Zur Arithmetik der zyklischen p-Körper.

Von *Hermann Ludwig Schmid* in Göttingen.

Unter einem zyklischen p-Körper Z/K verstehe ich einen zyklischen Erweiterungskörper Z vom Grade p^n $(n \geqq 1)$ über einem algebraischen Funktionenkörper K mit einem vollkommenen Konstantenkörper k der Charakteristik p. In einer früheren Arbeit habe ich gezeigt, wie man zu einer brauchbaren normierten Erzeugung von Z über K gelangen kann [1]). Im Anschluß an meine Arbeit hat Herr Witt einen Vektorkalkül entwickelt, der die geeignete Schreibweise für meine Resultate liefert [2]). Darüber hinaus gelang Herrn Witt die Verallgemeinerung der von mir für den Grad p aufgestellten Residuenformel.

Ich wiederhole hier kurz die von mir aufgestellten arithmetischen Sätze in der neuen Schreibweise. Anschließend entwickle ich die Theorie des Führers, der Diskriminante und des Geschlechts. Schließlich beantworte ich die Frage, ob die Verzweigungspunkte Weierstraßpunkte sind.

Die Arithmetik der zyklischen p-Körper ist in der jetzigen Form eine fast wörtliche Verallgemeinerung der von Herrn Hasse für den Fall des Grades p gewonnenen arithmetischen Sätze [3]). Man hat nur Elemente durch Vektoren und die gewöhnliche Addition durch die Wittsche Vektoraddition zu ersetzen.

1. k sei ein vollkommener Körper der Charakteristik p $(p > 0)$ und K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten mit k als Konstantenkörper. $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sei ein n-gliedriger Vektor mit Komponenten β_i aus K. Es sei $\beta_1 \neq \wp\gamma$ mit γ aus K. Dann wird durch den Vektor $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, der der Vektorgleichung (im Wittschen Sinne)

$$\wp\theta = \theta^p \dot{-} \theta = \beta$$

genügt [4]), ein zyklischer Körperturm

$$Z_1 = K(\theta_1), \quad Z_2 = Z_1(\theta_2), \ldots, Z_n = Z_{n-1}(\theta_{n-1})$$

---

[1]) H. L. Schmid, Zyklische algebraische Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p, Crelles Journal **175** (1936). Im folgenden zitiert mit S.

[2]) E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n. Struktur diskret bewerteter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p, Crelles Journal **176** (1936).

[3]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Crelles Journ. **172** (1934).

[4]) Ich schreibe, um jedes Mißverständnis auszuschließen, für die neue Vektoraddition das Symbol $\dot{+}$. Die Vektorgleichung $\wp\theta = \beta$ ist gleichwertig mit dem System von Gleichungen $\wp\theta_\nu = \beta_\nu + z_{\nu-1}$ $(z_0 = 0;\ \nu = 1, \ldots, n)$, wo die z_ν formal für Charakteristik 0 durch

$$z_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{p^{\nu-i+1}} \left[\theta_i^{p^{\nu-i+1}} + \beta_i^{p^{\nu-i+1}} - (\theta_i + \beta_i + z_{i-1})^{p^{\nu-i+1}}\right]$$

rekursiv erklärt sind.

vom Grade p^n erzeugt. Ein erzeugender Automorphismus σ wird durch

$$\sigma = (\theta \to \theta \dot{+} e)$$

gegeben, wo e den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ bedeutet.

Die Wittsche Vektoraddition ist so gewählt, daß sie gerade diejenige normierte Erzeugung liefert, die in S die Rolle eines Existenznachweises spielt. Man kann natürlich für jede in S zugelassene Normierung einen analogen Kalkül aufbauen, der in derselben Weise zur Erzeugung der zyklischen p-Körper geeignet ist.

