Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1937
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0176
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176

LOG Id: LOG_0017
LOG Titel: Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper.

Von *Oswald Teichmüller* in Göttingen.

H. Hasse und F. K. Schmidt haben zuerst allgemeine Sätze über die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Typen diskret bewerteter perfekter Körper aufgestellt [1]). Sie fanden als wichtigstes Bestimmungsstück dieser Körper den Restklassenkörper. Auf Grund des neuen Formalismus, den E. Witt veröffentlicht [2]) und dessen Zusammenhang mit der gewöhnlichen p-adischen Addition er auch selbst bemerkte, gelang es mir, die Ergebnisse von Hasse und F. K. Schmidt nicht nur auf übersichtlicherem Wege zu beweisen, sondern auch die Struktur von dort als vorhanden nachgewiesenen Körpern durch explizite Formeln festzulegen. Eine Skizze dieser Untersuchungen veröffentlichte ich bereits [3]); eine ausführlichere Darstellung an dieser Stelle sollte folgen.

Inzwischen hat aber Witt selbst die Hauptergebnisse (nämlich die Strukturuntersuchung der diskret bewerteten perfekten Körper mit vollkommenem Restklassenkörper von Primzahlcharakteristik) in seine eben zitierte Arbeit ohne wesentliche Abänderung aufgenommen. Deshalb kann ich mich darauf beschränken, hier den Fall eines unvollkommenen Restklassenkörpers auf jenen schon erledigten Fall zurückzuführen.

Der Vollständigkeit wegen werden gelegentlich auch wohlbekannte Hilfssätze bewiesen.

Ein *diskret bewerteter Körper* ist ein Körper K, in dem jedem Element α eine Zahl $w(\alpha)$ folgendermaßen zugeordnet ist:

$$(1)\qquad \begin{cases} w(0) = \infty, \quad w(\alpha) \text{ ganzrational für } \alpha \neq 0; \\ w(\alpha+\beta) \geqq \operatorname{Min}(w(\alpha), w(\beta)); \\ w(\alpha\beta) = w(\alpha) + w(\beta). \end{cases}$$

Wir dürfen, ohne interessante Fälle zu verlieren, annehmen, daß K ein Element π mit

$$w(\pi) = 1$$

enthält; jedes solche π heißt *Primelement.* Die Menge I aller $\alpha \in K$ mit $w(\alpha) \geqq 0$ ist ein Integritätsbereich, dessen Quotientenkörper K ist; I heißt der *Bewertungsring.* Die *Ideale* von I sind:

$$I = (1), \quad (\pi), \quad (\pi^2), \ldots, (0).$$

---

1) H. Hasse und F. K. Schmidt, Die Struktur diskret bewerteter Körper, dieses Journal **170** (1934).

2) E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p, dieser Band, S. 126.

3) O. Teichmüller, Über die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper, Gött. Nachrichten N. F. **1** (1936).

$\alpha \equiv \beta \pmod{\pi^n}$ ist gleichbedeutend mit $w(\alpha - \beta) \geqq n$. Der *Restklassenring* $I/(\pi^n)$ heiße $\mathfrak{R}_n$, die Elemente von $\mathfrak{R}_n$ sind also als Restklassen spezielle Teilmengen von I. Für $m < n$ ist jede Restklasse aus $\mathfrak{R}_n$ in einer Restklasse aus $\mathfrak{R}_m$ enthalten, und es gilt

$$\mathfrak{R}_n/(\pi^m) \cong \mathfrak{R}_m.$$

Besonders wichtig ist $\mathfrak{R}_1$; dieser Restklassenring ist sogar ein Körper $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{R}_1 = I/(\pi).$$

$\mathfrak{K}$ heißt der *Restklassenkörper* von K. All diese Bezeichnungen werden in der ganzen Arbeit angewandt.

K heißt *perfekt*, wenn es zu jeder Folge α_n aus K, für die $\lim w(\alpha_n - \alpha_m) = \infty$ gilt, ein $\alpha \in K$ mit $\lim w(\alpha_n - \alpha) = \infty$ gibt; dies α heißt dann $\lim \alpha_n$. Wir formen diese Bedingung um.

Hilfssatz 1. *K ist dann und nur dann perfekt, wenn I perfekt ist.*

Beweis. K sei perfekt, α_n sei eine Folge aus I mit $\lim w(\alpha_n - \alpha_m) = \infty$. Dann gibt es ein $\alpha \in K$ mit $\lim w(\alpha_n - \alpha) = \infty$. Nach (1) gilt

$$w(\alpha) \geqq \operatorname{Min}\,(w(\alpha - \alpha_n),\, w(\alpha_n));$$

aber $w(\alpha_n)$ ist $\geqq 0$ und $w(\alpha - \alpha_n)$ strebt gegen ∞, darum $w(\alpha) \geqq 0$, $\alpha \in I$.

Nun sei I perfekt, α_n sei eine Folge aus K mit $\lim w(\alpha_n - \alpha_m) = \infty$. Ist $w(\alpha_n - \alpha_N) \geqq 0$ für $n > N$, so ist

$$w(\alpha_n) \geqq \operatorname{Min}\,(0, w(\alpha_N)) \qquad \text{für } n > N.$$

Daher gibt es ein M mit

$$w(\alpha_n) \geqq -M \qquad \text{für alle } n.$$

$\pi^M \alpha_n$ ist dann eine Folge in I mit

$$w(\pi^M \alpha_n - \pi^M \alpha_m) = M + w(\alpha_n - \alpha_m) \to \infty,$$

also gibt es ein $\beta \in I$ mit $\lim w(\pi^M \alpha_n - \beta) = \infty$; setzt man $\alpha = \beta \pi^{-M}$, so strebt

$$w(\alpha_n - \alpha) = w(\pi^M \alpha_n - \beta) - M \to \infty.$$

Unter einer *Restklassenschachtelung* verstehen wir eine Folge von Restklassen $\mathfrak{r}_1 \in \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{r}_2 \in \mathfrak{R}_2, \ldots$, für die

$$\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{r}_2 > \mathfrak{r}_3 > \cdots$$

gilt.

Hilfssatz 2. *Dann und nur dann ist I (also K) perfekt, wenn jede Restklassenschachtelung sich auf ein Element von I zusammenzieht, also einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

Beweis. I sei perfekt, $\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{r}_2 > \cdots$ sei eine Restklassenschachtelung. α_n sei irgendein Element von $\mathfrak{r}_n$. Für $m < n$ gilt dann $\alpha_m \in \mathfrak{r}_m$ und auch $\alpha_n \in \mathfrak{r}_n < \mathfrak{r}_m$, also $\alpha_m \equiv \alpha_n \pmod{\pi^m}$ oder $w(\alpha_n - \alpha_m) \geqq m$. Daher strebt $w(\alpha_n - \alpha_m) \to \infty$; es gibt einen $\lim \alpha_n = \alpha \in I$. Zu jedem n gibt es ein $N \geqq n$ mit $w(\alpha_N - \alpha) \geqq n$; aus $\alpha_N \in \mathfrak{r}_N \leqq \mathfrak{r}_n$ und $\alpha \equiv \alpha_N \pmod{\pi^n}$ folgt $\alpha \in \mathfrak{r}_n$. Unser α liegt also in allen $\mathfrak{r}_n$.

