Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern.

Von *Ernst Witt* in Göttingen.

Der diskret bewertete perfekte Körper k habe den vollkommenen Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ mit beliebiger Charakteristik.

Die endlichen Körper $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ einerseits und die endlichen unverzweigten Körper K/k mit Restklassenkörper $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ andererseits entsprechen sich gegenseitig. Mit dem einem ist auch der andere Körper galoissch, und zwar induziert die galoissche Gruppe von K/k diejenige von $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$. Dies sind bekannte Tatsachen aus der Theorie der diskret bewerteten perfekten Körper.

Wir wollen hier zeigen, daß entsprechende Tatsachen auch für Schiefkörper mit Zentrum $\mathfrak{k}$ bzw. k gelten: *Die endlichen Schiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ einerseits und die endlichen unverzweigten Schiefkörper S/k mit Restklassenschiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ andererseits entsprechen sich gegenseitig. Im Sinne der Multiplikation der Algebrenklassen entsprechen sich dabei Produkte und Produkte.*

π sei ein festgewähltes Primelement von k. Dem zyklischen Körper $\mathfrak{Z}/\mathfrak{k}$ und einem seiner erzeugenden Automorphismen σ entspreche der unverzweigte zyklische Körper Z/k mit dem Automorphismus σ. Das *zyklische verschränkte Produkt* (π, Z, σ) ist dann ein verzweigter Schiefkörper über k. Es wird sich herausstellen, daß *alle verschränkten Produkte von dieser Gestalt im Sinne der Multiplikation der Algebrenklassen eine Gruppe ausmachen.*

Wir werden ferner feststellen, daß *jede Algebrenklasse* über k bei fester Wahl des Primelements π *eindeutig* durch *ein Produkt* $S \cdot (\pi, Z, \sigma)$ dargestellt werden kann. *Die Kenntnis aller Schiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ und aller zyklischen Körper $\mathfrak{Z}/\mathfrak{k}$ ermöglicht also eine Übersicht über alle Schiefkörper mit dem Zentrum k. —*

Für den Fall, daß $\mathfrak{k}$ die Charakteristik p hat, ist das Studium der Schiefkörper vom Exponenten p^n über k von besonderem Interesse. Da es wegen der Vollkommenheit von $\mathfrak{k}$ keine p-Schiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ gibt, kann dann jeder Schiefkörper vom Exponenten p^n über k in der Gestalt (π, Z, σ) dargestellt werden. Weil jeder zyklische Körper $\mathfrak{Z}/\mathfrak{k}$ vom Grad p^n durch eine Restklasse $a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \bmod p^n$ aus dem zu $\mathfrak{k}$ gehörigen p-adischen Körper charakterisiert werden kann, und zwar mit automatischer Festlegung eines erzeugenden Automorphismus σ, können wir diese Restklasse mod p^n als Invariante des Schiefkörpers (π, Z, σ) ansehen. Die Aufgabe, zu irgendeinem zyklischen verschränkten Produkt vom Grad p^n über k, auch mit verzweigtem zyklischen Körper, die so definierte zugehörige Invariante wirklich zu berechnen, ist schon gelöst worden für den Fall, daß k ebenfalls die Charakteristik p hat [1]). Wenn aber k die Charakteristik 0 hat, muß diese Aufgabe gleichfalls gelöst werden. Unter der Annahme, daß k eine primitive p^n-te Einheitswurzel ζ enthält, lautet also die *Aufgabe*:

[1]) E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p. Dieser Band, S. 126.

Explizite Bestimmung der Invariante der Algebra (a, b) *mit den Rechenregeln* $u^{p^n} = a$, $v^{p^n} = b$, $uvu^{-1}v^{-1} = \zeta$.

Die Lösung dieser Aufgabe enthält die explizite Formulierung des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für Zahlkörper.

1. $\bar{\mathfrak{k}}$ sei der algebraisch abgeschlossene Oberkörper von $\mathfrak{k}$, und $\bar{k}$ der unverzweigte Oberkörper von k mit $\bar{\mathfrak{k}}$ als Restklassenkörper.

