Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg.

In der vorliegenden Arbeit werden die Überdeckungen [1] [2] $\mathfrak{U}$ topologischer Komplexe mit dem Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K untersucht und vollständig charakterisiert. Es handelt sich, in rein algebraischer Formulierung, um die folgende Frage: Gegeben sind n Matrizen R_k $(k = n-1, n-2, \ldots, 0)$, die Berandungsmatrizen, aus K mit α_{k+1} Zeilen und α_k Spalten, vom Rang r_k und mit den Relationen $R_k R_{k-1} = 0$. Sie sollen mit den sämtlichen ganzzahligen α_k-reihigen Matrizen T_k aus K mit der Determinante 1 oder allgemeiner mit Determinanten aus einer Gruppe $\mathfrak{T}$ von Einheiten aus K, den Transformationsmatrizen, in der Weise transformiert werden, daß R_k übergeht in $T_{k+1}^{-1} R_k T_k$. Sie sollen ferner beliebig erweitert werden, d. h. etwa R_k soll eine neue $(\alpha_{k+1}+1)$-te Zeile und eine neue (α_k+1)-te Spalte bekommen, die an ihrem Schnittpunkt eine 1 und sonst lauter Nullen enthalten; R_{k+1} soll dabei, wenn nicht $k = n-1$ ist, eine entsprechende neue $(\alpha_{k+1}+1)$-te Nullspalte, R_{k-1}, wenn nicht $k = 0$ ist, eine entsprechende neue (α_k+1)-te Nullzeile erhalten. Bei beiden Prozessen bleibt die Bedingung $R_k R_{k-1} = 0$ offensichtlich erhalten. Es ist ein vollständiges Invariantensystem anzugeben.

Das geschieht auf Grund der Steinitzschen Elementarteilertheorie für Matrizen aus K [3]. Diese Theorie muß hier nach zwei Seiten erweitert werden. Einerseits werden an Stelle beliebiger unimodularer Transformationsmatrizen, deren Determinante eine beliebige Einheit aus K ist, nur solche mit der Determinante 1 zugelassen. Andererseits handelt es sich an Stelle einer einzigen zu transformierenden Matrix um eine Reihe von solchen mit entsprechend modifizierter Transformationsvorschrift. Als Invarianten von $\mathfrak{U}$ ergeben sich zunächst diejenigen, welche auch bei Überdeckungen mit beliebigen Körpern auftreten: die Bettischen Zahlen und, im Falle, daß alle Bettischen Zahlen Null sind, die Torsion [4]. Ferner ergeben sich als arithmetische Invarianten die von 1 ver-

---

[1]) K. Reidemeister, Überdeckungen von Komplexen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935).

[2]) W. Franz, Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935).

[3]) E. Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I, Math. Ann. **71** (1912), II, Math. Ann. **72** (1912); im folgenden angeführt als St. I, II. Die Theorie der idealen Systeme (Operatorgruppen) über K aus St. II wird hier nicht wesentlich benutzt. Vgl. ferner: W. Krull, Matrizen, Moduln und verallgemeinerte abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen, Sitz.-Ber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math. nat. Klasse 1932, Abh. 2. — W. Franz, Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern, Journ. f. reine u. angew. Math. **171** (1934).

[4]) W. Franz, Über die Torsion einer Überdeckung, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935); im folgenden angeführt als T. Von den dortigen determinantentheoretischen Bezeichnungen wird hier ohne nochmalige Erklärung Gebrauch gemacht.

schiedenen Elementarteiler und die Steinitzschen Spalten- und Zeilenklassen der Berandungsmatrizen, hier Torsionsideale und Torsionsklassen genannt.

In § 1 werden die Invarianten aufgestellt und die Beziehungen zwischen ihnen hergeleitet. Die Torsion erweist sich dabei als bis auf Einheiten durch die Torsionsideale bestimmt. § 2 enthält im Anschluß an Steinitz die verschärfte Äquivalenztheorie der einzelnen Matrix. In § 3 und § 4 wird die Vollständigkeit und Unabhängigkeit des Invariantensystemes festgestellt. In § 5 wird die zu $\mathfrak{U}$ duale Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ mit dem zu K konjugiert komplexen Körper untersucht. Im Falle, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ dieselbe Überdeckung darstellen, ergeben sich Verallgemeinerungen der Poincaréschen Dualitätsbeziehungen für Mannigfaltigkeiten.

Der Körper K wird als algebraischer Zahlkörper endlichen Grades angenommen; jedoch lassen sich die vorliegenden Untersuchungen, ebenso wie die Steinitzsche Äquivalenztheorie, ohne wesentliche Änderungen auf den Fall eines algebraischen Zahlkörpers unendlichen Grades übertragen. Die Berandungsmatrizen R_k werden, ohne daß dadurch die Allgemeinheit beschränkt wird, als ganzzahlig vorausgesetzt.

§ 1. Die Invarianten.

1. Bei Transformation der Berandungsmatrizen R_k bleiben die Ränge r_k und damit die Bettischen Zahlen

$$p_k = \alpha_k - r_k - r_{k-1} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0;\ r_n = r_{-1} = 0)$$

invariant. Bei Erweiterung, etwa von R_k, wachsen α_{k+1}, α_k, r_k je um 1; p_k und p_{k+1} bleiben also erhalten.

Die Elementarteilertheorie ergibt, daß bei Transformation die Elementarteiler und die Spalten- und Zeilenklassen invariant bleiben. Bei Erweiterung von R_k mögen aus den Matrizen R_{k+1}, R_k, R_{k-1} die Matrizen R'_{k+1}, R'_k, R'_{k-1} entstehen. Sie haben die Ränge r_{k+1}, $r_k + 1$, r_{k-1}. Die Elementarteiler von R'_{k+1} und R'_{k-1} sind ersichtlich dieselben wie die von R_{k+1} und R_{k-1}. R'_k hat sicher den ersten Elementarteiler 1. Der Wertebereich der von Null verschiedenen ν-reihigen Unterdeterminanten von R'_k ($\nu \geqq 2$) ist identisch mit dem der von Null verschiedenen ν-reihigen und $(\nu - 1)$-reihigen Unterdeterminanten von R_k. Der ν-te Determinantenteiler von R'_k ist daher gleich dem $(\nu - 1)$-ten Determinantenteiler von R_k; die von 1 verschiedenen Elementarteiler der Berandungsmatrizen R_k bleiben bei Erweiterung und Transformation erhalten; sie heißen die *Torsionsideale k-ter Dimension* der Überdeckung.

Die abgeleiteten Matrizen $R'^{(r_k+1)}_{k+1}$ bzw. $R'^{(r_k-1)}_{k-1}$ gehen aus $R^{(r_k+1)}_{k+1}$ bzw. $R^{(r_k-1)}_{k-1}$ durch Einfügung von gewissen Nullspalten bzw. Nullzeilen hervor, $R'^{(r_k+1)}_k$ aus $R^{(r_k)}_k$ durch Einfügung von Nullspalten und Nullzeilen. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}_k$ und die Zeilenklasse $\mathfrak{Z}_k$ bleiben also erhalten; sie heißen die beiden *Torsionsklassen k-ter Dimension* der Überdeckung.

