

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1937

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0176

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176

LOG Id: LOG_0019

LOG Titel: Zerfallende zyklische p-Algebren.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zerfallende zyklische p -Algebren.

Von *Oswald Teichmüller* in Göttingen.

Diese Arbeit schließt sich unmittelbar an eine vorangehende von E. Witt¹⁾ an. Erst wird hier der Haupthilfssatz für den Beweis der Residuenformel (Satz 17 jener Arbeit) bewiesen, dann ergibt sich aus dem Beweis ein Kriterium für den Zerfall von Algebren $(\alpha | \beta)$.

Es handelt sich um folgenden

Hilfssatz. Ist $k = C\{t\}$ der Potenzreihenkörper über dem vollkommenen Grundkörper C und enthalten die Potenzreihen $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ nur die Glieder mit negativen Potenzen von t :

$$\beta_v = \sum_{i=-w_v}^{-1} b_{vi} t^i,$$

so gilt über k

$$(t | \beta) \sim 1.$$

Statt dessen beweisen wir gleich den etwas allgemeineren

Satz 1. C sei ein vollkommener Unterkörper eines Körpers k der Charakteristik p . Für $\alpha \neq 0$ aus k bilden wir den Ring

$$R = C\alpha + C\alpha^2 + \dots$$

Für $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ in R gilt dann

$$(\mathfrak{A}) \quad (\alpha | \beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \sim 1.$$

Dieser Satz enthält offenbar den obigen Hilfssatz, man nehme $\alpha = t^{-1}$.

Satz 1 gelte schon für $n - 1$, wir beweisen ihn für n . Nach W. Satz 15 besagt unsere Induktionsvoraussetzung genau, daß (\mathfrak{A}) jedenfalls für $\beta_0 = 0$ gilt. Man beachte, daß so auch der Fall $n = 1$ mitgenommen wird.

Wir bemerken noch vorweg, daß für zwei Vektoren x und y aus R auch $x \pm y$ und φx Komponenten aus R haben. Denn R ist ein Ring; daß R kein Einselement zu haben braucht, spielt keine Rolle.

Um nun (\mathfrak{A}) zu beweisen, zeigen wir zunächst

$$(\alpha | \alpha, 0, \dots, 0) \sim 1;$$

hieraus wird sich später leicht die allgemeine Formel ergeben. Außerdem machen wir noch eine Fallunterscheidung, je nachdem $\alpha = \varphi a$, $a \in k$, ist oder nicht.

Ist $\alpha = \varphi a$, so sei entsprechend W. (20)

$$(\alpha, 0, \dots, 0) = \varphi(a, 0, \dots, 0) + (0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}),$$

¹⁾ E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n . Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p , dieser Band, S. 126, zitiert mit W. Journal für Mathematik. Bd. 176. Heft 3.

dann sind die $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ in

$$R' = Ca + Ca^2 + \dots,$$

und nach W. (22) und der Induktionsvoraussetzung haben wir

$$(a|\alpha, 0, \dots, 0] \cong (a|0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}] \sim 1.$$

Weil für alle i des Primkörpers auch $\varphi(a+i) = \alpha$ ist, gilt genau so

$$(a+i|\alpha, 0, \dots, 0] \sim 1;$$

durch Multiplikation folgt

$$(\alpha|\alpha, 0, \dots, 0] \sim 1,$$

weil doch $\prod_{i=0}^{p-1} (a+i) = \varphi a = \alpha$ ist.

Wenn aber $\alpha \neq \varphi a$ ist, so ist nach W. Satz 13

$$Z_n = k(\Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}) \quad \text{mit} \quad \varphi \Theta = (\alpha, 0, \dots, 0)$$

ein zyklischer Körper mit dem erzeugenden Automorphismus

$$\sigma \Theta = \Theta + 1.$$

Wir betrachten den Zwischenkörper

$$Z_1 = k(\Theta_0)$$

und in ihm den Ring

$$R' = C\Theta_0 + C\Theta_0^2 + \dots$$

Wieder sei

$$(\mathfrak{B}) \quad (\alpha, 0, \dots, 0) = \varphi(\Theta_0, 0, \dots, 0) + (0, H_1, \dots, H_{n-1}),$$

die H_1, \dots, H_{n-1} liegen dann in R' . Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(\mathfrak{C}) \quad (\Theta_0 | H_1, \dots, H_{n-1}] \sim 1.$$

Aus (B) folgt aber auch

$$Z_n = Z_1 \left(\frac{(\alpha, 0, \dots, 0)}{\varphi} \right) = Z_1 \left(\frac{(H_1, \dots, H_{n-1})}{\varphi} \right),$$

d. h. Z_n ist der kleinste Zerfällungskörper des Vektors (H_1, \dots, H_{n-1}) aus Z_1 . Indem man gemäß der Bemerkung nach W. Satz 15 die Algebra $(\Theta_0 | H_1, \dots, H_{n-1}]$ als zyklische Algebra auffaßt, sieht man aus (C), daß $\Theta_0 = N_{Z_n/Z_1} \Xi$ Norm eines Elements von Z_n ist. Offenbar ist aber $\alpha = N_{Z_1/Z_0} \Theta_0$, mithin

$$\alpha = N_{Z_n/Z_0} \Xi.$$

Deshalb muß die zyklische Algebra $(\alpha|\alpha, 0, \dots, 0]$ zerfallen.