2. Für jede Stelle $\mathfrak{p}$ von K seien die Komponenten des Vektors β durch zulässige Substitutionen $\theta \to \theta \dot{+} \gamma$ mit einem Vektor γ aus K auf die Form

$$\beta_i \cong \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{p}^{\lambda_i}} \left(\lambda_i \geqq 0; \begin{array}{l} (\lambda_i, p) = 1 \text{ und } \mathfrak{g}_i \text{ prim zu } \mathfrak{g}, \text{ falls } \lambda_i > 0; \\ \mathfrak{g}_i \text{ ganz für } \mathfrak{p}, \text{ falls } \lambda_i = 0; \quad i = 1, \ldots, n \end{array}\right)$$

gebracht [5]). Der Zahlenvektor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gibt dann über Zerlegung bzw. Verzweigung Auskunft:

Der Primdivisor $\mathfrak{p}$ bleibt dann und nur dann in Z_n unverzweigt, wenn λ der Nullvektor ist. Tritt beim Übergang von $Z_{\mu-1}$ nach Z_μ $(1 \leqq \mu < n)$ zum ersten Male Trägheit ein, so gilt dies auch für alle folgenden Schritte, soweit sie überhaupt unverzweigt sind.

Ist insbesondere k ein Galoisfeld von $q = p^f$ Elementen, so können wir im unverzweigten Falle den *Artin-Automorphismus*

$$F = \left(\theta \to \theta \dot{+} \left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \quad \text{mit } z^F \equiv z^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{p}$$

für alle für $\mathfrak{p}$ ganzen z einführen. Es ist

$$\left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\} \equiv \dot{\mathfrak{S}}(\dot{S}_\mathfrak{p}(\beta)) \bmod \mathfrak{p},$$

wo der Vektor $\dot{S}_\mathfrak{p}(\beta) \equiv \beta \dot{+} \beta^q \dot{+} \cdots \dot{+} \beta^{\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{q}} \bmod \mathfrak{p}$ die *punktierte Spur* im Sinne der Vektoraddition im Restklassenkörper mod $\mathfrak{p}$ von K in bezug auf den Konstantenkörper k und $\dot{\mathfrak{S}}$ entsprechend die *absolute punktierte Spur* von k (in bezug auf den Primkörper) bezeichnet.

Denn wird die F definierende Kongruenz auf den erzeugenden Vektor θ angewandt, so ergibt sich

$$\theta^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} = \theta \dot{+} \beta \dot{+} \beta^p \dot{+} \cdots \dot{+} \beta^{\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}{p}} \equiv \dot{\mathfrak{S}}(\dot{S}_\mathfrak{p}(\beta)) \bmod \mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{p}$ zerfällt hiernach in Z_n dann und nur dann voll, wenn die Kongruenzen $\beta \equiv \dot{\wp}\beta^{(0)} \bmod \mathfrak{p}$ mit einem Vektor $\beta^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \ldots, \beta_n^{(0)})$ aus K lösbar sind. Allgemeiner ist der Grad von $\mathfrak{p}$ in Z_n gleich der Ordnung des Vektors β in bezug auf die Gruppe der $\dot{\wp}\beta^{(0)} \bmod \mathfrak{p}$. Für das Symbol $\left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\}$ gilt die Regel

$$\left\{\frac{\beta \dot{+} \beta'}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\} \dot{+} \left\{\frac{\beta'}{\mathfrak{p}}\right\}$$

für zwei Vektoren β und β'. Das *zusammengesetzte Artin-Symbol* definieren wir durch den Vektor

$$\left\{\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right\} = \dot{\sum_{\mathfrak{p}}} \left\{\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right\},$$

[5]) Die Möglichkeit dieser Reduktion ist für den Fall des Grades p in der zitierten Arbeit von Herrn Hasse gezeigt. Allgemein ergibt sich die Reduktionsmöglichkeit durch Induktion nach n.

wenn $\mathfrak{a} = \prod\limits_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ (gleiche $\mathfrak{p}$ zugelassen) ein ganzer Divisor ist, dessen Primteiler in Z_n sämtlich unverzweigt sind. Für dieses Symbol gilt das Reziprozitätsgesetz, dessen Kernaussage lautet: Es ist

$$\left\{\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right\} = (0, \ldots, 0), \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{a} \sim N\mathfrak{A} \bmod \mathfrak{f},$$

wo $\mathfrak{A}$ ein zum Führer $\mathfrak{f}$ von Z_n primer Divisor aus Z_n ist.