Bei Transformationen bleibt endlich nach T. Nr. 5 die *Torsion* [4])

$$\mathsf{T} = \mathfrak{s}_{n-1} \frac{\mathfrak{z}_{n-1}}{\mathfrak{z}_{n-2}} \frac{\mathfrak{s}_{n-3}}{\mathfrak{s}_{n-2}} \cdots \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{s}_2} \dfrac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_0} \dfrac{1}{\mathfrak{s}_0} & \text{bei geradem } n, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1} \dfrac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1} \mathfrak{z}_0 & \text{bei ungeradem } n \end{cases}$$

invariant. Daß T auch bei Erweiterungen invariant bleibt, erkennt man daraus, daß die adjungierten Matrizen $R^{\langle r_k \rangle}_k$ sich bei Erweiterungen analog verhalten wie die abgeleiteten

$R_k^{(r_k)}$; die Spalten $\mathfrak{s}_k$ und Zeilen $\mathfrak{z}_k$ aus der Definition von T brauchen daher bei Erweiterung nur durch gewisse Nullen aufgefüllt zu werden, die von Null verschiedenen Zahlen darin bleiben unter Einschluß ihrer Reihenfolge erhalten; das gleiche gilt also für die einzelnen Proportionalitätsfaktoren und damit für T selbst.

2. Die angegebenen Invarianten sind nicht unabhängig. Die Elementarteilertheorie zeigt, daß für den r_k-ten Determinantenteiler $\mathfrak{d}_k$ von R_k, das Produkt aller k-dimensionalen Torsionsideale, die Beziehung gilt

$$(1) \qquad \mathfrak{d}_k \sim \mathfrak{S}_k \mathfrak{Z}_k .$$

Weitere Beziehungen gelten, wenn eine oder alle Bettischen Zahlen Null sind. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}_{n-1}$ läßt sich als Idealklasse des größten gemeinsamen Teilers der Spalte $\mathfrak{s}_{n-1}$ charakterisieren, in Symbolen $\mathfrak{S}_{n-1} \sim (\mathfrak{s}_{n-1})$. Ist $p_n = 0$, so reduziert sich $\mathfrak{s}_{n-1}$ auf eine Zahl, also ist $\mathfrak{S}_{n-1} \sim 1$. Ebenso ist $\mathfrak{Z}_{n-1} \sim (\mathfrak{z}_{n-1})$, $\mathfrak{S}_{n-2} \sim (\mathfrak{z}_{n-2})$. Ist $p_{n-1} = 0$, so sind nach T. Nr. 2, 4 $\mathfrak{z}_{n-1}$ und $\mathfrak{z}_{n-2}$ proportional, also $(\mathfrak{z}_{n-1}) \sim (\mathfrak{z}_{n-2})$, $\mathfrak{Z}_{n-1} \sim \mathfrak{S}_{n-2}$. Allgemein gilt

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{Z}_k \sim \mathfrak{S}_{k-1}, \quad \text{wenn } p_k = 0 \quad (k = n-1, \ldots, 1), \\ &\mathfrak{S}_{n-1} \sim 1, \quad \text{wenn } p_n = 0, \quad \mathfrak{Z}_0 \sim 1, \quad \text{wenn } p_0 = 0. \end{aligned}$$

Sind alle Bettischen Zahlen gleichzeitig Null, so gilt nach T. Nr. 4, daß $\mathfrak{z}_{n-1}$ zu $\mathfrak{z}_{n-2}$, $\mathfrak{s}_{n-2}$ zu $\mathfrak{s}_{n-3}$ usw. proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{z}_k/\mathfrak{z}_{k-1}$ darf, wenn es nur auf seine Idealdarstellung ankommt, durch den Quotienten der entsprechenden größten gemeinsamen Teiler ersetzt werden, $(\mathfrak{z}_k/\mathfrak{z}_{k-1}) = (\mathfrak{z}_k)/(\mathfrak{z}_{k-1})$. Wegen der Assoziativität des größten gemeinsamen Teilers ist ferner $(\mathfrak{s}_k)(\mathfrak{z}_k) = \mathfrak{d}_k$. Führt man das in die Definition von T ein, so ergibt sich

$$(3) \qquad (\mathrm{T}) = \frac{\mathfrak{d}_{n-1}}{\mathfrak{d}_{n-2}} \frac{\mathfrak{d}_{n-3}}{\mathfrak{d}_{n-4}} \cdots \begin{cases} \cdots \dfrac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_0} & \text{bei geradem } n, \\ \cdots \dfrac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1} \mathfrak{d}_0 & \text{bei ungeradem } n. \end{cases}$$

Die Idealdarstellung von T ist demnach durch die Torsionsideale festgelegt; Überdeckungen mit sonst gleichen Invarianten können sich bezüglich der Torsion nur durch verschiedene Erzeugende T für das Ideal (T) unterscheiden.

§ 2. Äquivalenztheorie der einzelnen Matrix.

3. Eine ganzzahlige quadratische Matrix der Determinante 1 heiße eine 1-Matrix. Zwei Matrizen A und A' aus K mit m Zeilen und n Spalten heißen 1-äquivalent, genauer in K 1-äquivalent, wenn sie durch vordere m-reihige und hintere n-reihige 1-Matrizen aus K als Faktoren in einander übergehen, $A' = PAQ$. Entsprechend werden die Begriffe links-1-äquivalent und rechts-1-äquivalent gebraucht. Es soll gezeigt werden: A und A' sind dann und nur dann 1-äquivalent, wenn sie im Range, den Elementarteilern, der Spalten- und der Zeilenklasse und im Falle $m = n$ außerdem in der Determinante übereinstimmen. Daß im Falle $m = n$ die Determinante invariant bleibt, ist klar. Die übrigen Invarianten ergeben sich aus der gewöhnlichen Äquivalenztheorie. Es handelt sich hier darum, diese Invarianten als hinreichend für die 1-Äquivalenz zu erkennen.

A habe den Rang r, die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ und die Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ und die Zeilenklasse $\mathfrak{Z}$. Nach St. I, 29, 31 ist A wechselseitig linksteilbar mit einer Normalgestalt N folgender Art:

(a) Wenn $\mathfrak{S} \sim 1$, so sind in N nur die ersten r Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ von Null verschieden, und sie besitzen die größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$.