Wir zeigen jetzt, daß es über $\bar{k}$ keine echten Schiefkörper gibt. Angenommen, $\bar{S}$ sei ein Schiefkörper über k. Da $\bar{S}/\bar{k}$ den Restklassengrad 1 hat, ist nach Hasse[2]) $\bar{S} = \bar{k}(\Pi)$ mit einem Primelement Π von $\bar{S}$. Also ist $\bar{S}$ kommutativ und kein echter Schiefkörper.

Aus dieser Tatsache ziehen wir jetzt den Schluß, daß eine normale Algebra A/k mindestens einen *unverzweigten* Zerfällungskörper K' hat. Da wir k als vollkommen angenommen haben, gibt es sogar einen unverzweigten *galoisschen* Zerfällungskörper K von A. Es sei $A \sim (a_{\sigma,\tau}, K)$.

Jedes Element a aus K läßt sich zerlegen in $\pi^e r\varepsilon$, wobei r dem multiplikativen Repräsentantensystem R von K entnommen ist, und wo $\varepsilon \equiv 1 \bmod \pi$ gilt. Entsprechend sei $a_{\sigma,\tau} = \pi^{e_{\sigma,\tau}} r_{\sigma,\tau}\varepsilon_{\sigma,\tau}$. Werden im Assoziativgesetz für $a_{\sigma,\tau}$ nur die Ordnungen $e_{\sigma,\tau}$ betrachtet, so folgt, daß auch $\pi^{e_{\sigma,\tau}}$ ein Faktorensystem ist, und daher auch $r_{\sigma,\tau}\varepsilon_{\sigma,\tau}$. Wird das Assoziativgesetz für $r_{\sigma,\tau}\varepsilon_{\sigma,\tau}$ nur mod π betrachtet, so folgt, weil die $r_{\sigma,\tau}$ dem multiplikativen Repräsentantensystem R angehören, daß $r_{\sigma,\tau}$ und damit auch $\varepsilon_{\sigma,\tau}$ ein Faktorensystem ist.

Für die willkürlich angenommene Algebra A/k *gilt* daher *eine Zerlegung*

$$A \sim (\pi^{e_{\sigma,\tau}}, K)\,(r_{\sigma,\tau}, K)\,(\varepsilon_{\sigma,\tau}, K) \qquad (r_{\sigma,\tau} \text{ aus } R,\ \varepsilon \equiv 1 \bmod \pi).$$

2. Zunächst behaupten wir, daß $(\varepsilon_{\sigma,\tau}, K)$ *zerfällt.*

Von $\varepsilon^{(1)}_{\sigma,\tau} = \varepsilon_{\sigma,\tau}$ ausgehend bilden wir auf folgende rekursive Weise die Faktorensysteme $\varepsilon^{(i)}_{\sigma,\tau} = 1 + \alpha^{(i)}_{\sigma,\tau}\pi^i$ mit ganzen $\alpha_{\sigma,\tau}$: Es sei $\varepsilon^{(i)}_{\sigma,\tau}$ schon konstruiert. Die $\alpha^{(i)}_{\sigma,\tau}$ mod π bilden dann ein Summandensystem im Restklassenkörper $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$. Wie ich in einer früheren Arbeit[3]) gezeigt habe, zerfällt ein solches Summandensystem stets, $\alpha^{(i)}_{\sigma,\tau} \equiv \beta^{(i)}_\sigma + \sigma\beta^{(i)}_\tau - \beta^{(i)}_{\sigma\tau} \bmod \pi$. Mit $\delta^{(i)}_\sigma = 1 - \beta^{(i)}_\sigma\pi^i$ bilden wir jetzt $\varepsilon^{(i+1)}_{\sigma,\tau} = \varepsilon^{(i)}_{\sigma,\tau}\delta^{(i)}_\sigma\delta^{(i)\sigma}_\tau\delta^{(i)-1}_{\sigma\tau}$. Es ist $\varepsilon^{(i+1)}_{\sigma,\tau} \equiv 1 \bmod \pi^{i+1}$. — Nach Bildung der Größen $\varepsilon^{(i)}_{\sigma,\tau}$ und $\delta^{(i)}_\sigma$ setzen wir $\prod_{i=1}^{\infty}\delta^{(i)}_\sigma = \delta_\sigma$. Es folgt $\varepsilon_{\sigma,\tau}\delta_\sigma\delta^\sigma_\tau\delta^{-1}_{\sigma\tau} = 1$, also $(\varepsilon_{\sigma,\tau}, K) \sim 1$.

