Über die Ausnahmeklassen bei abstrakten hyperelliptischen Funktionenkörpern.

Von *Helmut Hasse* und *Hermann Ludwig Schmid* in Göttingen.

K sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p (gleich 0 oder Primzahl). Eine Divisorenklasse C_g von K vom Grade g heißt Ausnahmeklasse, wenn $\dim C_g > 1$ ist. Die Kenntnis der Ausnahmeklassen ist für eine umkehrbar eindeutige Beschreibung der Divisorenklassen nullten Grades wünschenswert.

Wir geben in dieser Note für den Fall eines hyperelliptischen Funktionenkörpers K eine genaue Charakterisierung der Ausnahmeklassen. Dies gelingt hier, weil der rationale Funktionenkörper $k(x)$ innerhalb K als Quotientenkörper der ganzen Differentiale invariant gekennzeichnet ist. Auf Grund der Kenntnis der Ausnahmeklassen ist es dann leicht, eine eindeutige Repräsentation der Divisorenklassen nullten Grades zu geben, wie dies z. B. bei elliptischen Körpern durch die Quotienten $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{O}}$ geschieht, wo $\mathfrak{O}$ ein fester und $\mathfrak{P}$ ein variabler Primdivisor ist. Die vorbereitenden Ausführungen über eine Erzeugung und die ganzen Differentiale von K sind eine direkte Verallgemeinerung der entsprechenden von Hasse aufgestellten Sätze für den Fall eines elliptischen Funktionenkörpers, der in unseren Ausführungen unter dem allgemeinen Begriff des hyperelliptischen Funktionenkörpers subsumiert werden kann [1]). Zum Schluß geben wir eine elementare Bestimmung der Anzahl der Divisorenklassen C_0 von K mit $C_0^2 = 1$.

1. Wenn K nicht rational ist ($g \geqq 1$), so folgt nach dem Riemann-Rochschen Satz für eine Klasse C_2 vom Grade 2

$$\dim C_2 = 0, 1 \text{ oder } 2.$$

K ist dann und nur dann hyperelliptisch, wenn mindestens eine Klasse C_2 mit $\dim C_2 = 2$ existiert. Dies ist gleichbedeutend damit, daß K quadratisch erzeugbar ist.

Denn seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei linear unabhängige ganze Divisoren aus einer Klasse C_2 mit $\dim C_2 = 2$ und

$$z \cong \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.$$

Da K nicht rational ist (sonst wäre $\dim C_2 = 3$), folgt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 1$, also $[K : k(z)] = 2$.

Sei umgekehrt K nicht rational und quadratisch erzeugbar, $[K : k(z)] = 2$. Da in $k(z)$ alle Primdivisoren äquivalent sind, bilden diese eine einzige Klasse auch in K; deren Grad und Dimension ist gleich 2.

---

[1]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper II, Journ. f. Math. **175** (1936).

Nach der Geschlechtsformel

$$g = \frac{d_z}{2} - (n_z - 1)$$

ist dann

$$d_z = 2g + 1 \geqq 3.$$

Also ist mindestens ein Verzweigungspunkt $\mathfrak{O}$ für $K/k(z)$ vorhanden. Daraus resultiert folgende Erzeugung von K:

Es gibt in K ein Element x mit dem genauen Nenner $\mathfrak{O}^2$. Wegen

$$\dim \mathfrak{O}^{2g+1} - \dim \mathfrak{O}^{2g} = 1$$

existiert ein Element y aus K mit dem genauen Nenner $\mathfrak{O}^{2g+1}$. Dann bilden für jedes $n \geqq 0$ die Potenzprodukte

$$x^i y^j \quad \text{mit} \quad 0 \leqq i, \quad 0 \leqq j \leqq 1, \quad 2i + (2g+1)\, j \leqq n$$

eine Basis der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{O}^n}$ in K. Insbesondere stellen die Elemente

$$1, x, \ldots, x^{2g+1}; \qquad y, xy, \ldots, x^g y$$

eine Basis der ganzen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{O}^{4g+2}}$ in K dar. Also muß y^2 (mit dem genauen Nenner $\mathfrak{O}^{4g+2}$) sich durch diese linear darstellen lassen:

$$F(x, y) = y^2 + f_g(x)\, y + f_{2g+1}(x) = 0. \tag{1}$$

$F(x, y)$ ist in x bzw. y vom Grade $2g + 1$ bzw. 2. $f_g(x)$ ist ein Polynom in x höchstens vom Grade g, $f_{2g+1}(x)$ ein Polynom in x vom genauen Grade $2g + 1$. $K/k(x)$ ist vom Grade 2 und separabel.