(b) Wenn $\mathfrak{S} \not\sim 1$, so sind in N nur die ersten $r+1$ Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r'$ von Null verschieden, und sie besitzen die größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r\mathfrak{q}, \mathfrak{e}_r\mathfrak{q}'$; dabei ist $\mathfrak{z}_r$ zu $\mathfrak{z}_r'$ proportional, $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'$, $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1$. Die Ideale $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ dürfen in ihrer Idealklasse innerhalb der Bedingung $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1$ beliebig gewählt werden. Es existieren ganze Zahlen c, c' mit $(c) = \mathfrak{q}'\mathfrak{c}$ mit ganzem $\mathfrak{c}$, $(c') = \mathfrak{q}\mathfrak{c}$ so, daß $c\mathfrak{z}_r + c'\mathfrak{z}_r' = 0$. Die Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ von A und N berechnet sich aus dieser Normalgestalt in einfacher Weise. Es sind jeweils zwei Unterdeterminanten r-ten Grades zur Bestimmung von $\mathfrak{S}$ maßgebend, von denen die eine mit den Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$, die andere mit den Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{r-1}, \mathfrak{z}_r'$ gebildet ist; ist $\mathfrak{d}_r$ der r-te Determinantenteiler von A und hat die erste die Idealdarstellung $\mathfrak{d}_r\mathfrak{q}\mathfrak{g}$ mit ganzem $\mathfrak{g}$, so hat die zweite die Darstellung $\mathfrak{d}_r\mathfrak{q}'\mathfrak{g}$. Daraus folgt $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{d}_r\mathfrak{g} \sim \mathfrak{q}^{-1} \sim \mathfrak{q}'^{-1}$. Multipliziert man im Falle (a) die Zeile $\mathfrak{z}_r$, im Falle (b) die beiden Zeilen $\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r'$ mit einer beliebigen Einheit ε, so bleiben die vorstehenden Überlegungen unverändert gültig; die r-te Abgeleitete $N^{(r)}$ erhält den Faktor ε, über den unten verfügt werden wird.

Es sei etwa $P_0A = N$, mit ganzzahligem P_0 aus K. Ist $r < m$, so kann man P_0 nach St. II, 66 durch eine 1-Matrix P aus K mit $PA = N$ ersetzen. Ist $r = m$, so folgt $\mathfrak{S} \sim 1$. Durch Bildung der r-ten Abgeleiteten ergibt sich $|P_0|\, A^{(r)} = N^{(r)}$, und da $A^{(r)}$ und $N^{(r)}$ von Null verschiedene Zeilen mit demselben größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_r$ sind, ist $|P_0|$ eine Einheit. Dann und nur dann sind A und N links-1-äquivalent, wenn $A^{(r)} = N^{(r)}$. Wir wählen ε so, daß das der Fall ist, und setzen dann $P_0 = P$, so daß stets $PA = N$ ist mit einer 1-Matrix P.

4. Die (m, n)-reihige Matrix A' stimme mit A in den oben genannten Invarianten überein. A' ist mit einer entsprechend gebauten Normalgestalt N' links-1-äquivalent, $P'A' = N'$ mit einer 1-Matrix P' aus K. Die r-te und $(r+1)$-te Zeile $\bar{\mathfrak{z}}_r$ und $\bar{\mathfrak{z}}_r'$ von N' im Falle (b) können so gewählt werden, daß auch $c\bar{\mathfrak{z}}_r + c'\bar{\mathfrak{z}}_r' = 0$. Nach St. I, 33 sind dann N und N' wechselseitig rechtsteilbar. Es sei etwa $N = N'Q_0$ mit ganzzahligem Q_0 aus K. Wenn $r < n$, so kann man wie eben Q_0 durch eine 1-Matrix Q mit $N = N'Q$ ersetzen. Wenn $r = n$, so ist $\mathfrak{Z} \sim 1$. Durch Bildung der r-ten Abgeleiteten folgt $N^{(r)} = N'^{(r)}|Q_0|$, und da $N^{(r)}$ und $N'^{(r)}$ von Null verschiedene Spalten mit demselben größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}_r$ sind, ist $|Q_0|$ eine Einheit. Dann und nur dann sind N und N' rechts-1-äquivalent, wenn $N^{(r)} = N'^{(r)}$. Wenn $n = r < m$, so werde ε so gewählt, daß dies der Fall ist. Wenn $n = r = m$, so ist $N^{(r)} = |N| = |A|$, $N'^{(r)} = |N'| = |A'|$ und wegen der Voraussetzung $|A| = |A'|$ ist $N^{(r)} = N'^{(r)}$ von selbst erfüllt. Wir setzen dann $Q_0 = Q$, so daß stets $N = N'Q$ ist mit einer 1-Matrix Q.

Zusammen ergibt sich $PA = N$, $P'A' = N'$, $N = N'Q$, also $(P'^{-1}P)AQ^{-1} = A'$ mit 1-Matrizen $P'^{-1}P$ und Q aus K. Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen. Die Einheit ε ist nur dann besonders gewählt worden, wenn entweder $r = n$ oder $r = m$. Im Falle $r < n$, $r < m$ folgt also über die obige Behauptung hinaus: Sind A und A' 1-äquivalent, $A' = PAQ$, so können P und Q als 1-Matrizen so modifiziert werden, daß $(PA)^{(r)}$ eine beliebig vorgegebene Einheit ε als Faktor bekommt.

§ 3. Ein Spezialfall.

5. Es seien A und A' (l, m)-reihige, B und B' (m, n)-reihige ganzzahlige Matrizen aus K, $AB = A'B' = 0$ und A und A' rechtsäquivalent, $A' = AU$, B und B' links-

äquivalent, $B' = VB$ mit unimodularen U und V aus K. Es soll die Existenz einer unimodularen Matrix T aus K mit $A' = AT^{-1}$, $B' = TB$ gezeigt werden.

K^* sei eine algebraische Erweiterung endlichen Grades von K derart, daß in K^* alle Ideale von K zu Hauptidealen werden. In K^* existieren unimodulare Matrizen Π, P, Σ mit l, m, bzw. n Reihen so, daß

$$(4) \qquad \Pi A'\mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{P}^{-1}B'\Sigma = \mathsf{N}_2,$$

wo $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2$ in bekannter Weise gebildete Normalformen sind: Haben A und A' bzw. B und B' die Ränge r bzw. s, so sind N_1 bzw. N_2 nur in den rechten oberen r-reihigen bzw. s-reihigen Teilmatrizen, und zwar nur in deren Hauptdiagonalen mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. In den Hauptdiagonalen stehen die Elementarteiler von A und A' bzw. von B und B' in beliebiger Darstellung als Hauptideale; sonst enthalten N_1 und N_2 nur Nullen. Es folgt

$$(5) \qquad \Pi AU\mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{P}^{-1}VB\Sigma = \mathsf{N}_2.$$

Wir betrachten die Matrix

$$\Gamma = \mathsf{P}^{-1}U^{-1}B\Sigma = \mathsf{P}^{-1}U^{-1}V^{-1}\mathsf{P}\mathsf{N}_2.$$

Wegen der ersten Darstellung ist nach (5) $\mathsf{N}_1\Gamma = 0$, in Γ verschwinden also die letzten r Zeilen. Wegen der letzten Darstellung sind in Γ höchstens die s letzten Spalten mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. Die rechte obere $(m - r, s)$-reihige Teilmatrix von Γ, welche demnach die einzigen von Null verschiedenen Elemente von Γ enthält, heiße Γ_0. Die größten gemeinsamen Teiler der Spalten von Γ_0 sind die Elementarteiler von N_2. Da das zugleich die Elementarteiler von Γ und damit von Γ_0 sind, ist Γ_0 in einer Normalgestalt (§ 1) und kann daher durch einen linksseitigen unimodularen Faktor T_0 auf die Diagonal-Normalform $\mathsf{T}_0\Gamma_0$ gebracht werden, und zwar in der Weise, daß

$$\begin{pmatrix}\mathsf{T}_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \Gamma_0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \mathsf{N}_2.$$