α ist das einzige Element von I mit dieser Eigenschaft; denn liegen α und β in allen $\mathfrak{r}_n$, so gilt für alle n

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\pi^n}$$

oder $w(\alpha - \beta) \geqq n$, $\quad w(\alpha - \beta) = \infty$, $\quad \alpha = \beta$.

Nun werde vorausgesetzt, jede Restklassenschachtelung ziehe sich auf ein Element von I zusammen, und α_n sei eine Folge in I mit $\lim w(\alpha_m - \alpha_n) = \infty$. Dann gilt für jedes k zuletzt $w(\alpha_n - \alpha_m) \geqq k$, zuletzt sind also alle α_n kongruent mod π^k, die letzten α_n liegen in einer einzigen Restklasse $\mathfrak{r}_k$ mod π^k. Diese $\mathfrak{r}_k$ bilden offenbar eine Restklassenschachtelung, sie mögen sich auf α zusammenziehen. Dann liegt α für jedes k mit den letzten α_n in derselben Restklasse $\mathfrak{r}_k \pmod{\pi^k}$, zuletzt ist $w(\alpha_n - \alpha) \geqq k$. Das heißt aber $\lim w(\alpha_n - \alpha) = \infty$.

Von jetzt an ist K immer perfekt.

Unter einem *Repräsentantensystem* (genauer: Repräsentantensystem von I mod (π)) versteht man eine Teilmenge von I, die mit jeder Restklasse aus $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{K}$ genau ein Element, den „*Repräsentanten*" dieser Restklasse, gemein hat. Bekannt ist

Hilfssatz 3. *Ist π_n eine Folge mit $w(\pi_n) = n$ (z. B. $\pi_n = \pi^n$) und R ein Repräsentantensystem in K, so läßt sich jedes Element von K eindeutig in der Form*

$$\alpha = \sum_{n=w(\pi_n)}^{\infty} a_n \pi_n \qquad (a_n \in R)$$

darstellen. Insbesondere lassen sich die Elemente von I eindeutig in der Form

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \qquad (a_n \in R)$$

darstellen.

Wir werden später gelegentlich einen Oberkörper $\overline{K}$ endlichen Grades n von K zu betrachten haben. Die „Bewertung" $w(\alpha)$ von K läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einer Bewertung $\overline{w}(\mathsf{A})$ fortsetzen, die den Elementen A von $\overline{K}$ Zahlen so zuordnet, daß (1) gilt. Nur sind die Werte $\overline{w}(\mathsf{A})$ nicht mehr notwendig ganze Zahlen, sondern es können Brüche auftreten, die aber jedenfalls Vielfache von $\frac{1}{n}$ sind. Ist $\overline{w}(\Pi) = \frac{1}{e}$ der kleinste positive Wert von w, so ist e eine natürliche Zahl, die *Verzweigungsordnung* von $\overline{K}/K$. Man kann $\overline{w}(\mathsf{A})$ durch das stets ganzzahlige $e\overline{w}(\mathsf{A})$ ersetzen und alle vorigen Schlüsse durchführen. Der Restklassenkörper $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\overline{K}$ ist ein endlicher Oberkörper von $\mathfrak{K}$, der Grad $(\overline{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K})$ heißt *Restklassengrad*. Es gilt

Hilfssatz 4. *Der Grad von $\overline{K}$ über K ist das Produkt aus Restklassengrad und Verzweigungsordnung.*

Wir interessieren uns hier für den Fall, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ des diskret bewerteten Körpers K die *Primzahlcharakteristik* p hat. K hat dann entweder auch die Charakteristik p (*charakteristikgleicher Fall*) oder die Charakteristik 0 (*charakteristikungleicher Fall*). Im letzteren Fall liegt p selbst, als Element von I angesehen, in (π) und hat daher eine positive Ordnungszahl

$$w(p) = s \geqq 1;$$

ist $s = 1$, d. h. ist p ein Primelement, so heißt K *unverzweigt*.

$\mathfrak{K}$ heißt bekanntlich *vollkommen*, wenn man in $\mathfrak{K}$ aus jedem Element von $\mathfrak{K}$ die p-te Wurzel ziehen kann. Die Bestimmung der Struktur von K bei vollkommenem $\mathfrak{K}$ ist bei Witt a. a. O. veröffentlicht. Ich gebe nur die für uns wichtigen Hauptergebnisse an.

Hilfssatz 5. *K enthält ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem R, das multiplikative Repräsentantensystem, das durch jede einzelne der folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:*

1) *Liegt α_n in der Restklasse $\mathfrak{a}^{p^{-n}}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{K})$, so strebt $\alpha_n^{p^n}$ für $n \to \infty$ gegen den Repräsentanten a von $\mathfrak{a}$ in R.*

2) *Ist $a_{\overline{n}|}$ der Repräsentant von $\mathfrak{a}^{p^{-n}}$ in R, so gilt $a_{\overline{n+1}|}^p = a_{\overline{n}|}$.*

3) *Sind a, b, c die Repräsentanten von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in R und gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, dann gilt auch $ab = c$.*

Hat K die Charakteristik p, so ist R ein Unterkörper von K, und K ist der Potenzreihenkörper mit dem Konstantenkörper R: $K = R\{\pi\}$.

Hat K die Charakteristik 0 und ist K unverzweigt, so kann man nach Hilfssatz 3 die Elemente von I in „p-adische Reihen"

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \qquad a_n \in R,$$

nach dem multiplikativen Repräsentantensystem R entwickeln. Wir setzen

$$a_n^{p^n} = x_n \in R$$

und schreiben auch

$$a_n = x_n^{p^{-n}};$$

die p^n-te Wurzel ist zwar nicht notwendig eindeutig, aber *in* R gibt es nur eine p^n-te Wurzel aus einem Repräsentanten x_n, weil sich die p^n-te Wurzel im Restklassenkörper eindeutig ziehen läßt. Wir haben also eine Darstellung

$$(2) \qquad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{p^{-n}} p^n \qquad (x_n \in R).$$

Wenn man nun mehrere solche p-adische Reihen addiert, subtrahiert oder multipliziert und das Ergebnis wieder in eine p-adische Reihe (2) entwickelt, so hängen die Restklassen $\mathfrak{x}_n \pmod p$ der Koeffizienten x_n des Ergebnisses *ganzrational* von den Restklassen der Koeffizienten der ursprünglichen Reihen ab. Wir notieren den Fall, daß die algebraische Summe mehrerer Repräsentanten aus R gebildet wird:

Hilfssatz 6. *Ist K unverzweigt und $\mathfrak{K}$ vollkommen und R das multiplikative Repräsentantensystem in K, so kann man die algebraische Summe mehrerer Repräsentanten in eine p-adische Reihe entwickeln:*

$$a + a' + \cdots - b - b' - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n \qquad (a, b, c \in R),$$

und die Restklassen $\mathfrak{c}_n^{p^n}$ der $c_n^{p^n}$ drücken sich im Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ ganzrational durch die Restklassen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \ldots, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \ldots$ der $a, \ldots$ aus.