3. *$\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann in Z_n verzweigt, wenn λ verschieden vom Nullvektor ist. Ist λ_μ die erste von Null verschiedene Komponente, so tritt von $Z_{\mu-1}$ ab Vollverzweigung ein.*

Es sei jetzt o. B. d. A. bereits $\lambda_1 > 0$. Dann ist $\mathfrak{p}$ in Z_n vollverzweigt. Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^p = \mathfrak{P}_2^{p^2} = \cdots = \mathfrak{P}_n^{p^n}$, wo $\mathfrak{P}_i$ den Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Z_i bezeichnen möge. Wir beweisen den

Satz. *Der $\mathfrak{p}$-Beitrag zum Führer von Z_n über K ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}^{(n)} = \mathfrak{p}^{M_n+1}$ mit $M_n = \operatorname*{Max}\limits_{i=1,\ldots,n} (p^{n-i}\lambda_i)$.*

Wir bemerken vorweg, daß wegen $M_i = \operatorname{Max}(pM_{i-1}, \lambda_i)$ die Zahlen M_i eine aufsteigende Folge bilden: $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$. Weiterhin kann das Maximum M_n nur von einem Wert $p^{n-i}\lambda_i$ erreicht werden, weil aus $p^{n-i}\lambda_i = p^{n-j}\lambda_j$ mit $j > i$ die Gleichheit $p^{j-i}\lambda_i = \lambda_j$ folgen würde in Widerspruch zu $(\lambda_j, p) = 1$. Es sei

$$M_n = p^{n-j}\lambda_j \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Den Beweis der Führerformel erbringen wir mit Hilfe der Wittschen Residuenformel

$$(\alpha; \beta] \sim (\pi; (\alpha, \beta)].$$

Dabei ist π ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ und (α, β) der sogenannte Residuenvektor zur Algebra $(\alpha; \beta]$, die durch die erzeugenden Relationen $u^{p^n} = \alpha$, $\wp\theta = \beta$, $u\theta u^{-1} = \theta + e$ definiert ist. Wir zeigen dann

a) Wenn $\alpha \equiv 1 \bmod \pi^{M_n+1}$ ist, ist α Norm eines Elementes aus $Z_{n\mathfrak{P}_n}$ in bezug auf $K_{\mathfrak{p}}$.

b) Es existiert ein $\alpha \equiv 1 \bmod \pi^{M_n}$ so, daß α nicht Norm ist.

Bei der Ausrechnung des Residuenvektors müssen α und die Komponenten von β als Potenzreihenunbestimmte angesetzt und es muß formal in einem Körper der Charakteristik Null gerechnet werden. Wir wollen aber keine neuen Bezeichnungen einführen und uns die Abstraktion bei der Rechnung vor Augen halten. Es sei

$$\alpha = 1 + c\pi^{M_n} + \cdots$$

und

$$\beta_i = \frac{b_i}{\pi^{\lambda_i}} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ausgehend von den Nebenkomponenten

$$\beta^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{\nu} p^{i-1} \beta_i^{p^{\nu-i}}$$

des Vektors

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

werden die Nebenkomponenten des Residuenvektors (α, β) erklärt durch

$$(\alpha, \beta)^{(\nu)} = \operatorname{Res} \frac{d\alpha}{\alpha} \beta^{(\nu)}.$$

Es ist

$$\frac{d\alpha}{\alpha} \beta^{(\nu)} = \left(cM_n\pi^{M_n}\frac{d\pi}{\pi} + \cdots\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} p^{i-1}\frac{b_i^{p^{\nu-i}}}{\pi^{\lambda_i p^{\nu-i}}} + \cdots\right).$$

Das Residuum hiervon ist

$$(\alpha, \beta)^{(\nu)} = 0 \quad \text{für } \nu < n,$$
$$(\alpha, \beta)^{(n)} = c p^{n-1} \lambda_j b_j^{p^{n-j}}.$$

Durch Übergang zu den Hauptkomponenten folgt jetzt

$$(\alpha, \beta) = (0, \ldots, 0, b_j^{p^{n-j}} c \lambda_j).$$

Die Residuenformel ergibt nun

$$(\alpha; \beta] \sim (\pi; 0, \ldots, 0, b_j^{p^{n-j}} c \lambda_j] \sim (\pi; b_j^{p^{n-j}} c \lambda_j].$$

Einerseits ist also $(\alpha; \beta] \sim 1$ für $c = 0$; andererseits kann man aber c so bestimmen, daß die Algebra $(\pi; b_j^{p^{n-j}} c\lambda_j]$ nicht zerfällt. Dadurch ist unsere Behauptung bewiesen.