Wird

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix}\mathsf{T}_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{T}^{-1} = \begin{pmatrix}\mathsf{T}_0^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

gesetzt, so gilt

$$(6) \qquad \mathsf{T}\Gamma = \mathsf{N}_2, \qquad \mathsf{N}_1\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{N}_1.$$

Durch Einsetzen von Γ und nach (5) folgt

$$\Pi A(U\mathsf{P}\mathsf{T}^{-1}) = \mathsf{N}_1, \qquad (\mathsf{T}\mathsf{P}^{-1}U^{-1})B\Sigma = \mathsf{N}_2.$$

Wird ferner $U\mathsf{P}\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{Z}$ gesetzt, so folgt nach (4)

$$\Pi A\mathsf{Z} = \Pi A'\mathsf{P} = \mathsf{N}_1, \qquad \mathsf{Z}^{-1}B\Sigma = \mathsf{P}^{-1}B'\Sigma = \mathsf{N}_2,$$
$$A' = A(\mathsf{Z}\mathsf{P}^{-1}), \qquad B' = (\mathsf{P}\mathsf{Z}^{-1})B.$$

Es existiert also eine Matrix $\mathsf{X} = \mathsf{Z}\mathsf{P}^{-1}$ und eine Matrix $\mathsf{Y} = \mathsf{P}\mathsf{Z}^{-1} = \mathsf{X}^{-1}$ in K^* mit

$$(7) \qquad \begin{cases} A' = A\mathsf{X}, & A = A'\mathsf{Y},\\ \mathsf{X}B' = B, & \mathsf{Y}B = B'. \end{cases}$$

6. Die vier letzten Gleichungen lassen sich als inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Elemente von X und Y auffassen. Nun ist die Lösbarkeitsbedingung für solche Systeme vom zugrunde gelegten Körper unabhängig. (Sie lautet nämlich: Das

System $C\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ ist dann und nur dann ganzzahlig lösbar, wenn C und die aus C durch Anfügung von $\mathfrak{c}$ entstehende Matrix dieselben Elementarteiler haben.) Daher sind die vier Gleichungen auch in K ganzzahlig lösbar. Die entsprechenden Matrizen seien mit X und Y bezeichnet.

7. **Hilfssatz 1.** *Besitzt die (l, m)-reihige Matrix A mindestens r Elementarteiler Eins, die (m, n)-reihige Matrix B mindestens s Elementarteiler Eins, so besitzt AB mindestens $r + s - m$ Elementarteiler Eins.*

Beweis. Besitzt eine Matrix aus K mindestens t Elementarteiler Eins, so ist sie, als Matrix aus dem Restklassenkörper $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ nach einem beliebigen Primideal $\mathfrak{p}$ von K als Modul aufgefaßt, mindestens vom Rang t. Gilt das letztere für jedes $\mathfrak{p}$, so hat umgekehrt die Matrix mindestens t Elementarteiler Eins. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes gilt nach den Gesetzen über den Rang eines Produktes, daß der Rang von AB in $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}$ mindestens $r + s - m$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Haben die (l, m)-reihigen und (m, n)-reihigen Matrizen A und B aus K die Ränge r und s, so existiert eine ganzzahlige m-reihige Matrix W in K von einem Range $\leqq r + s$ mit $AW = A$, $WB = B$.*

Beweis. Das Gleichungssystem $A\mathfrak{s} = 0$, in dem $\mathfrak{s}$ eine zu bestimmende ganzzahlige m-gliedrige Spalte bedeutet, hat $m - r$ linear unabhängige Lösungen. Es existiert ein System von $m - r + 1$ ganzzahligen Lösungen derart, daß sich jede andere ganzzahlige Lösung daraus mit ganzzahligen Koeffizienten linear homogen kombinieren läßt. Dieses Lösungssystem sei zu der $(m, m - r + 1)$-reihigen Matrix S vom Range $m - r$ mit $m - r$ Elementarteilern Eins zusammengefaßt. Analog repräsentiere die $(m - s + 1, m)$-reihige Matrix Z vom Rang $m - s$ mit $m - s$ Elementarteilern Eins die sämtlichen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystemes $\mathfrak{z}B = 0$, in der $\mathfrak{z}$ eine zu bestimmende ganzzahlige m-gliedrige Zeile bedeutet. S darf rechtsseitig mit einer beliebigen $(m - r + 1)$-reihigen unimodularen Matrix Q, Z linksseitig mit einer beliebigen $(m - s + 1)$-reihigen unimodularen Matrix P multipliziert werden. ZS hat nach dem Hilfssatz 1 mindestens

$$(m - r) + (m - s) - m = m - (r + s) = p$$

Elementarteiler Eins. Die unimodularen Matrizen P, Q können so bestimmt werden, daß $(PZ)\,(SQ)$ eine Normalform wird, bei der im Falle (a), daß der Rang von ZS größer als p ist, innerhalb der ersten p Spalten und Zeilen nur in der Hauptdiagonale Einsen, sonst lauter Nullen stehen, im Falle (b), daß der Rang von ZS genau p ist, innerhalb der ersten $p - 1$ Spalten und Zeilen nur in der Hauptdiagonale Einsen, sonst lauter Nullen stehen, während die folgende zweireihige Hauptuntermatrix von der Form

$$\begin{pmatrix} a & ab \\ ac & abc \end{pmatrix},$$

vom Rang 1 und mit dem (einzigen) Elementarteiler 1 ist; sonst enthält die Normalform lauter Nullen. Da die Zahlen a, ab, ac, abc teilerfremd sind, lassen sich ganze Zahlen x, y, u, v in K so bestimmen, daß

$$ax + aby + acu + abcv = 1. \tag{8}$$

Die Zeilen von PZ seien der Reihe nach mit $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$, die Spalten von SQ mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots$ bezeichnet. Dann genügt die Matrix

$$W = E - \mathfrak{s}_1\mathfrak{z}_1 - \cdots - \mathfrak{s}_{p-1}\mathfrak{z}_{p-1} - (x\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_p + y\mathfrak{s}_{p+1}\mathfrak{z}_p + u\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_{p+1} + v\mathfrak{s}_{p+1}\mathfrak{z}_{p+1}),$$

wo E die Einheitsmatrix bezeichnet, den Bedingungen des Satzes; dabei ist im Falle (a) die Klammer durch $\mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p$ zu ersetzen. Es ist nämlich ersichtlich $AW = AE = A$, $WB = EB = B$. Ferner ist

$$W\mathfrak{s}_i = E\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}_i = 0$$

für $i = 1, \ldots, p$ im Falle (a), für $i = 1, \ldots, p - 1$ im Falle (b). Wird im Falle (b)

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_p(ax + acu) + \mathfrak{s}_{p+1}(ay + acv)$$

gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} W\mathfrak{s} &= \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_p[(ax + acu)(ax + acu) + (abx + abcu)(ay + acv)] \\ &\quad - \mathfrak{s}_{p+1}[(ay + acv)(ax + acu) + (aby + abcv)(ay + acv)] \\ &= \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_p(ax + acu) - \mathfrak{s}_{p+1}(ay + acv) = 0, \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (8). Die Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}_p$, bzw. $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}$ sind linear unabhängig. Für $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p$ ist das wegen der Normalform augenscheinlich; für $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{s}$ ebenfalls, sobald feststeht, daß $\mathfrak{s} \neq 0$. Aus $\mathfrak{s} = 0$ aber folgte, daß $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_{p+1}$ proportional wären, also wegen der Normalform $\mathfrak{s}_{p+1} = b\mathfrak{s}_p$. Nach der Definition von $\mathfrak{s}$ folgte weiter wegen (8) $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_p \neq 0$. Das Gleichungssystem $W\mathfrak{s} = 0$ hat also p linear unabhängige Lösungen, W ist also höchstens vom Rang $r + s$, wie zu zeigen war.