Ferner gilt

Hilfssatz 7. *Ist K charakteristikungleich bewertet und $\mathfrak{K}$ vollkommen, so enthält K einen einzigen unverzweigten Unterkörper K', der hinsichtlich derselben Bewertung perfekt ist und denselben Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ wie K hat.*

„Denselben Restklassenkörper", das heißt natürlich nicht nur, die Restklassenkörper von K und K' seien isomorph. Der Ausdruck ist vielmehr so zu verstehen: jedes Element des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}'$ von K' liegt in einer und nur einer Restklasse aus $\mathfrak{K}$, und jede Restklasse aus $\mathfrak{K}$ enthält auch höchstens eine Restklasse aus $\mathfrak{K}'$. Man identifiziert die Restklassen aus $\mathfrak{K}'$ mit den sie enthaltenden Restklassen aus $\mathfrak{K}$ und macht so in eindeutig bestimmter Weise $\mathfrak{K}'$ zu einem Unterkörper von $\mathfrak{K}$. Dieser Unterkörper $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ soll im vorliegenden Fall mit $\mathfrak{K}$ zusammenfallen.

Bevor wir in die eigentliche Strukturuntersuchung eintreten, noch ein Hilfssatz über das Rechnen mod p:

Hilfssatz 8. *Der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ habe die Charakteristik p. Für Elemente a, b aus I folgt aus $a \equiv b \pmod{\pi^n}$, daß $a^{p^r} \equiv b^{p^r} \pmod{\pi^{n+r}}$.*

Beweis. Ist $b = a + \pi^n c$, so ist

$$b^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}\pi^n c + \cdots + \binom{p}{p-1} a(\pi^n c)^{p-1} + (\pi^n c)^p.$$

Hierin sind die Binomialkoeffizienten durch p, also erst recht durch π teilbar (wegen $p \equiv 0 \pmod{\pi}$), die mittleren Glieder sind also durch π^{n+1} teilbar, während das letzte sogar durch π^{pn} teilbar ist. Es bleibt

$$a^p \equiv b^p \pmod{\pi^{n+1}}.$$

Man mache Induktion nach r.

Durch die Hilfssätze 5 bis 7 wird die Struktur der diskret bewerteten perfekten Körper mit vollkommenem Restklassenkörper beschrieben. Wir nehmen nun an, K sei ein *diskret bewerteter perfekter Körper mit dem unvollkommenen Restklassenkörper* $\mathfrak{K}$ *der Charakteristik* p.

In einer anderen Arbeit [4]) skizzierte ich einen Beweis für

Hilfssatz 9. *$\mathfrak{K}$ hat eine p-Basis $\mathfrak{M}$, d. h. eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ r verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}$, so hat*

$$\mathfrak{K}\left(\sqrt[p]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[p]{\alpha_r}\right)$$

über $\mathfrak{K}$ den Grad p^r.

b) $\mathfrak{K}^p(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$.

Wir wählen ein für alle Mal *eine feste p-Basis* $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ aus. Zwei Eigenschaften der p-Basis sollen gleich festgestellt werden:

Hilfssatz 10. *Sind m und n ganze Zahlen mit $m < n$, so gilt*

$$\mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{M}^{p^m}) = \mathfrak{K}^{p^m}.$$

Beweis. Aus $\mathfrak{K}^p(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$ folgt

$$\mathfrak{K}^{p^2}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}^{p^2}(\mathfrak{M}^p)(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{K}^p(\mathfrak{M}))^p(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}^p(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}$$

und genau so allgemein

$$\mathfrak{K}^{p^k}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{K}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{K}^{p^{k+m}}(\mathfrak{M}^{p^m}) = \mathfrak{K}^{p^m} \qquad (k > 0).$$

Man muß nur beachten, daß bei Charakteristik p das Erheben eines Körpers in die p-te Potenz ein Isomorphismus ist.

Hilfssatz 11. *Die Ausdrücke*

$$\mathfrak{A} = \alpha_1^{e_1} \cdots \alpha_r^{e_r}, \tag{3}$$

worin $r \geqq 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}$, $0 < e_i \leqq p^n - 1$, bilden eine (lineare) Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^{p^n}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 10 ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{M})$, jedes Element von $\mathfrak{K}$ liegt also in einem Körper $\mathfrak{K}^{p^n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ $(\alpha_i \in \mathfrak{M})$. Weil aber jedes α_i einer Gleichung p^n-ten Grades über $\mathfrak{K}^{p^n}$ genügt, sind alle Elemente von $\mathfrak{K}^{p^n}(\alpha_i)$ i. b. a. $\mathfrak{K}^{p^n}$ linear von den

$$\mathfrak{A} = \alpha_1^{e_1} \cdots \alpha_r^{e_r} \quad (0 \leqq e_i \leqq p^n - 1) \tag{4}$$

abhängig. Es bleibt zu zeigen, daß je endlich viele Ausdrücke (3) i. b. a. $\mathfrak{K}^{p^n}$ linear unabhängig sind; das tun wir, indem wir zeigen, daß die Ausdrücke (4) stets i. b. a. $\mathfrak{K}^{p^n}$

[4]) O. Teichmüller, p-Algebren, Deutsche Mathematik 1 (1936).

linear unabhängig sind, nämlich indem wir

$$(\mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) : \mathfrak{K}) = p^{nr}$$

beweisen.

Selbstverständlich ist $(\mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) : \mathfrak{K}) \leqq p^{nr}$, wir haben die umgekehrte Ungleichung zu beweisen. — Für $\nu = 1, \ldots, n$ wird sich der Grad

$$(\mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_i^{p^\nu}) : \mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_i^{p^{\nu-1}}))$$

nicht vergrößern, wenn man mit $\mathfrak{K}^{p^\nu}$ erweitert:

$$(\mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_i^{p^\nu}) : \mathfrak{K}^{p^n}(\mathfrak{a}_i^{p^{\nu-1}})) \geqq (\mathfrak{K}^{p^\nu} : \mathfrak{K}^{p^\nu}(\mathfrak{a}_i^{p^{\nu-1}})) = p^r$$

nach der Eigenschaft a) der p-Basis $\mathfrak{M}$. Durch Multiplikation über ν folgt die Behauptung.