Der Integritätsbereich $J_{\mathfrak{O}}$ der höchstens für $\mathfrak{O}$ gebrochenen Elemente aus K fällt mit dem Integritätsbereich J_x der in bezug auf $k[x]$ ganz algebraischen Elemente aus K zusammen und hat über $k[x]$ die Basis $1, y$:

$$J_{\mathfrak{O}} = k[x, y] = k[x] + k[x]\, y = J_x.$$

2. Wir legen im folgenden für K die Erzeugung (1) zugrunde. Dann beweisen wir den

Satz 1.

$$du = \frac{dx}{F_y(x, y)} \cong \mathfrak{O}^{2g-2} \tag{2}$$

ist ein ganzes Differential von K. $(1, x, \ldots, x^{g-1})\, du$ ist ein System von g linear unabhängigen ganzen Differentialen von K. Das allgemeine ganze Differential von K hat die Form

$$\varphi(x)\, du, \tag{2a}$$

wo $\varphi(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $g - 1$ ist.

Beweis. Es ist

$$F_y(x, y) \cong y - y',$$

wo y' die zu y konjugierte über $k(x)$ bezeichnet. Es kommt also auf den Nachweis der Divisorengleichung

$$dx \cong \mathfrak{O}^{2g-2}\, (y - y')$$

an. Wegen $dx \cong \frac{\mathfrak{D}_x}{\mathfrak{O}^4}$ ($\mathfrak{D}_x$ Differentendivisor für $K/k(x)$) ist

$$\mathfrak{D}_x \cong \mathfrak{O}^{2g+2}\, (y - y') \tag{3}$$

zu zeigen. Wegen $J_x = J_{\mathfrak{O}}$ stimmt für jedes $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{O}$ der Beitrag zu $\mathfrak{D}_x$ mit dem Beitrag von $y - y'$ überein. Es bleibt also die Äquivalenz (3) nur noch für $\mathfrak{O}$ zu zeigen. Nun ist $\frac{x^g}{y}$ Primelement für $\mathfrak{O}$. Der $\mathfrak{O}$-Beitrag zu $\mathfrak{D}_x$ ist daher gleich dem $\mathfrak{O}$-Beitrag zur Elementdifferente

$$\frac{x^g}{y} - \frac{x^g}{y'} \cong \mathfrak{O}^{2g+2}(y - y').$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. Ist $g = 1$ (K elliptisch), so ist weder $k(x)$ noch eine Klasse C_2 mit $\dim C_2 = 2$ eindeutig bestimmt. Vielmehr existieren unendlich viele Körper $k(x)$, über denen K quadratisch erzeugbar ist, und jede Klasse C_2 hat die Dimension 2 [1]). Ist dagegen $g > 1$ (K echt hyperelliptisch), so ist nach Satz 1 $k(x)$ innerhalb K als Quotientenkörper der ganzen Differentiale von K invariant charakterisiert. Aus den folgenden Ausführungen (Satz 2) sieht man leicht, daß nur eine Klasse C_2 mit $\dim C_2 = 2$ vorhanden ist, nämlich die Klasse der Primdivisoren von $k(x)$.