Ist analog W' eine ganzzahlige Matrix aus K von einem Rang $\leqq r + s$ mit $A'W' = A$, $W'B' = B'$ und ersetzt man in den Gleichungen (7) X durch WX, Y durch $W'Y$, so erhält man

$$\text{(7a)} \qquad \begin{cases} A' = AX, & A = A'Y, \\ XB' = B, & YB = B'. \end{cases}$$

Dabei sind X und Y ganzzahlig aus K und höchstens vom Rang $r + s$.

8. Gemäß der Gleichung $AX = A'$ entspricht jeder Spalte $\mathfrak{x}$ von X eine Spalte $A\mathfrak{x}$ von A'. r linear unabhängigen Spalten $A\mathfrak{x}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ von A' entsprechen dabei r linear unabhängige Spalten $\mathfrak{x}_\nu$ von X. Dann und nur dann ist $\Sigma x_\nu A\mathfrak{x}_\nu = 0$ mit beliebigen x_ν aus K, wenn alle $x_\nu = 0$. — Gemäß der Gleichung $B = XB'$ lassen sich aus den Spalten von X s linear unabhängige Spalten $\mathfrak{b}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ kombinieren. Aus einer Relation $\Sigma x_\nu \mathfrak{x}_\nu = \Sigma b_\mu \mathfrak{b}_\mu$ zwischen den $\mathfrak{x}_\nu$ und den $\mathfrak{b}_\mu$ folgte

$$A \sum_\nu x_\nu \mathfrak{x}_\nu = A \sum_\mu b_\mu \mathfrak{b}_\mu = 0,$$

wegen $AB = 0$, also $x_\nu = 0$, und wegen der Unabhängigkeit der $\mathfrak{b}_\mu$ auch $b_\mu = 0$. Aus den Spalten von X lassen sich also $r + s$ unabhängige Spalten kombinieren, X hat mindestens und damit genau den Rang $r + s$. Jedes Spaltenkompositum $\mathfrak{s}$ von X mit $A\mathfrak{s} = 0$ ist Kompositum der $\mathfrak{b}_\mu$, also von der Form $\mathfrak{s} = B\mathfrak{u}$, mit eventuell gebrochenem $\mathfrak{u}$.

Die ganzzahlige Spalte $\mathfrak{t}$ sei ein Kompositum mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus den Spalten von X. Wegen $A(XY) = A$ folgt $A(XY\mathfrak{t} - \mathfrak{t}) = 0$, $\mathfrak{t} = X(Y\mathfrak{t}) + \mathfrak{s}$, wo $\mathfrak{s}$ ganzzahlig ist und der Gleichung $A\mathfrak{s} = 0$ genügt, also von der Form $\mathfrak{s} = B\mathfrak{u}$ ist. Wegen $(XY)B = B$ folgt $X(YB\mathfrak{u}) = B\mathfrak{u} = \mathfrak{s}$. Zusammen ergibt sich $\mathfrak{t} = X(Y\mathfrak{t}) + X(Y\mathfrak{s})$, $\mathfrak{t}$ ist Spaltenkompositum mit *ganzen* Koeffizienten von X, gehört also zum Spaltenmodul von X. Dieser enthält demnach mit jeder Spalte auch jede proportionale, sofern sie ganzzahlig ist. Das bedeutet, daß X genau $t = r + s$ Elementarteiler Eins besitzt. Es seien nämlich $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_t$ die Elementarteiler von X, und die Spalten $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t'$ mögen eine Normalbasis des Spaltenmoduls von X bilden derart, daß $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ linear unabhängig sind, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{t-1}$ die Teiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{t-1}$, die beiden proportionalen Spalten $\mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t'$ jedoch die Teiler $\mathfrak{e}_t\mathfrak{q}$, $\mathfrak{e}_t\mathfrak{q}'$ mit $\mathfrak{q}' \sim \mathfrak{q}$, $(\mathfrak{q}', \mathfrak{q}) = 1$ besitzen.

Es ist dann

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{Z}^{-1}(X) \sim \mathfrak{S}(X).$$

Wäre etwa $e_t \neq 1$, so hätte jede zu $\mathfrak{y}_t$ proportionale Spalte des Moduls den Teiler e_t, während nach obigem *jede* zu $\mathfrak{y}_t$ proportionale ganzzahlige Spalte, auch eine solche mit zu e_t primem Teiler, zum Modul gehört.

9. Angenommen es sei $r + s = t \leqq 2$. Durch Anfügung einer Spalte $\mathfrak{y}$ von Unbestimmten y_λ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ an die Normalbasis $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ entsteht eine Matrix, deren $(t+1)$-reihigen Unterdeterminanten Linearformen mit dem größten gemeinsamen Koeffiziententeiler 1 sind, und zwar ein Linearformensystem von einem Range $\geqq 2$. Nach St. I, 15 kann man daher für die $\mathfrak{y}_\lambda$ solche ganzen Zahlen aus K setzen, daß der $(t+1)$-te Determinantenteiler von $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ gleich Eins wird. Wegen der Beziehung $A(XY\mathfrak{y} - \mathfrak{y}) = 0$ ist $\mathfrak{y} - X(Y\mathfrak{y}) = \mathfrak{s}_1$ mit $A\mathfrak{s}_1 = 0$. Die Matrix $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1)$ hat daher ebenfalls den $(t+1)$-ten Determinantenteiler Eins, denn sie geht aus $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y})$ durch Addition eines Kompositums der ersten $t+1$ Spalten zur $(t+2)$-ten hervor. Ist $t + 1 \leqq 2$, so kann das eben angewandte Verfahren wiederholt werden, bis eine Matrix $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1})$ von m Spalten vom Range $m-1$ und mit dem $(m-1)$-ten Determinantenteiler 1 entsteht. Es ist $A\mathfrak{s}_1 = \cdots = A\mathfrak{s}_{p-1} = 0$. $\mathfrak{y}$ sei wieder eine Spalte von m Unbestimmten. Die Determinante

$$|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{p-1}, \mathfrak{y}|$$

ist eine Linearform in den y_λ vom größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{q}$. Ist d ein Vielfaches von $\mathfrak{q}$, $(d) = \mathfrak{q}\mathfrak{r}$, so kann man für die y_λ solche durch $\mathfrak{r}$ teilbare ganze Zahlen setzen, daß $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}| = d$[5]. Die Ersetzung von $\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{y} - X(Y\mathfrak{y})$ ändert den Determinantenwert $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p|$ nicht; auch $\mathfrak{s}_p$ hat den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{r}$. Ist δ eine Zahl mit der Idealdarstellung $(\delta) = \mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}' \sim \mathfrak{r}$, $(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}) = 1$, $\mathfrak{s}_p' = \delta\mathfrak{s}_p$, so wird $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'| = \delta d$; es ist ebenfalls $A\mathfrak{s}_p' = 0$. Die beiden Determinanten $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_p', \ldots, \mathfrak{s}_p|$, $|\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'|$ haben als Idealdarstellungen $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'$. Da $(\mathfrak{q}\mathfrak{r}, \mathfrak{q}'\mathfrak{r}, \mathfrak{q}\mathfrak{r}', \mathfrak{q}'\mathfrak{r}') = 1$, ist der m-te Determinantenteiler der Matrix

$$(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p')$$

Eins, die Spalten dieser Matrix erzeugen also den Modul aller m-gliedrigen Spalten. Da die Spalten $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t'$ von den Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p'$ unabhängig sind, hat auch die Matrix $S = (\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p')$ vom Rang p lauter Elementarteiler Eins[6]. Es ist $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{Z}^{-1}(S) \sim \mathfrak{S}(S)$. Wegen $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{q}^{-1}$ folgt $\mathfrak{Z}(S) \sim \mathfrak{Z}^{-1}(X)$.