3. Nunmehr untersuchen wir die Algebra $U = (r_{\sigma,\tau}, K) = \sum_\sigma Ku_\sigma$ mit den Regeln $u_\sigma u_\tau = r_{\sigma,\tau}u_{\sigma\tau}$ und $u_\sigma a u_\sigma^{-1} = a^\sigma$. Es sei K_0 die Maximalordnung von K. $U_0 = \sum_\sigma K_0 u_\sigma$ stellt dann eine Ordnung in U dar, und es ist

$$U_0/\pi U_0 \cong (\mathfrak{r}_{\sigma,\tau}, \mathfrak{K}) = \mathfrak{U},$$

wo $\mathfrak{r}_{\sigma,\tau}$ die Restklasse des Vertreters $r_{\sigma,\tau}$ darstellt. Die Diskriminante von $\mathfrak{U}$ verschwindet nicht, daher ist die Diskriminante der Ordnung $\mathfrak{U}_0 U_0$ nicht durch π teilbar, also Einheit. Also ist U_0 Maximalordnung, (π) ist darin Primideal, und U/k ist unverzweigt. Es sei $U = SM$ das Produkt eines Schiefkörpers S mit einem Matrizenring M. Nach Hasse[2]) gilt dann für die entsprechenden Maximalordnungen $U_0 \cong S_0 M_0$. Für die Restklassenringe folgt $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{S}\mathfrak{M}$. Daraus ergibt sich:

---

[2]) H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Annalen **104** (1931).

[3]) E. Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, Crelle **173** (1935), S. 45 oben.

Der Restklassenring $\mathfrak{S}$ des in der Algebra $(r_{\sigma,\tau}, K)$ steckenden Schiefkörpers S ist ein Schiefkörper mit dem Zentrum $\mathfrak{k}$. S ist unverzweigt. S/k und $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ haben denselben Rang.

Umgekehrt sei ein Schiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ vorgelegt. Es sei $\mathfrak{S} \cong (\mathfrak{r}_{\sigma,\tau}, \mathfrak{K})$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ trete als Restklassenkörper von K/k auf. Die zu K gehörigen multiplikativen Repräsentanten $r_{\sigma,\tau}$ der Restklassen $\mathfrak{r}_{\sigma,\tau}$ bilden wieder ein Faktorensystem. $\mathfrak{S}$ ist Restklassenring des in $(r_{\sigma,\tau}, K)$ steckenden Schiefkörpers S:

Jeder Schiefkörper $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ tritt als Restklassenring eines Schiefkörpers S/k auf.

Wir beweisen weiter:

Der Schiefkörper S/k ist durch seinen Restklassenring $\mathfrak{S}/\mathfrak{k}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Aus $S'S'' \sim S'''$ folgt $S'S'' = S'''M$. Für die Maximalordnungen folgt $S_0'S_0'' \cong S_0'''M_0$, und für die Restklassenringe $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'' \cong \mathfrak{S}'''\mathfrak{M}$ und damit $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'' \sim \mathfrak{S}'''$. Die Restklassenringzuordnung ist daher eine Homomorphie und wegen der Ranggleichheit sogar eine Isomorphie.

4. *Bei festem Primelement π bilden die Algebrenklassen $(\pi^{e_{\sigma,\tau}}, K)$ mit unverzweigten Körpern K eine Gruppe:*

Um das Produkt $(\pi^{e'_{\sigma,\tau}}, K')\,(\pi^{e''_{s,t}}, K'')$ zu bilden, werde $(\pi^{e'_{\sigma,\tau}}, K') \sim (\pi^{a_{S,T}}, K'K'')$ und $(\pi^{e''_{s,t}}, K'') \sim (\pi^{b_{S,T}}, K'K'')$ gesetzt. Das Produkt $(\pi^{a_{S,T}+b_{S,T}}, K'K'')$ hat dann die verlangte Gestalt.