Um nun (A) zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß $(\alpha|\beta_0, \dots, \beta_{n-1}]$ für $\beta_r \in R$ nach Induktionsvoraussetzung nur von β_0 abhängt und daß aus $\beta_0 + \beta'_0 = \bar{\beta}_0$ folgt

$$(\alpha|\beta_0, \dots, \beta_{n-1}] \times (\alpha|\beta'_0, \dots, \beta'_{n-1}] \sim (\alpha|\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{n-1}].$$

Es genügt darum,

$$(\mathfrak{D}) \quad (\alpha|c\alpha^r, 0, \dots, 0] \sim 1 \quad (c \in C, r > 0)$$

zu beweisen. $c = 0$ wäre trivial, es sei $c \neq 0$.

Ist r zu p prim, so ist

$$(\mathfrak{E}) \quad (\alpha|c\alpha^r, 0, \dots, 0]^r \times \left(\sqrt[p^n]{c} | c\alpha^r, 0, \dots, 0 \right)^{p^n} \sim (c\alpha^r | c\alpha^r, 0, \dots, 0] \sim 1;$$

weil die p^n -te Potenz jeder unserer Algebren ~ 1 ist, ergibt sich daraus (D).

Ist aber $r = ps$, so kann (\mathfrak{D}) für s statt r schon als richtig angesehen werden, und (\mathfrak{D}) folgt dann aus

$$(c\alpha^{ps}, 0, 0, \dots, 0) = \left(\sqrt[p]{c}\alpha^s, 0, \dots, 0\right) + \varphi\left(\sqrt[p]{c}\alpha^s, 0, \dots, 0\right) + (0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}), \quad \delta_r \in R.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen. Nun soll für jedes feste $\alpha \neq 0$ aus einem beliebigen Körper k der Charakteristik p die additive Gruppe aller Vektoren β mit $(\alpha|\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \sim 1$ bestimmt werden.

Natürlich ist $(\alpha|\varphi\gamma) \sim 1$. Ferner gilt nach dem soeben bewiesenen Satze $(\alpha|\alpha, 0, \dots, 0) \sim 1$. (Für das oben auftretende C kann man z. B. den Primkörper nehmen.) Wie bei (\mathfrak{E}) folgt daraus für $(r, p) = 1$

$$\begin{aligned} (\alpha|c^{p^n}\alpha^r, 0, \dots, 0)^r (c|c^{p^n}\alpha^r, 0, \dots, 0)^{p^n} &\sim (c^{p^n}\alpha^r|c^{p^n}\alpha^r, 0, \dots, 0) \sim 1, \\ (\alpha|c^{p^n}\alpha^r, 0, \dots, 0) &\sim 1. \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, daß damit schon im wesentlichen die gesuchte additive Gruppe aufgefunden ist:

Satz 2. Ist $(\alpha|\beta) \sim 1$, so ist β von der Form

$$(\mathfrak{F}) \quad \beta = \varphi\gamma + \sum_{r=1}^{p-1} V^{n-1}(c_{n-1, r}^p, \alpha^r) + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^n-1} V^{n-2}(c_{n-2, r}^{p^1}, \alpha^r, 0) + \dots + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^n-1} (c_{0, r}^{p^n}, \alpha^r, 0, \dots, 0).$$

Ist dieser Satz schon für Vektoren mit $n - 1$ Komponenten richtig, so genügt es offenbar, aus $(\alpha|\beta) \sim 1$ eine Darstellung

$$\beta_0 = \varphi c_0 + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^n-1} c_r^{p^n} \alpha^r$$

zu folgern, dann wird nämlich durch

$$(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) = \varphi(c_0, 0, \dots, 0) + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^n-1} (c_r^{p^n} \alpha^r, 0, \dots, 0) + (0, \beta'_1, \dots, \beta'_{n-1})$$

ein Vektor $(\beta'_1, \dots, \beta'_{n-1})$ mit $n - 1$ Komponenten definiert, für den auch $(\alpha|\beta') \sim 1$ gilt und der darum schon die Struktur (\mathfrak{F}) haben muß.