Differente $\mathfrak{D}^{(n)}$ und *Diskriminante* $\mathfrak{d}^{(n)}$ von Z_n über K berechnen wir mit Hilfe der Führer-Diskriminantenformel [6])

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\chi} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\chi).$$

Dabei durchläuft χ alle Charaktere der zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ von Z_n/K und $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\chi)$ bedeutet den $\mathfrak{p}$-Führer desjenigen Teilkörpers von Z_n/K, der zu der durch $\chi = 1$ charakterisierten Untergruppe von $\mathfrak{Z}_n$ gehört. Dies ergibt in unserem Falle:

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}^{(i)\,\varphi(p^i)} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}^{(i)\,p^i - p^{i-1}} \qquad (\varphi \text{ Eulersche Funktion}).$$

Also wird der $\mathfrak{p}$-Beitrag zur Diskriminante $\mathfrak{d}^{(n)}$

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{(n)} = \mathfrak{p}^D \quad \text{mit } D = \sum_{i=1}^{n} (p^i - p^{i-1})(M_i + 1)$$

und der $\mathfrak{p}$-Beitrag zur Differente $\mathfrak{D}^{(n)}$

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}_n}^{(n)} = \mathfrak{P}_n^D.$$

Die Komponenten des Zahlenvektors $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sind keiner Größenbeziehung untereinander unterworfen. Wir beweisen nun den interessanten

Satz. *Wird Z_n über Z_1 durch den Vektor $(\beta_2', \ldots, \beta_n')$ erzeugt, so sind die Komponenten des entsprechend gebildeten (d. h. für $\mathfrak{P}_1$ reduzierten) Vektors $\lambda' = (\lambda_2', \ldots, \lambda_n')$ der Größe nach angeordnet. Es gilt $\lambda_i' = pM_i - (p-1)M_1$ $(i = 2, \ldots, n)$.*

Wir bemerken nebenbei, daß sich die Komponenten $(\beta_2', \ldots, \beta_n')$ leicht angeben lassen. Sie sind offenbar die 2. bis n-ten Komponenten des Vektors $\beta \dotplus \bar{\theta}$ mit $\bar{\theta} = (\theta_1, 0, \ldots, 0)$.

Beweis. Führer bzw. Diskriminante und Differente von Z_ν über Z_1 $(\nu = 1, \ldots, n)$ seien mit $\mathfrak{f}'^{(\nu)}$ bzw. $\mathfrak{d}'^{(\nu)}$ und $\mathfrak{D}'^{(\nu)}$ $(\mathfrak{f}'^{(1)} = \mathfrak{d}'^{(1)} = \mathfrak{D}'^{(1)} = 1)$ bezeichnet. Unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{P}_1}'^{(\nu)} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_\nu' + 1}$$

gezeigt haben. Sei dies für $\nu = k$ schon bewiesen. Wegen $\mathfrak{D}^{(k+1)} = \mathfrak{D}^{(1)} \mathfrak{D}'^{(k+1)}$ ist

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}_{k+1}}'^{(k+1)} = \mathfrak{P}_{k+1}^A \quad \text{mit } A = \sum_{i=1}^{k+1} (p^i - p^{i-1})(M_i + 1) - p^k(p-1)(M_1 + 1)$$

[6]) Man kann umgekehrt direkt die Differente von Z_n/K berechnen und so zu einem neuen Beweis der Führer-Diskriminantenformel kommen. Dies geschieht durch Berechnung des Führers von Z_n/Z_1. Doch treten dabei Fallunterscheidungen auf, die den Beweis unschön gestalten.

und $\mathfrak{d}'^{(k+1)}_{\mathfrak{P}_1} = \mathfrak{P}_1^A$. Nun ist

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=2}^{k+1} pM_i(p^{i-1} - p^{i-2}) - (p-1)(p^k - 1)M_1 + \sum_{i=2}^{k+1}(p^{i-1} - p^{i-2}) \\ &= \sum_{i=2}^{k+1}(pM_i - (p-1)M_1 + 1)(p^{i-1} - p^{i-2}) \\ &= \sum_{i=2}^{k+1}(\lambda_i' + 1)\varphi(p^{i-1}). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem Führer-Diskriminantensatz, angewandt auf Z_{k+1}/Z_1,

$$\mathfrak{d}'^{(k+1)}_{\mathfrak{P}_1} = \prod_{i=2}^{k+1} \mathfrak{f}'^{(i)\varphi(p^{i-1})}_{\mathfrak{P}_1}$$

ergibt unter Berücksichtigung der Induktionsannahme die Richtigkeit unserer Behauptung für $\nu = k + 1$.