Analog kann man $p+1$ Zeilen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_p, \mathfrak{z}_p'$ finden derart, daß $\mathfrak{z}_p$ zu $\mathfrak{z}_p'$ proportional ist, daß die $(p+1, m)$-reihige Matrix Z aus diesen Zeilen vom Rang p ist und lauter Elementarteiler Eins hat und daß die Zeilen von Z und X zusammen den Modul aller m-gliedrigen Zeilen erzeugen. Die $\mathfrak{z}_\nu$ können dabei so normiert werden, daß $\mathfrak{z}_\nu B' = 0$. Es ist $\mathfrak{S}(Z) \sim \mathfrak{S}^{-1}(X)$.

10. Die ganzzahligen Lösungen $\mathfrak{u}$ des Gleichungssystemes $X\mathfrak{u} = 0$ bilden einen Modul vom Range $m - t = p$ mit p Elementarteilern Eins. Die Spalten $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_p, \mathfrak{u}_p'$, zur $(m, p+1)$-reihigen Matrix U zusammengefaßt, mögen eine Normalbasis für diesen

[5]) A. a. O. [3]), Hilfssatz 2.

[6]) Die beiden Moduln mit den Basen $(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t', \mathfrak{y}_t')$ und $(\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p)$ sind komplementäre Grundmoduln im Sinne von Krull, a. a. O. [3]), Satz 17.

Modul bilden. Es sei

$$\binom{X}{Z} U = \binom{0}{V}.$$

Der erste Faktor links hat m, der zweite p Elementarteiler Eins. Auf der rechten Seite sind die m ersten Zeilen Null, V ist also $(p+1)$-reihig quadratisch. Nach dem Hilfssatz 1 hat V mindestens $m + p - m = p$ Elementarteiler Eins, und zwar ist V genau vom Range p, da U vom Range p ist. V kann daher durch ganzzahlige $(p+1)$-reihige Faktoren P, Q auf eine Normalform folgender Art gebracht werden

$$(PZ)(UQ) = PVQ = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a & ab \\ & & & ac & abc \end{pmatrix}.$$

Die ganzen Zahlen a, ab, ac, abc sind relativ prim, es gibt also ganze x, x', y, y' mit

$$ax + abx' + acy + abcy' = 1.$$

b darf so angenommen werden, daß das Ideal (b) der Quotient aus zwei beliebigen relativ primen Idealen der Spaltenklasse $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}(V)$ dieser Matrix ist. Nun ist $\mathfrak{S}(V) \sim \mathfrak{S}(Z)$. Für $\mathfrak{S}(Z)$ ergibt sich aber nach früherem $\mathfrak{S}(Z) \sim \mathfrak{S}^{-1}(X) \sim \mathfrak{Z}(X) \sim \mathfrak{Z}^{-1}(S) \sim \mathfrak{r}$. Daher ist $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{r}$, und es darf $(b) = \mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$, $b = \delta$ angenommen werden. Die $p+1$ Zeilen von PZ seien mit $\mathfrak{z}_1^*, \ldots, \mathfrak{z}_p^*, \mathfrak{z}_p'^*$, die $p+1$ Spalten von UQ mit $\mathfrak{u}_1^*, \ldots, \mathfrak{u}_p^*, \mathfrak{u}_p'^*$ bezeichnet. Dann sei

$$X^* = X + \mathfrak{s}_1 \mathfrak{z}_1^* + \cdots + \mathfrak{s}_{p-1} \mathfrak{z}_{p-1}^* + (x\mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p^* + x'\mathfrak{s}_p' \mathfrak{z}_p^* + y\mathfrak{s}_p \mathfrak{z}_p'^* + y'\mathfrak{s}_p' \mathfrak{z}_p'^*).$$

Es ist einerseits $AX^* = AX = A'$, $X^*B' = XB' = B$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} X^*\mathfrak{u}_\nu^* &= X\mathfrak{u}_\nu^* + \mathfrak{s}_\nu = \mathfrak{s}_\nu \qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, p-1) \\ X^*\mathfrak{u}_p^* &= X\mathfrak{u}_p^* + \mathfrak{s}_p(xa + yac) + \mathfrak{s}_p'(x'a + y'ac) \\ &= \mathfrak{s}_p(ax + acy + a\delta x' + ac\delta y') = \mathfrak{s}_p \\ X^*\mathfrak{u}_p'^* &= X\mathfrak{u}_p'^* + \mathfrak{s}_p(xab + yabc) + \mathfrak{s}_p'(x'ab + y'abc) \\ &= \mathfrak{s}_p'(ax + acy + abx' + abcy') = \mathfrak{s}_p'. \end{aligned}$$

Daher enthält der Spaltenmodul von X^* die Spalten $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_p, \mathfrak{s}_p'$. Er enthält also, nach der Definition von X^*, auch die Spalten von X, er ist also der Modul aller m-gliedrigen ganzzahligen Spalten, d. h. X^* ist unimodular. Wir setzen daher weiterhin X in Gleichung (7a) als unimodular voraus und können dann Y durch X^{-1} ersetzen.

11. Die Determinante $|X|$ ist eine Einheit des Körpers K. Sie soll jetzt soweit wie möglich normiert werden. Sei zunächst $p = 0$. Dann ist $A^{(r)} \neq 0$, $B^{\langle s \rangle} \neq 0$, und die Zeilen der beiden Matrizen sind nach T. Nr. 2 proportional, soweit sie nicht Null sind. Die Gesamtheit der Proportionalitätsfaktoren zwischen je einer Zeile von $A^{(r)}$ und einer Zeile von $B^{\langle s \rangle}$ sei kurz mit $A^{(r)} : B^{\langle s \rangle}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} A'^{(r)} : B'^{\langle s \rangle} &= (AX)^{(r)} : (X^{-1}B)^{\langle s \rangle} = A^{(r)} X^{(r)} : B^{\langle s \rangle} \, |X|^{-1} X^{(r)} \\ &= |X| \, (A^{(r)} : B^{\langle s \rangle}) \end{aligned}$$

nach den Regeln über das Rechnen mit abgeleiteten adjungierten Matrizen, insbesondere nach dem Satz von Jacobi und wegen $m = r + s$ (vgl. T. Nr. 1). $|X|$ ist also durch A, B und A', B' festgelegt.