Nun greifen wir aus jeder Restklasse $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$ *einen Vertreter* a *beliebig heraus; diese* a *bilden eine Menge* M. Die Auswahl von M ist wie die einer p-Basis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ recht willkürlich, wir halten aber in der ganzen folgenden Untersuchung an dem einmal gewählten M fest.

Hilfssatz 12. $w(a) = 0$ *für* $a \in M$.

Beweis. a liegt als Element einer Restklasse mod π in I, also $w(a) \geqq 0$. Wäre $w(a) > 0$, so wäre $a \equiv 0 \pmod{\pi}$, die Restklasse $\mathfrak{a}$ von a wäre 0. Die Restklasse 0 kann aber in einer p-Basis von $\mathfrak{K}$ (wegen a)) nicht vorkommen.

Hilfssatz 13. $\bar{K}$ *sei ein Oberkörper endlichen Grades von* K *von der Form*

$$\bar{K} = K(a_{1\overline{1}|}, \ldots, a_{r\overline{1}|}) \quad \textit{mit} \quad a_{i\overline{1}|}^p = a_i,$$

wo die a_i r *verschiedene Elemente von* M *sind. Dann hat* $\bar{K}$ *über* K *den Grad* p^r, *und wenn man die Bewertung* w *von* K *auf* $\bar{K}$ *überträgt, wird der Restklassengrad* p^r *und die Verzweigungsordnung* 1. *Das auf* $\bar{K}$ *fortgesetzte* w *nimmt also auch in* $\bar{K}$ *von selbst* (*ohne vorherige Multiplikation mit einer Zahl* e) *ganzzahlige Werte an.*

Beweis. Selbstverständlich ist $(\bar{K} : K) \leqq p^r$. Nach Hilfssatz 4 ist also alles bewiesen, wenn gezeigt ist, daß der Restklassengrad von $\bar{K}$ über K mindestens p^r ist.

Nach Hilfssatz 12 ist

$$w(a_{i\overline{1}|}) = \frac{1}{p}\, w(a_i) = 0.$$

Im Restklassenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\bar{K}$ sei $\mathfrak{a}_{i\overline{1}|}$ die Restklasse von $a_{i\overline{1}|}$ mod π. Dann ist $\mathfrak{a}_{i\overline{1}|}^p = \mathfrak{a}_i$, $\bar{\mathfrak{K}}$ enthält also den Körper

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_{1\overline{1}|}, \ldots, \mathfrak{a}_{r\overline{1}|}) = \mathfrak{K}\left(\sqrt[p]{\mathfrak{a}_1}, \ldots, \sqrt[p]{\mathfrak{a}_r}\right).$$

Dieser hat aber nach der Eigenschaft a) der p-Basis den Grad p^r über $\mathfrak{K}$.

Wir sehen gleichzeitig, daß der Restklassenkörper $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\bar{K}$ genau $\mathfrak{K}\left(\sqrt[p]{\mathfrak{a}_1}, \ldots, \sqrt[p]{\mathfrak{a}_r}\right)$ ist.

Außerdem folgt, daß K durch die definierenden Relationen $a_{i\overline{1}|}^p = a_i$ schon eindeutig festgelegt ist.

Wir bilden jetzt *das Kompositum* $\tilde{K}$ *aller der Körper* $\bar{K}$ *des Hilfssatzes* 13. K entsteht also aus K durch Adjunktion je eines $a_{\overline{1}|}$ mit $a_{\overline{1}|}^p = a$ für alle $a \in M$. Die Elemente von $\tilde{K}$ sind endliche Summen $\Sigma \alpha_{i_1, \ldots, i_r}\, a_{1\overline{1}|}^{i_1} \cdots a_{r\overline{1}|}^{i_r}$ $(\alpha \in K)$ und als solche Elemente von jeweils passenden Körpern $\bar{K}$, hierdurch ist das Rechnen in $\tilde{K}$ beschrieben. w läßt sich in jedes $\bar{K}$, also auch in $\tilde{K}$ als ganzzahlige diskrete Bewertung mit den Eigenschaften (1) fortsetzen. Aber wenn $\mathfrak{M}$ unendlich sein sollte, ist $\tilde{K}$ nicht perfekt.

Wir schließen $\tilde{K}$ ab: Der kleinste perfekte Oberkörper von $\tilde{K}$ heiße $K_{\overline{1}|}$. Der Restklassenkörper von $K_{\overline{1}|}$ heiße $\mathfrak{K}_{\overline{1}|}$. Jede Restklasse aus $\mathfrak{K}_{\overline{1}|}$ enthält ein Element eines $\bar{K}$, läßt sich also auch als (auf $K_{\overline{1}|}$ fortgesetzte) Restklasse aus $\bar{\mathfrak{K}}$ deuten und liegt als solche in einem $\mathfrak{K}\left(\sqrt[p]{\mathfrak{a}_1}, \ldots, \sqrt[p]{\mathfrak{a}_r}\right)$; darum ist nach b)

$$\mathfrak{K}_{\overline{1}|} = \mathfrak{K}\left(\sqrt[p]{\mathfrak{M}}\right) = \sqrt[p]{\mathfrak{K}}.$$

Weil $\mathfrak{M}$ eine p-Basis von $\mathfrak{K}$ ist, ist $\sqrt[p]{\mathfrak{M}}$ eine p-Basis von $\mathfrak{K}_{\overline{1}|} = \sqrt[p]{\mathfrak{K}}$. Die Menge aller $a_{\overline{1}|}$, die ja der Menge M aller a durch $a_{\overline{1}|}^p = a$ eineindeutig zugeordnet ist, heiße $M_{\overline{1}|}$. Dann kann man $M_{\overline{1}|}$ als Repräsentantensystem für die Restklassen aus $\mathfrak{M}_{\overline{1}|} = \sqrt[p]{\mathfrak{M}}$ auffassen. Die Überlegungen und Konstruktionen, die wir eben mit K und M ausgeführt haben, können wir also auch mit $K_{\overline{1}|}$ und $M_{\overline{1}|}$ ausführen. Wir erhalten so einen Körper $K_{\overline{2}|}$, der aus $K_{\overline{1}|}$ durch Adjunktion von je einer Lösung $a_{\overline{2}|}$ der Gleichung $a_{\overline{2}|}^p = a_{\overline{1}|}$ für jedes $a_{\overline{1}|}$ und nachfolgendes Abschließen entsteht und auf den sich die Bewertung w ganzzahlig fortsetzt und der den Restklassenkörper $\mathfrak{K}_{\overline{2}|} = \sqrt[p^2]{\mathfrak{K}}$ hat. In ihm sei $M_{\overline{2}|}$ die Menge der $a_{\overline{2}|}$ $(a \in M)$ usw.