4. Zur Bestimmung des *Geschlechtes* G von Z_n setzen wir voraus, daß Z_n den Körper k (und nicht eine echte algebraische Erweiterung von k) zum genauen Konstantenkörper besitzt. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die erzeugenden Gleichungen $\wp\theta = \beta$ absolut irreduzibel (d. h. auch bei Erweiterung von k auf die algebraisch abgeschlossene Hülle $\bar{k}$ irreduzibel) sind. Dafür genügt es wieder, vorauszusetzen, daß die erste Komponente der Vektorgleichung, $\wp\theta_1 = \beta_1$, in $\bar{K} = K\bar{k}$ irreduzibel ist. Die Bedingung dafür lautet, daß $\beta_1 \neq b + \wp\gamma$ mit b aus k und γ aus K ist. Unter dieser Voraussetzung ist

$$G = p^n g + \bar{g},$$

wo g das Geschlecht von K und $\bar{g}$ das Relativgeschlecht von Z_n/K bedeutet. Bezeichnet d den Grad der Diskriminante $\mathfrak{d}^{(n)}$, so ist $\bar{g} = \frac{d}{2} - (p^n - 1)$. f_i sei der Grad von $\mathfrak{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wegen $d = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p^i) f_i$ ist also

$$G - 1 = p^n(g - 1) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi(p^i) f_i.$$

Diese Formel erhält praktischen Wert für den Fall, daß K der rationale Funktionenkörper $(g = 0)$ ist, weil dann die Komponenten des Vektors β im Großen reduziert angenommen und daraus die Grade $\mathfrak{f}_i$ berechnet werden können.

Aus unserer Geschlechtsformel folgt, daß stets

$$G - 1 \geqq p^n(g - 1)$$

ist und daß das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn Z_n über K unverzweigt ist [7]).

Für den Fall $g = 0$ leiten wir aus der Geschlechtsformel noch eine weitere Ungleichung her:

Ist G_ν das Geschlecht des Körpers Z_ν, so gelten die Ungleichungen

$$(1) \qquad G_{\nu+1} > p(G_\nu + 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

[7]) Dies ist offenbar wegen der allgemeinen Gültigkeit der Hilbertschen Diskriminantenformel für beliebige algebraische Funktionenkörper L/K in folgender Form richtig:

Ist L/K separabel algebraisch vom Grade m und die erzeugende Gleichung absolut irreduzibel, so gilt für das Geschlecht G von L stets

$$G - 1 \geqq m(g - 1).$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn L/K unverzweigt ist.

Beweis. Aus der Führerformel entnehmen wir, daß für die Grade f_ν der Führer $\mathfrak{f}_\nu$ die Ungleichungen $f_{\nu+1} > f_\nu$, insbesondere $f_2 > \frac{p}{2} f_1 + 1$, bestehen. Also ist

$$G_{\nu+1} - pG_\nu = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\nu} \varphi(p^{i+1})(f_{i+1} - f_i) + \frac{1}{2}\varphi(p^2) f_2 - \frac{1}{2}(\varphi(p^2) - \varphi(p)) f_1 - (p-1)$$
$$> \frac{f_1}{2}\left(\frac{p^3}{2} - \frac{3p^2}{2} + 2p - 1\right) + \frac{1}{2}(p^2 - 3p + 2).$$

Nun muß, damit $G_1 > 0$ wird, $f_1 \geqq 3$ und für $p = 2$ sogar $f_1 \geqq 4$ sein. Daraus folgt dann $G_{\nu+1} - pG_\nu > p$, w. z. b. w.

5. Jetzt sei k algebraisch abgeschlossen und K als rationaler Funktionenkörper $K = k(x)$ darstellbar. Ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von Z_n heißt *Weierstraßpunkt* von Z_n, wenn $\dim \mathfrak{P}^{G_n} > 1$ ist, oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn ein Element z aus Z_n mit der Divisorendarstellung $z \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^\varrho}$ existiert, wo $\varrho \leqq G_n$ und $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist. Wir wollen untersuchen, ob die Verzweigungspunkte zyklischer p-Körper stets Weierstraßpunkte sind.