Sei nun $p > 0$. Ist dann ε eine beliebige Einheit aus K und ersetzt man in dem vorhergehenden Beweis $\mathfrak{s}_p$ und $\mathfrak{s}_p'$ durch $\varepsilon\mathfrak{s}_p$ und $\varepsilon\mathfrak{s}_p'$, so bleiben alle Überlegungen gültig. Die Berechnung der Determinante $|X|$ aus der Summendarstellung

$$X^* = (X + \cdots + \mathfrak{s}_{p-1}\mathfrak{z}_{p-1}^*) + \varepsilon(x\mathfrak{s}_p\mathfrak{z}_p^* + \cdots + y'\mathfrak{s}_p'\mathfrak{z}_p'^*)$$

zeigt aber, wenn man beachtet, daß die Determinante der ersten Klammer Null ist, daß der neue Wert sich von dem alten um den Faktor ε unterscheidet. Im Falle $p > 0$ darf demnach die Matrix X in (7a) als 1-Matrix angenommen werden.

§ 4. Vollständigkeit und Unabhängigkeit des Invariantensystems.

12. R_k und R_k' ($k = n - 1, \ldots, 0$) seien zwei Systeme von Berandungsmatrizen aus K, welche in den Invarianten von § 1 übereinstimmen. Es soll gezeigt werden, daß R_k und R_k' durch geeignete Erweiterung und Transformation in einander übergehen.

Zunächst mögen beide Systeme so erweitert werden, daß für jedes k die Ränge r_k, r_k' entsprechender Berandungsmatrizen R_k, R_k' gleich werden. Dann sind auch die Zeilenzahlen α_{k+1}, α_{k+1}' von R_k und R_k' gleich, ebenso die Spaltenzahlen α_k, α_k', denn sie bestimmen sich eindeutig aus den r_k und p_k auf Grund der Formeln für die Bettischen Zahlen in § 1. Im Falle $n = 1$ enthält dann § 2 bereits das Resultat. Denn R_k und R_k' stimmen überein im Rang, den Elementarteilern, der Spalten- und der Zeilenklasse und im Falle $r_0 = \alpha_1 = \alpha_0$ in der Torsion, welche in diesem Falle mit der Determinante identisch ist. Wenn $n > 1$, mögen die R_k und R_k' nochmals so erweitert werden, daß alle $r_k = r_k' > 0$. Nach den Formeln für die Bettischen Zahlen ergibt sich dann, daß für $k = n - 2, \ldots, 1$ der Rang r_k jeder Matrix R_k kleiner ist als ihre Zeilenzahl α_{k+1} und als ihre Spaltenzahl α_k und daß für R_{n-1} und R_0 jedenfalls $r_{n-1} < \alpha_{n-1}$, $r_0 < \alpha_1$. Deshalb gelten nach § 2 für jedes k Gleichungen $R_k' = P_k R_k Q_k$ mit 1-Matrizen P_k, Q_k.

13. Es seien zunächst alle $p_k = 0$. Für Q_0 sei T_0 gesetzt. In den beiden Gleichungen $R_1' = (P_1 R_1)\,Q_1$, $R_0' = P_0(R_0 T_0)$ darf man nach § 3 Q_1 durch eine unimodulare Matrix T_1 und gleichzeitig P_0 durch T_1^{-1} ersetzen. $|T_1|$ berechnet sich wie in Nr. **11** aus

$$R_1'^{(r_1)} : R_0'^{\langle r_0\rangle} = |T_1|\left((P_1R_1)^{(r_1)} : (R_0T_0)^{\langle r_0\rangle}\right).$$

Wenn $n > 2$, so ist der Rang r_1 von P_1R_1 kleiner als die Zeilenzahl α_2, man kann also nach Nr. **4** durch passende Wahl von P_1 und Q_1 erreichen, daß $(P_1R_1)^{(r_1)}$ eine beliebig vorgegebene Einheit als Faktor bekommt. Das geschehe in der Weise, daß $|T_1| = 1$ wird. Wenn $n > 3$, so kann man mit den beiden Gleichungen $R_2' = P_2R_2Q_2$, $R_1' = P_1R_1T_1$ entsprechend verfahren. Man erhält so eine Reihe von 1-Matrizen $T_0, T_1, \ldots$ und entsprechende Transformationsgleichungen, zuletzt $R_{n-2}' = P_{n-2}R_{n-2}T_{n-2}$. Nimmt man die Gleichung $R_{n-1}' = P_{n-1}R_{n-1}Q_{n-1}$ hinzu, so darf man nach § 3 Q_{n-1} durch eine unimodulare Matrix T_{n-1} und gleichzeitig P_{n-2} durch T_{n-1}^{-1} ersetzen. Für die 1-Matrix P_{n-1} sei T_n^{-1} gesetzt. $|T_{n-1}|$ läßt sich wie folgt bestimmen: Ist T die Torsion für das System der R_k, so ergibt sich daraus die Torsion für das System der $T_{k+1}^{-1}R_kT_k$ nach T. Nr. **5** zu $|T_{n-1}|$ T. Da beide Werte nach Voraussetzung gleich sind, folgt $|T_{n-1}| = 1$. Damit ist in diesem Falle die Behauptung bewiesen.

Seien nun nicht alle $p_k = 0$, und sei p_l die Bettische Zahl mit dem kleinsten Index l und $p_l > 0$. Wenn $l = n$, so führt das oben für $R_0', R_1', \ldots, R_{n-2}'$ angewandte Verfahren ohne weiteres zum Ziel. Im allgemeinen Fall erhält man durch dies Verfahren jedenfalls Transformationsmatrizen $T_0, \ldots, T_{l-1}$ mit der Determinante 1 der gewünschten Art. In ganz analoger Weise kann man, von R_{n-1}' zu R_{n-2}' usf. absteigend, Transformationsmatrizen $T_n, \ldots, T_{l+1}$ der gewünschten Art erhalten und gelangt so zu den Gleichungen

$$R_l' = T_{l+1}^{-1} R_l Q_l, \qquad R_{l-1}' = P_{l-1} R_{l-1}' T_{l-1}.$$

Hierin kann man Q_l durch eine unimodulare Matrix T_l und gleichzeitig P_{l-1} durch T_l^{-1} ersetzen. Da $p_l > 0$, darf man T_l sogar als 1-Matrix annehmen. Damit ist die Vollständigkeit des Invariantensystemes gezeigt.

14. Mit Hilfe der Elementarteilertheorie kann man leicht Systeme von Berandungsmatrizen aus K angeben, welche vorgegebene Bettische Zahlen, Torsionsideale und Torsionsklassen besitzen, sofern diese Invarianten die Abhängigkeiten von Nr. 2 erfüllen. Werden lauter Bettische Zahlen Null vorgeschrieben, so kann man die Torsion dadurch um eine beliebige Einheit ε als Faktor verändern, daß man eine beliebige der $\alpha_n = r_{n-1}$ Zeilen von R_{n-1} mit ε multipliziert. Dabei erhält $R_{n-1}^{(r_{n-1})}$ und damit T den Faktor ε. Die aufgestellten Invarianten sind also innerhalb der angegebenen Bedingungen unabhängig.