Wir haben schließlich eine *Folge ineinandergeschachtelter perfekter Körper*

$$K < K_{\overline{1}|} < K_{\overline{2}|} < \cdots < K_{\overline{n}|} < \cdots,$$

die durch ein und dieselbe Funktion w diskret und ganzzahlig bewertet sind, so daß ein Primelement π von K zugleich in allen $K_{\overline{n}|}$ Primelement ist. Jedem $a \in M$ ist eine Folge $a_{\overline{n}|} \in K_{\overline{n}|}$ mit $a_{\overline{n+1}|}^p = a_{\overline{n}|}$ zugeordnet, für jedes n sei $M_{\overline{n}|}$ die Menge der $a_{\overline{n}|}$, $a \in M$. Der Restklassenkörper von $K_{\overline{n}|}$ ist $\mathfrak{K}_{\overline{n}|} = \sqrt[p^n]{\mathfrak{K}}$.

Nun bilden wir *die Vereinigungsmenge $\tilde{L}$ der Körperfolge $K_{\overline{n}|}$*. Auch $\tilde{L}$ ist offenbar ein Körper: Je zwei Elemente von $\tilde{L}$ sind in irgendeinem $K_{\overline{n}|}$ enthalten, in diesem berechnet man Summe, Produkt usw. $\tilde{L}$ ist auch durch w diskret bewertet. Jetzt schließen wir noch $\tilde{L}$ ab: der kleinste perfekte Oberkörper von $\tilde{L}$ heiße L, sein Restklassenkörper $\mathfrak{L}$. Es ist ohne weiteres zu sehen, daß $\mathfrak{L}$ die Vereinigung der Restklassenkörper $\mathfrak{K}_{\overline{n}|} = \sqrt[p^n]{\mathfrak{K}}$ von K_n ist. $\mathfrak{L}$ entsteht also aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion sämtlicher Restklassen $\mathfrak{a}_{\overline{n}|}$ mit $\mathfrak{a}_{\overline{n}|}^{p^n} = \mathfrak{a}$ für alle n und alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$.

Hilfssatz 14. *$\mathfrak{L}$ ist der kleinste vollkommene Oberkörper von $\mathfrak{K}$.*

Beweis. Jeder vollkommene Oberkörper von $\mathfrak{K}$ muß offenbar $\mathfrak{L}$ enthalten; wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{L}$ vollkommen ist. Jedes Element von $\mathfrak{L}$ liegt in einem $\mathfrak{K}_{\overline{n}|}$, nach Hilfssatz 10 $(\mathfrak{K}^{p^{-n}}(\mathfrak{M}^{p^{-n-1}}) = \mathfrak{K}^{p^{-n-1}})$ liegt seine p-te Wurzel in $\mathfrak{K}_{\overline{n+1}|}$, also gleichfalls in $\mathfrak{L}$.

Wir werden jetzt unsere Kenntnisse über die Struktur des diskret bewerteten perfekten Körpers L mit dem vollkommenen Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ der Charakteristik p anwenden und daraus Folgerungen in bezug auf K ziehen.

Zuerst habe K die Charakteristik p. Dann hat auch L die Charakteristik p. Das multiplikative Repräsentantensystem R für die Restklassen aus $\mathfrak{L}$ in L ist in diesem

Falle ein Körper. T sei das Teilsystem derjenigen Repräsentanten aus R, welche die Restklassen aus $\mathfrak{K}$ vertreten.

Hilfssatz 15. *T ist ein Körper.*

Beweis. Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von T-Elementen liegen im Körper R und ihre Restklassen mod π liegen in $\mathfrak{K}$.

Hilfssatz 16. $T \subset K$.

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei ein Element von $\mathfrak{K}$. Dann liegt $\sqrt[p^n]{\mathfrak{a}}$ in $\sqrt[p^n]{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_{\overline{n|}}$, enthält also ein Element α_n aus $K_{\overline{n|}}$. Weil $K_{\overline{n|}}$ aus K durch Adjunktion gewisser p^n-ter Wurzeln und nachfolgendes Abschließen entstanden ist, kann man die p^n-te Potenz eines jeden Elements von $\mathfrak{K}_{\overline{n|}}$, auch $\alpha_n^{p^n}$, durch Elemente von K approximieren; weil K perfekt ist, folgt $\alpha_n^{p^n} \in K$. Nach Hilfssatz 5 strebt aber $\alpha_n^{p^n}$ für $n \to \infty$ gegen den R-Repräsentanten der Restklasse $\mathfrak{a}$, auch dieser liegt also in K.

Wir haben also innerhalb des Ausgangskörpers K ein Repräsentantensystem T gefunden, das ein Körper ist. Nach Hilfssatz 3 lassen sich die Elemente von K eindeutig in die Form

$$\alpha = \sum a_n \pi^n \qquad (a \in T) \tag{5}$$

bringen. Wenn man zwei derartige Reihen nach den gewöhnlichen Potenzreihenrechenregeln addiert oder multipliziert, erhält man immer wieder eine Potenzreihe der gleichen Form (5). Mit dieser Feststellung ist die Struktur von K genau beschrieben:

K ist der (in üblicher Weise bewertete) Potenzreihenkörper über einem zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Teilkörper T.

Als Entwicklungsgröße kann man ein beliebiges Primelement π nehmen.

Wir kommen jetzt zum *charakteristikungleichen Fall* und untersuchen erst *unverzweigte Körper.* K sei also ein diskret bewerteter perfekter Körper der Charakteristik 0 mit dem unvollkommenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik p, und p sei ein Primelement von K.

Wir werden für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ den *Restklassenring*

$$\mathfrak{R}_{n+1} = I/(p^{n+1}),$$

wo I der Bewertungsring von K ist, als Unterring des entsprechenden Restklassenringes, den man für L bilden kann, beschreiben. Wir geben also diejenigen Restklassen aus $J/(p^{n+1})$ an, die ein Element aus I enthalten und die darum, wenn man in nun schon geläufiger Weise $I/(p^{n+1})$ als Unterring von $J/(p^{n+1})$ auffaßt, Elemente von $\mathfrak{R}_{n+1}$ werden; J bezeichnet natürlich den Bewertungsring von L.