Diese Frage können wir sofort bejahen, wenn $n \geqq 2$ ist. Denn ist $\mathfrak{P}_{n-1}$ der $\mathfrak{P}_n$ enthaltende Primdivisor von Z_{n-1} ($\mathfrak{P}_{n-1} = \mathfrak{P}_n^p$), so existiert jedenfalls ein Element z_{n-1} aus Z_{n-1} mit der Divisorendarstellung

$$z_{n-1} \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_{n-1}^\sigma} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_n^{p\sigma}},$$

wobei $\sigma \leqq G_{n-1} + 1$. Nach (1) ist aber $p\sigma \leqq p(G_{n-1} + 1) < G_n$. Also ist $\mathfrak{P}_n$ Weierstraßpunkt in Z_n.

Wir brauchen nur noch den Fall $n = 1$ weiter zu verfolgen. Die im Großen reduzierte Form von β_1 sei

$$\beta_1 \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1^{\lambda(1)} \cdots \mathfrak{p}_r^{\lambda(r)}} \qquad (\lambda^{(i)}, p) = 1.$$

Dann ist $G_1 = (p-1)(\frac{1}{2} f_1 - 1)$ mit $f_1 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda^{(i)} + 1)$. Es sei $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i^p$ in Z_1. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $G_1 \geqq p$. Für $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_\infty$ sei $x - \alpha_i \cong \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_\infty}$. Dann ist $\frac{1}{x - \alpha_i} \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{P}_i^p}$. Also ist $\mathfrak{P}_i$ Weierstraßpunkt. Falls $\mathfrak{p}_\infty$ unter den $\mathfrak{p}_i$ vorkommen sollte, nehmen wir $\frac{1}{x}$ statt $x - \alpha_i$, um $\mathfrak{P}_i$ als Weierstraßpunkt zu erkennen.

2. Fall: $1 < G_1 < p$. Dann ist notwendig $p > 2$. f_1 kann nur die Werte 3 und 4 annehmen.

Für $f_1 = 3$ muß β_1 notwendig von der Form $\beta_1 \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1^2}$ sein. Wegen $\theta_1 \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_1^2}$ ist $\mathfrak{P}_1$ Weierstraßpunkt.

Für $f_1 = 4$ ist $G_1 = p - 1$. Entweder ist nun β_1 von der Form $\beta_1 \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1^3}$ (notwendig $p > 3$); dann ist $\mathfrak{P}_1$ wegen $\theta_1 \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_1^3}$ Weierstraßpunkt.

Oder β_1 ist von der Form $\beta_1 \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}$ mit $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, also $\theta_1 \cong \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$. Es sei z ein Element aus K mit $z \cong \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_2}$. Dann ist $dw = \frac{dz}{z} \cong (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)^{p-2}$ ein ganzes Differential in Z_1 [8]). Daher wird durch

$$dw,\ \theta dw, \ldots, \theta^{p-2} dw$$

ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Differentiale von Z_1 gegeben. Das allgemeine Differential von Z_1 hat also die Form

$$(c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{p-2}\theta^{p-2})dw \qquad (c_i \text{ aus } k).$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Verzweigungspunkte in diesem Falle keine Weierstraßpunkte sind.

Insgesamt haben wir jetzt folgenden Satz bewiesen:

Für einen zyklischen p-Körper des Grades p, der durch

$$\wp\theta_1 = \beta_1 \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} \quad (\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2)$$

erzeugt wird, sind die Verzweigungspunkte keine Weierstraßpunkte. Dagegen sind in allen übrigen Fällen die Verzweigungspunkte zyklischer p-Körper, wenn ihr Geschlecht größer als 1 *ist, zugleich Weierstraßpunkte dieser Körper.*

---

[8]) Wegen $k(z) = k(x)$ ist

$$\frac{1}{z}\,dz \cong \frac{1}{z}\,\frac{\mathfrak{D}_x}{\mathfrak{N}_z^2} \cong \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_1}\,\frac{(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)^{(p-1)(1+1)}}{\mathfrak{p}_2^2} = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)^{p-2}.$$

Eingegangen 10. August 1936.