Im folgenden bezeichnen kleine deutsche Buchstaben immer Divisoren aus $k(x)$. Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}^2$. Wegen (2) hat das allgemeine ganze Differential (2a) von K die Divisorendarstellung

$$\varphi(x)\, du \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{o}^\nu}\, \mathfrak{O}^{2g-2} = \mathfrak{G}\mathfrak{G}'\mathfrak{O}^{2g-2-2\nu} = \mathfrak{G}\mathfrak{O}^{g-1-\nu}(\mathfrak{G}\mathfrak{O}^{g-1-\nu})' \quad (0 \leqq \nu \leqq g-1).$$

(Der Strich soll stets die Konjugiertenbildung bezüglich $k(x)$ andeuten.) Wir haben daher:

Satz 2. *Die ganzen Divisoren aus der Differentialklasse W von K sind genau die Normen bezüglich $k(x)$ der ganzen Divisoren vom Grade $g-1$ von K.*

3. Wir nennen einen ganzen Divisor von K *primitiv*, wenn er durch keinen Divisor von $k(x)$ teilbar ist. Jeder ganze Divisor $\mathfrak{G}$ von K vom Grade g besitzt eine eindeutige Produktdarstellung

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{D}\mathfrak{D}')\,\mathfrak{R} = \mathfrak{d}\mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{D}$ vom Grade n in K ($\mathfrak{d}$ also vom Grade n in $k(x)$) und $\mathfrak{R}$ primitiv ist. Wir nennen n den *Imprimitivitätsgrad* von $\mathfrak{G}$.

Satz 3. *Ist G die Klasse des ganzen Divisors $\mathfrak{G}$ vom Grade g, so ist die Dimension der Ergänzungsklasse $\frac{W}{G}$ gleich dem Imprimitivitätsgrad n von $\mathfrak{G}$ oder also*

$$\dim G = 1 + n.$$

Der Imprimitivitätsgrad von $\mathfrak{G}$ ist somit eine Eigenschaft der zugehörigen Klasse.

Beweis. Die durch $\mathfrak{G}$ teilbaren ganzen Differentiale müssen nach Satz 2 sogar durch $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ teilbar sein. Der komplementäre Teiler muß dann von der Form $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ ($\mathfrak{S}$ vom Grade $n-1$) sein und kann innerhalb dieser Form beliebig gewählt werden. Es gibt aber genau n linear unabhängige ganze Divisoren $\mathfrak{f}$ vom Grade $n-1$ von $k(x)$. Also ist $\dim \frac{W}{G} = n$, w. z. b. w.

Aus Satz 3 ergibt sich sofort der

Satz 4. *Ein System von g Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g$ ist dann und nur dann nicht speziell, d. h. $\dim(\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g) = 1$, wenn der Imprimitivitätsgrad des Divisors $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ gleich Null ist, wenn also $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ durch keinen Divisor aus $k(x)$ teilbar ist.*

Wir können den Inhalt von Satz 4 auch so wenden, daß die Charakterisierung der Ausnahmeklassen formuliert wird:

Satz 4a. *Eine Klasse C_g vom Grade g ist dann und nur dann Ausnahmeklasse, wenn ihr Imprimitivitätsgrad positiv ist.*

4. Wir geben jetzt die eineindeutige Beschreibung der Divisorenklassen nullten Grades von K.

Satz 5. *Die Divisorenklassen nullten Grades von K werden umkehrbar eindeutig repräsentiert durch die Quotienten*

$$\frac{\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{O}^\nu} \qquad (0 \leqq \nu \leqq g),$$

wobei $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_\nu$ alle primitiven, zu $\mathfrak{O}$ primen Divisoren ν-ten Grades von K durchläuft.

Beweis. Den Klassen nullten Grades C_0 entsprechen umkehrbar eindeutig Klassen g-ten Grades C_g durch die Beziehung

$$C_0(\mathfrak{O}^g) = C_g.$$

Es genügt also, eine eineindeutige Repräsentation der Klassen C_g anzugeben. Sind nun $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei ganze Divisoren aus einer Klasse C_g und