Wenn α in k eine p -te Potenz sein sollte: $\alpha = \delta^p$, so gilt

$$(\alpha|\beta) \sim (\delta|\beta)^p \sim (\delta|p\beta) \sim (\delta|V\beta^p) \sim (\delta|V\beta^p - \varphi V\beta) \sim (\delta|V\beta);$$

aus $(\alpha|\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \sim 1$ folgt also $(\delta|\beta_0, \dots, \beta_{n-2}) \sim 1$; weil hier nur eine Algebra vom Grad p^{n-1} auftritt, gilt schon eine Darstellung

$$\beta_0 = \varphi c' + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^{n-1}-1} c_r^{p^{n-1}} \delta^r,$$

aus ihr folgt

$$\beta_0 = \beta_0^p - \varphi \beta_0 = \varphi(c'^p - \beta_0) + \sum_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^{n-1}-1} c_r^{p^n} \alpha^r.$$

Dies gilt für $n > 1$; ist $n = 1$ und $\alpha = \delta^p$, so ist einfach

$$\beta_0 = \varphi(-\beta_0) + \left(\frac{\beta_0}{\delta}\right)^p \alpha.$$

Nun sei α keine p -te Potenz. Wir betrachten die beiden Algebren

$$A = (\alpha|\beta) = k[u, \Theta], \quad u^{p^n} = \alpha, \quad \varphi\Theta = \beta, \quad u\Theta u^{-1} = \Theta + 1$$

und

$$A^{(0)} = (\alpha | 0] = k[u, \Theta_0^{(0)}], \quad u^{p^n} = \alpha, \quad \wp \Theta_0^{(0)} = 0, \quad u \Theta_0^{(0)} u^{-1} = \Theta_0^{(0)} + 1.$$

Sie sollen ähnlich sein, also müssen sie durch einen Isomorphismus i. b. a. k ineinander übergehen; dieser Isomorphismus kann sogar so gewählt werden, daß die kommutativen Unterkörper $k(u)$ von $A^{(0)}$ und von A einander entsprechen. Wir denken uns also A und $A^{(0)}$ als dieselbe Algebra mit demselben u darin.

Aus $u \Theta_0 u^{-1} = \Theta_0 + 1$ und $u \Theta_0^{(0)} u^{-1} = \Theta_0^{(0)} + 1$ folgt

$$\Theta_0 - \Theta_0^{(0)} = y \in k(u),$$

denn y ist mit u vertauschbar und $k(u)$ ist maximalkommutativ. Es sei

$$y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r u^r = \sum_{s=0}^{p-1} \left(\sum_{h=0}^{p^{n-1}-1} c_{hp+s} (u^p)^h \right) u^s, \quad c_r \in k.$$

Betrachten wir nun die Subalgebra $k[u, \Theta_0^{(0)}]$ als einfache und normale Algebra über ihrem Zentrum $k(u^p)$, so ist nach einem früheren Ergebnis von Witt ²⁾

$$(G) \quad \beta_0 = \wp(\Theta_0^{(0)} + y) = \wp \Theta_0^{(0)} + \wp u y = \sum_{r=0}^{p^n-1} c_r^p u^{pr} - \sum_{h=0}^{p^{n-1}-1} c_{hp} u^{hp}.$$

Um den rechtsstehenden Ausdruck auszuwerten, zerspalten wir y folgendermaßen:

$$y = \sum_{\nu=0}^n s_{\nu}; \quad s_{\nu} = \sum_{\substack{t=1 \\ p \nmid t}}^{p^{n-\nu}-1} c_{tp} u^{tp} \quad (\nu = 0, \dots, n-1), \quad s_n = c_0.$$

Wir fassen also die $c_r u^r$ nach der in r steckenden p -Potenz zusammen. Dann geht (G) über in

$$(H) \quad \beta_0 = (s_0 + \dots + s_{n-1} + s_n)^p - s_1 - \dots - s_n = (s_0^p - s_1) + (s_1^p - s_2) + \dots + (s_{n-2}^p - s_{n-1}) + (s_{n-1}^p + s_n^p - s_n).$$

β_0 liegt aber in k . Wir sehen also, daß man y nicht ganz beliebig vorschreiben darf, sondern daß wir darauf achten müssen, daß bei Entwicklung der rechten Seite von (H) nach Potenzen von u ein Element von k erscheint. $s_{n-1}^p + s_n^p - s_n = \wp c_0 + s_{n-1}^p$ liegt schon in k , aber die übrigen Glieder $s_{\nu}^p - s_{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-2$) enthalten u -Potenzen mit genau durch p^{r+1} teilbarem Exponenten, sie müssen also alle verschwinden. Das heißt

$$s_0^p = s_1, \quad s_1^p = s_2, \dots, \quad s_{n-2}^p = s_{n-1}, \\ \beta_0 = \wp c_0 + s_{n-1}^p$$

oder

$$\beta_0 = \wp c_0 + s_0^{p^n} = \wp c_0 + \sum_{\substack{t=1 \\ p \nmid t}}^{p^{n-1}} c_t^{p^n} \alpha^t, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben damit T. Satz 8 auf zyklische p -Algebren vom Grad p^n übertragen. Dagegen macht die Übertragung des (mehr besagenden) Satzes 7 noch Schwierigkeiten. Ich hoffe, sie durch eine Verallgemeinerung meiner Normierung ³⁾ für p^2 auf p^n beheben zu können.

²⁾ Veröffentlicht in: O. Teichmüller, p -Algebren, Deutsche Mathematik 1 (1936), Satz 7. Zitiert mit T.

³⁾ O. Teichmüller, Multiplikation zyklischer Normalringe, Deutsche Mathematik 1 (1936), § 15: Zyklische Normalringe vom Rang p^2 .