Wir bemerken vorweg: aus $\alpha \equiv \beta \pmod p$ folgt nach Hilfssatz 8

$$\alpha^{p^{n-\nu}} \equiv \beta^{p^{n-\nu}} \pmod{p^{n-\nu+1}},$$

also

$$p^\nu \alpha^{p^{n-\nu}} \equiv p^\nu \beta^{p^{n-\nu}} \pmod{p^{n+1}}.$$

Eine Restklasse α mod p legt also eindeutig eine Restklasse $p^\nu \alpha^{p^{n-\nu}}$ mod p^{n+1} fest. Das gilt für $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

Hilfssatz 17. *B sei (vgl. (3)) die Menge aller Ausdrücke*

$$A = a_1^{e_1} \cdots a_r^{e_r}, \tag{6}$$

worin $a_1, \ldots, a_r$ verschiedene Elemente von M und die $e_i \geqq 0$ sind.

Dann besteht $\mathfrak{R}_{n+1}$ genau aus allen Restklassen

$$\sum_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^n} + p \sum_i A_{i,1} x_{i,1}^{p^{n-1}} + \cdots + p^\nu \sum_i A_{i,\nu} x_{i,\nu}^{p^{n-\nu}} + \cdots + p^n \sum_i A_{i,n} x_{i,n} \pmod{p^{n+1}}, \tag{7}$$

wo die $A_{i,\nu}$ aus B und die $x_{i,\nu} \in J$ Vertreter von Restklassen aus $\mathfrak{K}$ (z. B. die multiplikativen Repräsentanten dieser Restklassen mod p*) sind.*

Beweis. Wie schon oben bemerkt wurde, macht es nichts aus, wenn man die $x_{i,\nu}$ durch Elemente von I, die ihnen mod p kongruent sind, ersetzt. Dann stellt aber (7) ein Element von I dar. Wir müssen noch zeigen, daß jedes Element von I einem Ausdruck (7) mod p^{n+1} kongruent ist.

Nach Hilfssatz 11 ist jedes Element α von I einer Summe $\sum\limits_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^n}$ mod p kongruent, indem die Ausdrücke (6) mod p eine Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^{p^n}$ enthalten. Die $x_{i,0}$ sollen Elemente von I sein. Aber

$$\beta = \frac{\alpha - \sum\limits_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^n}}{p} \tag{8}$$

liegt wieder in I, wir dürfen annehmen, β habe schon eine Darstellung

$$\beta \equiv \sum_i A_{i,1} x_{i,1}^{p^{n-1}} + \cdots + p^{\nu-1} \sum_i A_{i,\nu} x_{i,\nu}^{p^{n-\nu}} + \cdots + p^{n-1} \sum_i A_{i,n} x_{i,n} \pmod{p^n}. \tag{9}$$

Denn dieser Ausdruck geht aus (7) hervor, wenn man n durch $n-1$ ersetzt. Nun setzt man (9) in (8) ein und erhält (7).

Damit haben wir $\mathfrak{R}_{n+1}$ als Unterring von $J/(p^{n+1})$ ausgedrückt. In die Beschreibung (7) ging (außer L) nur der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K und die Menge M ein. M kann aber in L durch die p-Basis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ charakterisiert werden:

Hilfssatz 18. *Die $a \in M$ sind in L die multiplikativen Repräsentanten ihrer Restklassen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$.*

Beweis. Wie schon bei der Konstruktion von L bemerkt wurde, gibt es zu jedem $a \in M$ eine Folge $a_{\overline{n}|}$ mit $a_{\overline{n+1}|}^p = a_{\overline{n}|}$. $a_{\overline{n}|}$ liegt also in der Restklasse $\mathfrak{a}^{p^{-n}}$, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}^{p^n} = a$. Nach Hilfssatz 5 folgt die Behauptung.

Die $\mathfrak{R}_{n+1}$ sind also in $J/(p^{n+1})$ durch $\mathfrak{K}$ und durch $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmt.

Aber K ist durch die Gesamtheit der $\mathfrak{R}_{n+1}$ eindeutig als Unterkörper von L bestimmt. Denn K ist der Quotientenkörper von I, I ist aber, weil K perfekt ist, nach Hilfssatz 2 genau die Menge derjenigen $\alpha \in J$, die für jedes n in einer Restklasse aus $\mathfrak{R}_{n+1}$ liegen.

Hieraus folgt: *K ist durch $\mathfrak{K}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Denn ist auch K^* ein diskret bewerteter perfekter unverzweigter Körper der Charakteristik 0 mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}^* \cong \mathfrak{K}$, so sei $\mathfrak{M}^*$ diejenige p-Basis von $\mathfrak{K}^*$, die $\mathfrak{M}$ bei dem gegebenen Isomorphismus $\mathfrak{K}^* \cong \mathfrak{K}$ entspricht, und M^* in K^* ein Repräsentantensystem für diese Restklassen. Wir konstruieren L^* wie vorher L; wegen $\mathfrak{L}^* \cong \mathfrak{L}$ besteht ein zugehöriger Isomorphismus $L^* \cong L$, denn das Rechnen in L ist durch das Rechnen in $\mathfrak{L}$ bestimmt. Dieser Isomorphismus läßt $\mathfrak{K}^*$ und $\mathfrak{K}$ sowie $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{M}$, mithin auch $\mathfrak{R}_{n+1}^*$ und $\mathfrak{R}_{n+1}$ sowie K^* und K einander entsprechen.

Wir haben auch eine Methode kennengelernt, um den unverzweigten Körper K zum Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ zu konstruieren: Man bildet den kleinsten vollkommenen Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, konstruiert dazu den diskret bewerteten perfekten unverzweigten Körper L mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$, setzt für M die Menge der multiplikativen Repräsentanten einer p-Basis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$, bildet die Mengen $\mathfrak{R}_{n+1}$ nach der Formel (7), setzt I gleich der Menge aller α, die für jedes n in einer Restklasse aus $\mathfrak{R}_{n+1}$ mod p^{n+1} liegen und bildet K als Quotientenkörper von I. Wir werden bald noch genauer auf diese Konstruktion eingehen und werden beweisen, daß sie tatsächlich zu jedem $\mathfrak{K}$ einen diskret bewerteten perfekten unverzweigten Körper K der Charakteristik 0 mit dem vorgegebenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik p liefert.

Nehmen wir das einmal als richtig an. Dann können wir Hilfssatz 7 zum Teil auf unvollkommene Restklassenkörper übertragen:

In jedem diskret bewerteten perfekten Körper K der Charakteristik 0 mit dem unvollkommenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik p gibt es einen diskret bewerteten perfekten unverzweigten Teilkörper K' mit demselben Restklassenkörper $\mathfrak{K}$.