§ 5. Duale Überdeckungen.

15. Der soeben betrachteten Überdeckung $\mathfrak{U}$ eines topologischen Komplexes mit dem Ganzzahligkeitsbereich eines algebraischen Zahlkörpers K sei jetzt die dazu duale Überdeckung $\mathfrak{U}^*$ desselben Komplexes mit dem Ganzzahligkeitsbereich des konjugiert komplexen Körpers $\overline{\mathrm{K}}$ gegenübergestellt[7]). $\mathfrak{U}^*$ ist definiert durch die Berandungsmatrizen $R_k^* = \overline{R}_{n-1-k}'$; der Querstrich bezeichnet die konjugiert komplexen Zahlen, der senkrechte Strich die Spiegelung der Matrix an der Hauptdiagonale. Es sollen die Beziehungen von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ festgestellt werden.

Für die Bettischen Zahlen gilt

$$p_k^* = \alpha_k^* - r_{k-1}^* - r_k^* = \alpha_{n-k} - r_{n-k} - r_{n-1-k} = p_{n-k} \qquad (k = n, \ldots, 1). \tag{9}$$

$[\mathfrak{e}_k]$ bzw. $[\mathfrak{e}_k^*]$ bezeichne das System der k-dimensionalen Torsionsideale von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$. Dann folgt aus der Definition der R_k^* ohne weiteres

$$[\mathfrak{e}_k^*] = [\bar{\mathfrak{e}}_{n-1-k}] \qquad (k = n-1, \ldots, 0), \tag{10}$$

ebenso für die Torsionsklassen

$$\mathfrak{S}_k^* = \overline{\mathfrak{Z}}_{n-1-k}, \quad \mathfrak{Z}_k^* = \overline{\mathfrak{S}}_{n-1-k} \qquad (k = n-1, \ldots, 0). \tag{11}$$

Die Torsionsklassen lassen sich auch durch die Homologiegruppen der Überdeckung beschreiben: Jede Operatorgruppe mit dem Ganzzahligkeitsbereich von K als Operatorenbereich mit endlich vielen Erzeugenden ist eindeutig charakterisiert durch ihren Rang, ihre Elementarteiler und ihre Idealklasse. Letztere ist definiert als die Zeilenklasse des Relationenmoduls für ein beliebiges endliches Erzeugendensystem. Der Rang der k-dimensionalen Homologiegruppe $\mathfrak{H}_k$ ist p_k; ihre Torsionsideale sind das System $[\mathfrak{e}_k]$, für $k = n$ fehlen sie; als Idealklasse $\mathfrak{C}_k$ von $\mathfrak{H}_k$ erkennt man leicht die Klasse $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{Z}_k \mathfrak{S}_{k-1}^{-1}$ Dabei ist $\mathfrak{Z}_n \sim \mathfrak{S}_{-1} \sim 1$ zu setzen.

Auf Grund der in Nr. 2 aufgestellten Abhängigkeiten kann man mit Hilfe der Torsionsideale auch umgekehrt die $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z}_k$ durch die $\mathfrak{C}_k$ ausdrücken. Man kann also auch die $\mathfrak{C}_k$ an Stelle der $\mathfrak{S}_k, \mathfrak{Z}_k$ zur Charakterisierung von $\mathfrak{U}$ verwenden. Für $\mathfrak{C}_k^*$ ergibt

[7]) Vgl. a. a. O. [1]), § 5.

sich $\overline{\mathfrak{S}}_{n-1-k} \overline{\mathfrak{Z}}_{n-k}^{-1}$, also

$$(11') \qquad \mathfrak{C}_k^* = \overline{\mathfrak{C}}_{n-1}^{-1} \qquad (k = n, \ldots, 0).$$

Sind alle Bettischen Zahlen von $\mathfrak{U}$ Null, so gilt das gleiche für $\mathfrak{U}^*$. Für die Torsion T^* von $\mathfrak{U}^*$ folgt dann nach der Definition der Torsion

$$(12) \qquad \mathsf{T}^*\overline{\mathsf{T}} = 1, \text{ wenn } n \text{ gerade}, \qquad \mathsf{T}^* = \overline{\mathsf{T}}, \text{ wenn } n \text{ ungerade}.$$

Diese Gleichungen gelten jedoch nur bis auf Faktoren aus $\mathfrak{T}$ bzw. $\overline{\mathfrak{T}}$.

16. Es sei noch der Spezialfall betrachtet, daß $\overline{\mathsf{K}} = \mathsf{K}$ und daß $\mathfrak{U}^*$ mit $\mathfrak{U}$ äquivalent ist, d. h. daß $\mathfrak{U}^*$ aus $\mathfrak{U}$ durch Erweiterung und Transformation hervorgeht. Solche Überdeckungen treten auf Grund des Dualitätsprinzip bei den Homotopiekettenringen von Mannigfaltigkeiten auf. In diesem Fall stimmen die Invarianten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ überein. Die abgeleiteten Beziehungen (9)—(12) gehen dann über in die folgenden:

$$p_k = p_{n-k} \qquad (k = n, \ldots, 0),$$

$$[\mathfrak{e}_k] = [\overline{\mathfrak{e}}_{n-1-k}] \qquad (k = n-1, \ldots, 0),$$

$$\mathfrak{S}_k = \overline{\mathfrak{Z}}_{n-1-k}, \quad \mathfrak{Z}_k = \overline{\mathfrak{S}}_{n-1-k} \qquad (k = n-1, \ldots, 0),$$

$$\mathsf{T}\overline{\mathsf{T}} = 1 \text{ bei geradem } n, \qquad \mathsf{T} = \overline{\mathsf{T}} \text{ bei ungeradem } n,$$

bis auf Faktoren aus $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$.

Diese Gleichungen sind Verallgemeinerungen der Poincaréschen Dualitätsbeziehungen für orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Eingegangen 27. Juli 1936.

Die ersten sieben der in diesem Heft zusammengestellten Arbeiten sind in einer Arbeitsgemeinschaft der mathematischen Fachschaftsabteilung Göttingen entstanden, die von Herrn Witt geleitet wurde. In diesen Arbeiten werden folgende Themen behandelt:

Der innere Aufbau der p-adischen Körper, allgemeiner der diskret bewerteten perfekten Körper und die Struktur der endlichen Schiefkörper über ihnen.

Konstruktion aller zyklischen Körper bzw. Algebren vom Grad p^n; die arithmetische Theorie solcher zyklischen Funktionenkörper; Bestimmung der Divisorenklassen der Ordnung p^n (Charakteristik p).

Zusammenhang der Kummerschen Erzeugung der unverzweigten zyklischen diskret bewerteten perfekten Körper vom Grad p^n (Charakteristik 0) mit der Artin-Schreierschen Erzeugung des Restklassenkörpers (Charakteristik p).

Oberflächlich gesehen, scheint es sich hier um ganz verschiedene Gebiete der Algebra zu handeln, sie sind jedoch, angefangen von den p-adischen Körpern bis zu den Divisorenklassen, alle auf derselben Grundlage behandelt worden.

Die achte Arbeit in diesem Heft ist in einem Seminar von Herrn Hasse entstanden.