Wir untersuchen jetzt eine feste Algebra $V = (\pi^{e_{\sigma,\tau}}, K)$ vom Grade g. Das Assoziativgesetz findet seinen Ausdruck in der Beziehung

$$e_{\sigma,\tau} + e_{\varrho,\sigma\tau} = e_{\varrho,\sigma} + e_{\varrho\sigma,\tau}$$

zwischen den ganzen Zahlen $e_{\sigma,\tau}$. Mit den rationalen Zahlen

$$\chi(\sigma) = \frac{1}{g}\sum_{\tau} e_{\sigma,\tau}$$

gilt, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\text{(a)} \qquad e_{\sigma,\tau} = \chi(\sigma) + \chi(\tau) - \chi(\sigma\tau).$$

Der erlaubten Änderung der Zahlen $e_{\sigma,\tau}$ um Ausdrücke $d_\sigma + d_\tau - d_{\sigma\tau}$ mit ganzzahligen d_σ entspricht eine beliebige Abänderung der $\chi(\sigma)$ mod 1. Wir dürfen daher

$$\text{(b)} \qquad 0 \leqq \chi(\sigma) < 1$$

annehmen.

Aus (a) folgt

$$\chi(\sigma) + \chi(\tau) \equiv \chi(\sigma\tau) \bmod 1,$$

d. h. $\chi(\sigma)$ ist mod 1 ein Charakter der Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k. Es sei dabei $\mathfrak{N}$ der durch $\chi(\nu) \equiv 0 \bmod 1$ bestimmte Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist der zyklischen Wertegruppe von $\chi(\sigma)$ mod 1 isomorph. Aus $\sigma \equiv s$, $\tau \equiv t \bmod \mathfrak{N}$ folgt wegen der Normierung (b) $\chi(\sigma) = \chi(s)$ und somit nach (a) $e_{\sigma,\tau} = e_{s,t}$. Es ist daher $V \sim (\pi^{e_{\sigma,\tau}}, Z)$, wobei Z/k den nach der Galoisschen Theorie zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gehörigen zyklischen Körper vom Grad n bedeutet. Wird jetzt speziell mit s derjenige Automorphismus von Z/k mit $\chi(s) = \frac{1}{n}$ bezeichnet, so erzeugt s die Gruppe von Z/k, und es ist

$$(\pi^{e_{\sigma,\tau}}, K) \sim (\pi, Z, s).$$

Da π^n die niedrigste Potenz von π ist, die Norm einer Zahl aus dem unverzweigten zyklischen Körper Z/k n-ten Grades sein kann, hat (π, Z, s) den Exponenten n und ist folglich ein Schiefkörper. Nach Hasse [2]) hat der Schiefkörper $(\pi, Z, s) = \sum_0^{n-1} Z u^i$ mit den Regeln $u^n = \pi$ und $uau^{-1} = a^s$ die Maximalordnung $\sum_0^{n-1} Z_0 u^i$. In dieser Maximalordnung ist (u) Primideal, also ist der Schiefkörper verzweigt von der Ordnung n. $\mathfrak{Z}$ ist der Restklassenring mod u.

5. Damit haben wir nachgewiesen:

Für jede Algebra A/k besteht eine Zerlegung

$$A \sim S \cdot (\pi, Z, \sigma);$$

dabei ist S als unverzweigter Schiefkörper durch seinen Restklassenschiefkörper $\mathfrak{S}$ festgelegt, und der unverzweigte zyklische Körper Z mit dem Automorphismus σ durch den Restklassenkörper $\mathfrak{Z}$ mit dem Automorphismus σ.

Es folgt nun leicht:

Nach angenommener Wahl des Primelements π ist die Zerlegung von A eindeutig.

Denn der erste Faktor gehört der Gruppe der unverzweigten Schiefkörper an, und der zweite Faktor gehört zu einer Gruppe aus lauter verzweigten Schiefkörpern, die beiden Gruppen sind also fremd.

Eingegangen 29. August 1936.