Wir bilden nämlich einfach zu K den Körper L, in diesem gibt es nach Hilfssatz 7 einen unverzweigten Unterkörper L' mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$. Wir wollten annehmen, es gebe zum Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ schon einen diskret bewerteten perfekten unverzweigten Körper K'. Wir betten dann, von derselben p-Basis $\mathfrak{M}$ ausgehend wie bei der Konstruktion von L, K' in einen diskret bewerteten perfekten Körper mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ ein; dieser muß zu L' (analytisch) isomorph sein, wir dürfen K' also gleich als Unterkörper von L' annehmen. Innerhalb L fallen dann natürlich die Restklassen mod π von K und von K' zusammen, und die Menge M der multiplikativen Repräsentanten der p-Basis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}$ liegt schon in K'. Wir haben zu zeigen, daß K' ein Unterkörper von K ist.

Dazu stellen wir eine Erweiterung von Hilfssatz 17 auf. Es genügt nämlich zu zeigen, daß jedes Element α von K' mit $w(\alpha) \geqq 0$ stets mod $p^n\pi$ einem K-Element kongruent ist.

Wir wenden Hilfssatz 11 an, in dem wir aber n durch ns ersetzen ($s = w(p)$). Dann erhalten wir für α eine Darstellung

$$\alpha \equiv \sum_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^{ns}} \pmod{p},$$

worin die A dieselbe Bedeutung wie in (6) haben und auch die x beliebige Repräsentanten von $\mathfrak{K}$-Restklassen in K' sind. Nun schreiben wir

$$\alpha = \sum_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^{ns}} + p\beta$$

und wenden auf β denselben Schluß an usw. Ähnlich wie in Hilfssatz 17 entsteht

$$\alpha \equiv \sum_i A_{i,0} x_{i,0}^{p^{ns}} + p \sum_i A_{i,1} x_{i,1}^{p^{(n-1)s}} + \cdots + p^\nu \sum_i A_{i,\nu} x_{i,\nu}^{p^{(n-\nu)s}} + \cdots + p^n \sum_i A_{i,n} x_{i,n} \pmod{p^{n+1}},$$

erst recht mod $p^n\pi$. Die A liegen aber nicht nur in K', sondern auch in K, und die x vertreten Restklassen mod π aus $\mathfrak{K}$, dürfen also durch Vertreter derselben Restklassen, welche in K liegen, ersetzt werden. Denn ändert man x mod π ab, so ändert man $p^\nu x^{p^{(n-\nu)s}}$ höchstens mod $p^n\pi$ ab (nach Hilfssatz 8; vgl. die Bemerkung vor Hilfssatz 17). α ist also für alle n kongruent einem K-Element mod $p^n\pi$, eine Folge von Restklassen aus den Restklassenringen $\mathfrak{R}_{ns+1} = I/(p^n\pi)$ zieht sich auf α zusammen, darum muß α in K liegen. Jedes Element von K' ist aber der Quotient zweier α mit $w(\alpha) \geqq 0$, daher $K' \leqq K$, w. z. b. w.

Jetzt wenden wir uns endgültig wieder den unverzweigten Körpern zu und *beweisen, daß man wirklich nach der oben angegebenen Vorschrift zu jedem gegebenen unvollkommenen Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ einen diskret bewerteten perfekten unverzweigten Körper der Charakteristik 0 mit dem vorgegebenen Restklassenkörper finden kann.*

$\mathfrak{K}$ sei also ein unvollkommener Körper der Charakteristik p. $\mathfrak{M}$ sei eine p-Basis von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ sei der kleinste vollkommene Oberkörper von $\mathfrak{K}$. L sei *der* diskret bewertete perfekte unverzweigte Körper mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$. R sei das multiplikative Repräsentantensystem in L, M sei die Menge der R-Repräsentanten der Elemente von $\mathfrak{M}$. J sei der Bewertungsring von L.

Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ bilden wir als Teilmenge von $J/(p^{n+1})$ die Menge $\mathfrak{R}_{n+1}$ aller Restklassen

(10) $$\sum_i \pm A_{i,0} x_{i,n}^{p^n} + \cdots + p^\nu \sum_i \pm A_{i,\nu} x_{i,\nu}^{p^{n-\nu}} + \cdots + p^n \sum_i \pm A_{i,n} x_{i,n} \pmod{p^{n+1}}.$$

Die A haben dieselbe Bedeutung wie in (6):

$$A = \prod_k a_k^{e_k}, \quad a_k \in M.$$

Die x sollen auch wie in (7) Vertreter von Restklassen aus $\mathfrak{K}$ sein, auf die Auswahl dieser Vertreter kommt es, wie schon vor Hilfssatz 17 bemerkt wurde, nicht weiter an, denn wir betrachten (10) ja nur mod p^{n+1}. Der einzige Unterschied zwischen (7) und (10) besteht darin, daß in (10) auch abwechselnde Vorzeichen zugelassen sind, das vereinfacht die nachfolgenden Überlegungen.

Man sieht ohne weiteres:

Hilfssatz 19. *$\mathfrak{R}_{n+1}$ ist ein Ring, und zwar derjenige Unterring von $J/(p^{n+1})$, der von den Restklassen a (mod p^{n+1}) und $p^\nu x^{p^{n-\nu}}$ (mod p^{n+1}) erzeugt wird. a durchläuft hierin M, ν läuft von 0 bis n und x durchläuft ein Repräsentantensystem der Restklassen aus $\mathfrak{K}$.*

Zum Beweis hat man sich nur klar zu machen, daß auch ein Produkt $p^\nu x^{p^{n-\nu}} \cdot p^\mu y^{p^{n-\mu}}$ wieder in der Form (10) geschrieben werden kann: Für $\nu + \mu \leqq n$ ist

$$p^\nu x^{p^{n-\nu}} \cdot p^\mu y^{p^{n-\mu}} = p^{\nu+\mu} (x^{p^\mu} y^{p^\nu})^{p^{n-\nu-\mu}},$$

für $\nu + \mu > n$ ist

$$p^\nu x^{p^{n-\nu}} \cdot p^\mu y^{p^{n-\mu}} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}.$$

Noch trivialer ist

Hilfssatz 20. $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{K}$.

Hilfssatz 21. *Jede Restklasse aus $\mathfrak{R}_{n+1}$ enthält mindestens eine Restklasse aus $\mathfrak{R}_{n+2}$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 19 braucht bloß bewiesen zu werden, daß jedes $p^\nu x^{p^{n-\nu}}$ mod p^{n+1} kongruent ist einem Ausdruck der Form (10), in dem n durch $n+1$ ersetzt ist.

