhalten wir für eine passende Auswahlfolge aus (L_ν) und für $\nu \to \infty$ folgende Gleichungen, in welchen überall $x_\tau = x_\tau^*$, $\tau = 1, \ldots, k$, zu setzen ist und wobei $\varphi_\tau^{(\sigma)}$ den Limes eines Mittelwertes der σ-ten Ableitung von φ_τ für $\nu \to \infty$ bedeutet:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{gathered} a_{j0}^* + a_{j1}^* x_1^* + \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* x_\tau^* + \Bigl[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \psi_{\mu-k}(x_1^*, \ldots, x_k^*)\Bigr] - \psi_j(x_1^*, \ldots, x_k^*) = 0, \\ a_{j1}^* + \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* \varphi_\tau' + \Bigl[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \Bigl(\frac{d\psi_{\mu-k}}{dx_1}\Bigr)\Bigr] - \frac{d\psi_j}{dx_1} = 0, \\ \sum_{\tau=2}^{k} a_{j\tau}^* \varphi_\tau^{(\sigma)} + \Bigl[\sum_{\mu=2k+1}^{n} a_{j\mu}^* \frac{d^\sigma \psi_{\mu-k}}{dx_1^\sigma}\Bigr] - \frac{d^\sigma \psi_j}{dx_1^\sigma} = 0, \\ j = 1, \ldots, k;\quad \sigma = 2, \ldots, m-1; \end{gathered}$$

dabei ist

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \sum_{\varkappa=2}^{k} \frac{\partial\psi}{\partial x_\varkappa} \varphi_\varkappa' \quad \text{usw.}$$

Das sind km *algebraische* Gleichungen, nämlich gleich Null gesetzte Polynome in den $k(n-k+1)$ Unbekannten $a_{j\lambda}^*$ und den $(k-1)(m-1)$ Unbekannten $\varphi_\tau^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \ldots, m-1$; $\tau = 2, \ldots, k$. In den Gleichungen (S) sind übrigens auch diejenigen enthalten, zufolge deren $(\bar{\mathrm{L}}^*)$ für $x_\nu = x_\nu^*$ erfüllt ist. Wie die Beispiele des § 1 zeigen, sind unsere Gleichungen im allgemeinen gewiß miteinander verträglich, wenn $km \leqq (k-1)(m-1) + k(n-k+1)$, wenn also $m \leqq k(n-k) + 1$. Wird diese maximale Ordnung $(k(n-k)+1)$ überschritten, so sind die (S) sicher nur dann ver-

---

[10]) Eine Folge $(L^{(\nu)})$ von L_{n-k}, welche in der Gestalt (L) darstellbar sind, heißt *konvergent*, wenn die entsprechenden Koeffizienten in der Darstellung (L) konvergieren. Der Limes wird durch (L) geliefert, wenn darin für die Koeffizienten die entsprechenden Koeffizientenlimites eingesetzt werden.

träglich, wenn ein den homogenisierten (S) zugehöriges *Resultantensystem* (R) Null wird; dieses ist ein *System von algebraischen Bedingungsgleichungen für die (partiellen) Ableitungen der* ψ_ϱ im betrachteten Punkt P^* und stellt eine *notwendige* Bedingung dafür dar, daß der betrachtete Punkt von höherer als $(k(n-k)+1)$-ter Ordnung ist. Diese Bedingung ist aber durchaus *nicht* als *hinreichend* erwiesen; es ist ja in ihr noch nicht einmal berücksichtigt, daß die Lösungen $\varphi_\tau^{(\sigma)}$, $a_{j\lambda}^*$, soweit sie überhaupt für uns in Frage kommen, *reell* sein müssen.

Der Fall $2k \geqq n$ führt zum gleichen Ergebnis, wenn man die Voraussetzung II durch eine dem System (L′) (vgl. Nr. 1, 3) angepaßte Voraussetzung II′ ersetzt. Soll nun das betrachtete Gebilde *ordnungshomogen* von höherer Ordnung als $(k(n-k)+1)$ sein, so muß (R) identisch in $x_1, \ldots, x_k$ befriedigt sein, d. h. unser Gebilde muß einem *gewissen System* (R*) *partieller Differentialgleichungen* Genüge leisten [11]). Ob unter den durch (R*) gekennzeichneten F_k sich wirklich ordnungshomogene von höherer Ordnung als $(k(n-k)+1)$ befinden, ist durch unsere Überlegungen nicht entschieden. Bezeichnen wir daher die durch (R*) gekennzeichneten F_k als *Ausnahme-*F_k, so haben wir den

Satz. *Eine F_k, welche sich im Kleinen in der Gestalt* (F) *darstellen läßt, und welche im Kleinen den Voraussetzungen* I *und* II *bzw.* I *und* II′ *genügt, ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Summe von ordnungshomogenen F_k, deren jede höchstens die Ordnung $(k(n-k)+1)$ besitzt, und von Ausnahme-F_k.*

[11]) Für $n=3$, $k=2$ ergibt sich die partielle Differentialgleichung der geradlinigen Flächen (vgl. a. a. O. [3])). In diesem Falle sind also die Bedingungsgleichungen keineswegs identisch, d. h. für *jede* Fläche, erfüllt.

Eingegangen 7. Juli 1936.