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{g}\mathfrak{G}_0 \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{h}\mathfrak{H}_0 \end{aligned} \qquad (\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \text{ ganz in } k(x), \quad \mathfrak{G}_0 \text{ und } \mathfrak{H}_0 \text{ primitiv})$$

ihre eindeutigen Zerlegungen, so folgt, da nach Satz 3 der Grad von $\mathfrak{g}$ gleich dem Grad von $\mathfrak{h}$ ist, $\mathfrak{G}_0 \sim \mathfrak{H}_0$ und daraus (nach evtl. Ergänzung der Divisoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ auf den Grad g) wegen der Primitivität $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_0$. Ersetzen wir noch $\mathfrak{g}$ durch den ihm äquivalenten Divisor $\mathfrak{O}^{2n}$ (n Imprimitivitätsgrad von C_g), so haben wir aus C_g eindeutig einen ganzen Divisor

$$\mathfrak{O}^{2n}\mathfrak{G}_0$$

bestimmt. Ein etwa in $\mathfrak{G}_0$ noch vorkommender Faktor $\mathfrak{O}^1$ kann zur Potenz $\mathfrak{O}^{2n}$ dazu genommen werden. Daraus folgt jetzt unmittelbar die Gültigkeit von Satz 5.

5. Eine hübsche Anwendung von Satz 5 ist die Bestimmung der Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^2 = 1$. Es sind dies genau die Klassen, für die $C_0 = C_0'$ ist. Nach Satz 5 soll also

$$\text{(4)} \qquad \frac{\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{O}^\nu} = \frac{\mathfrak{P}_1' \cdots \mathfrak{P}_\nu'}{\mathfrak{O}^\nu} \qquad (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_\nu \text{ primitiv}, \ 0 \leqq \nu \leqq g)$$

sein. Dies ist aber nur für $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i'$ ($i = 1, \ldots, \nu$) möglich. Die in (4) zur Repräsentation unserer gesuchten Klassen benutzten $\mathfrak{P}$ können also nur die von $\mathfrak{O}$ verschiedenen Verzweigungspunkte sein. Ist N die Anzahl aller Verzweigungspunkte von K, so ist unsere gesuchte Anzahl gleich

$$\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} = 2^{N-1} \quad \text{für } N-1 \leqq g$$

und

$$\sum_{i=1}^{g} \binom{N-1}{i} \qquad \text{für } N-1 > g.$$

Ist die Charakteristik $p \neq 2$, so ist $N = 2g + 2$ und $\sum_{i=0}^{g} \binom{N-1}{i} = 2^{2g}$. Für $p = 2$

ist in (1) notwendig $f_g(x) \neq 0$. Wegen $\mathfrak{D}_x \cong \mathfrak{O}^{2g+2} f_g(x)$ ist N eine der Zahlen von 1 bis $g+1$.

Wir fassen unser Ergebnis zusammen in

Satz 6. *Die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^2 = 1$ ist für $p \neq 2$ gleich 2^{2g}, für $p = 2$ dagegen gleich 2^{N-1}, wo N als Anzahl der Verzweigungspunkte von K eine der Zahlen 1 bis $g+1$ ist.*

Der erste Teil der Aussage des Satzes 6 ist ein Teilresultat des Desideratums: Die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^n = 1$ ist für $(n, p) = 1$ gleich n^{2g}.

Den zweiten Teil vergleichen wir mit bekannten Resultaten einer früher erschienenen Arbeit [2]). Dort wurde festgestellt, daß die Anzahl der Klassen C_0 mit $C_0^p = 1$ gleich p^γ ist, wo γ als Rang einer gewissen invarianten Matrix M von K eine der Zahlen 0 bis g ist [3]). Der Vergleich beider Resultate ergibt den

Satz 7. *Ist die Charakteristik $p = 2$, so ist der Rang γ der Matrix M gleich $N-1$, wo N die Anzahl der Verzweigungspunkte von K ist.*

---

[2]) H. Hasse und E. Witt, Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p, Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936).

[3]) Ist $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g$ ein nicht spezielles System von lauter verschiedenen Primdivisoren und $\pi_1, \ldots, \pi_g$ ein zugehöriges System lokaler Primelemente, so existiert in K ein System $v_1, \ldots, v_g$ von Elementen, die ganze Multipla von $\dfrac{1}{(\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g)^p}$ sind und die Entwicklungen

$$v_j = \frac{e_{ij}}{\pi_i^p} - \frac{a_{ij}}{\pi_i} + \cdots$$

besitzen. Dann ist γ der Rang der Matrix $M = AA^p \cdots A^{p^{g-1}}$, wo $A = (a_{ij})$ ist.

Eingegangen 25. August 1936.