Nach Hilfssatz 11 ist

$$x \equiv \sum_{k=1}^{g} A_k y_k^{p^{n+1}} \pmod{p},$$

worin A wie in (6) und die y Repräsentanten von $\mathfrak{K}$-Restklassen sind. Wir erheben die Kongruenz in die $p^{n-\nu}$-te Potenz und erhalten nach Hilfssatz 8

$$p^\nu x^{p^{n-\nu}} \equiv p^\nu \sum_{i_1+\cdots+i_g=p^{n-\nu}} \frac{p^{n-\nu}!}{i_1!\cdots i_g!} (A_1 y_1^{p^{n+1}})^{i_1} \cdots (A_g y_g^{p^{n+1}})^{i_g} \pmod{p^{n+1}}.$$

Hier liegt tatsächlich auf der rechten Seite jeder Summand, mod p^{n+2} betrachtet, in dem von den Restklassen $a \in M$ und den Restklassen $p^\nu y^{p^{n-\nu+1}}$ (y mod p Repräsentant einer $\mathfrak{K}$-Restklasse) mod p^{n+2} erzeugten Ring $\mathfrak{R}_{n+2}$.

Nun kommt ein schwererer Hilfssatz, der ein eigentümliches Licht auf den Mechanismus der p-adischen Addition wirft. Er nützt die Eigenschaft a) der p-Basis $\mathfrak{M}$ aus, während in Hilfssatz 21 die Eigenschaft b) benützt wurde.

Hilfssatz 22. *Jede durch p teilbare Restklasse aus $\mathfrak{R}_{n+1}$ entsteht durch Multiplikation von p mit einer Restklasse aus $\mathfrak{R}_n$.*

Beweis. In (10) liegen offenbar alle Ausdrücke in $p\,\mathfrak{R}_n$ außer $\sum_i \pm A_i x_i^{p^n}$ (ich lasse den Index 0 jetzt weg). Hierin können wir die

$$A_i = a_1^{e_{1,i}} \cdots a_r^{e_{r,i}} \qquad (a \in M)$$

offenbar auf

$$0 \leqq e_{\varrho,i} \leqq p^n - 1$$

normieren, weil man die p^n-te Potenz eines a mit in das $x_i^{p^n}$ stecken kann. Nehmen wir nun an, es sei

$$\sum_i \pm A_i x_i^{p^n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Weil die normierten A nach Hilfssatz 11 mod p eine Basis von $\mathfrak{K}^{p^n}$ über $\mathfrak{K}$ bilden, muß für jedes einzelne A die über die zugehörigen x_i erstreckte algebraische Summe $\sum_i \pm x_i^{p^n}$ für sich $\equiv 0 \pmod p$ sein. Wir zeigen, daß dann $\sum_i \pm x_i^{p^n}$ mod p^{n+1} in $p\mathfrak{R}_n$ liegt.

Die x_i waren ursprünglich beliebige Repräsentanten ihrer in $\mathfrak{K}$ liegenden Restklassen, wir ersetzen sie jetzt durch Repräsentanten aus dem multiplikativen Repräsentantensystem R (das ist erlaubt). Nach Hilfssatz 6 ist

$$(11) \qquad \sum_i \pm x_i^{p^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu p^\nu, \qquad c_\nu \in R,$$

wo die Restklassen $\mathfrak{c}_\nu^{p^\nu}$ mod p der $c_\nu^{p^\nu}$ sich ganzrational aus den Restklassen $\mathfrak{x}_i^{p^n}$ der $x_i^{p^n}$ berechnen lassen. Die $\mathfrak{x}_i$ lagen in $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{x}_i^{p^n}$ demnach in $\mathfrak{K}^{p^n}$; darum müssen auch die $\mathfrak{c}_\nu^{p^\nu}$ in $\mathfrak{K}^{p^n}$ liegn, d. h. $\mathfrak{c}_\nu \in \mathfrak{K}^{p^{n-\nu}}$.

Nach Voraussetzung ist $\sum_i \pm x_i^{p^n} \equiv c_0 \equiv 0 \pmod p$, also wegen $c_\nu \in R$

$$c_0 = 0.$$

Setzt man noch

$$c_\nu = y_\nu^{p^{n-\nu}}, \quad y_\nu \in R \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so sind die y_ν Vertreter von Restklassen aus $\mathfrak{K}$, und (11) geht über in

$$\sum_i \pm x_i^{p^n} \equiv p y_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n y_n \pmod{p^{n+1}}.$$

Damit ist gezeigt, daß $\sum_i \pm x_i^{p^n}$ mod p^{n+1} in einer mit p multiplizierten $\mathfrak{R}_n$-Restklasse liegt.

Diese Hilfssätze ermöglichen uns nun die Konstruktion des gesuchten Unterkörpers K von L.

Jede Restklassenschachtelung

$$\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{r}_2 > \cdots, \quad \mathfrak{r}_n \in \mathfrak{R}_n,$$

zieht sich nach Hilfssatz 2 auf ein Element von J zusammen, die Gesamtheit der so erhaltenen Elemente heiße I. Weil nach Hilfssatz 19 alle $\mathfrak{R}_n$ Ringe sind, ist offenbar auch I ein Ring. Ist $\mathfrak{a}$ eine beliebige Restklasse aus $\mathfrak{K}$, so liegt sie nach Hilfssatz 20 in $\mathfrak{R}_1$, nach Hilfssatz 21 enthält sie eine Restklasse aus $\mathfrak{R}_2$, diese enthält wieder eine Restklasse aus $\mathfrak{R}_3$ usf.; diese Folge zieht sich auf ein Element von I zusammen. Jede Restklasse aus $\mathfrak{K}$ enthält also ein Element aus I. Umgekehrt ist nach Hilfssatz 20 klar, daß jedes Element aus I mod p in einer Restklasse aus $\mathfrak{K}$ liegt. Wie in Hilfssatz 2 sieht man, daß I perfekt ist.

K sei der Quotientenkörper von I. K ist als Unterkörper von L selbstverständlich ein diskret bewerteter Körper der Charakteristik 0, in dem p ein Primelement ist. Wir werden gleich zeigen, *daß jedes Element $\vartheta \in K$ mit $w(\vartheta) \geqq 0$ in I liegt.* Nach Hilfssatz 1 ist dann K perfekt, und wie soeben festgestellt wurde ist der Restklassenkörper dann $\mathfrak{K}$.

Jedes Element ϑ von K hat die Form $\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha, \beta \in I$. Ist $w(\alpha) = a$, $w(\beta) = b$, so ist nach Hilfssatz 22 $\alpha = p^a\alpha'$, $\beta = p^b\beta'$; $\alpha', \beta' \in I$. Es sei $w\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \geqq 0$, dann ist $a \geqq b$. Die Restklasse β' mod p, also auch ihr Reziprokes liegen in $\mathfrak{K}$, darum gibt es ein $\gamma \in I$ mit $\beta'\gamma \equiv 1 \pmod p$. Es sei

$$\beta'\gamma = 1 - \delta, \qquad \delta \in I, \qquad w(\delta) > 0.$$

Dann ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = p^{a-b}\alpha'\gamma(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) \in I.$$

Eingegangen 5. September 1936.