Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1937
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0176
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176

LOG Id: LOG_0026
LOG Titel: Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper.

Von *Ruth Moufang* in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Ein allgemeines Konstruktionsprinzip zur Erzeugung von Schiefkörpern ohne endliche Basis hat G. Köthe [1]) gegeben. Die erhaltenen Schiefkörper sind so beschaffen, daß je endlich viele Elemente in einem Schiefkörper mit endlicher Basis gelegen sind, eine Eigenschaft, die hier die Anordbarkeit ausschließt [2]).

Den folgenden Untersuchungen liegt die Frage nach einem Konstruktionsprinzip für anordbare Schiefkörper zugrunde. Ausgangspunkt ist der Gruppenring: Man bilde aus den Elementen einer aus a und b erzeugten Gruppe G über den rationalen Zahlen endliche Linearkombinationen (die verschiedenen Elemente von G bilden die abzählbar unendliche Basis des Rings). Ist G abelsch und erfüllen die Erzeugenden a, b keine Relation, die nicht in allen abelschen Gruppen erfüllt ist, so ist der Gruppenring in einen geordneten kommutativen Körper einbettbar. Ist G die freie Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist die Frage nach der Einbettbarkeit des Gruppenrings in einen Schiefkörper noch unentschieden (vgl. S. 208). Im folgenden behandeln wir den Fall, daß G metabelsch [3]) ist. Es zeigt sich:

Der Gruppenring der metabelschen Gruppe ist in einen geordneten Schiefkörper einbettbar.

Das allgemeine Element des Schiefkörpers ist eine Laurent-Reihe in b mit endlich vielen negativen Potenzen, deren Koeffizienten Laurent-Reihen in a vom selben Typ sind; ihre Koeffizienten sind rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten von endlich vielen der abzählbar unendlich vielen Unbestimmten $v_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), die unter sich vertauschbar sind. Bei der Konstruktion des Schiefkörpers wird von der *Darstellung der metabelschen Gruppe mit Hilfe von symbolischen Potenzen des Kommutators von a und b* Gebrauch gemacht (§§ 1, 2). Der Hilbertsche Schiefkörper [4]) erscheint als einfachster Spezialfall unserer Konstruktion (§ 3).

Es zeigt sich ferner, daß der Gruppenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ der metabelschen Gruppe sogar in einen geordneten Schiefkörper einbettbar ist, der nur eine *endliche Anzahl von Parametern* enthält, nämlich drei (b, a, x) über dem Körper der rationalen Funktionen von zwei Unbestimmten als Zentrum; das allgemeine Element des Schiefkörpers ist eine

[1]) G. Köthe, Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum, Math. Annalen **105** (1931), S. 15—39.

[2]) Über den Zusammenhang von Anordbarkeit und Endlichkeit der Basis siehe die Arbeit von Herrn W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Annalen **113** (1936), S. 528—567.

[3]) Wir verstehen hier und im folgenden unter der metabelschen Gruppe die allgemeinste metabelsche Gruppe, bei der also die Erzeugenden a, b nur solchen Relationen genügen, die in allen metabelschen Gruppen erfüllt sind.

[4]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. 1930, § 33.

Laurent-Reihe in b, a, x mit jeweils nur endlich vielen negativen Potenzen und mit Koeffizienten aus dem Zentrum (§§ 4, 5).

Der Ring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ enthält als Unterring den *freien Ring* $\mathfrak{F}$ *aus zwei Erzeugenden* a, b, gebildet aus den Linearkombinationen von endlich vielen verschiedenen Potenzprodukten in a, b mit positiven Exponenten und mit rationalen Koeffizienten. Die Einbettung von $\mathfrak{F}$ in einen geordneten Schiefkörper ist mit der Einbettung von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ in einen solchen geleistet. Es zeigt sich aber, daß man bereits einfachere geordnete Schiefkörper angeben kann, die zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Unterringe enthalten (§ 1, Nr. **5**; § 3, Nr. **3**; § 4, Nr. **8**).

§ 1. Die metabelsche Gruppe und ihr Gruppenring.

1. Die Elemente der metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$ aus zwei Erzeugenden a, b lassen sich bekanntlich [5]) mit Hilfe symbolischer Potenzen des Kommutators

$$u = bab^{-1}a^{-1}$$

so darstellen, daß jedem Potenzprodukt P in a, b, a^{-1}, b^{-1} eindeutig ein Ausdruck $u^{\varphi}a^{\alpha}b^{\beta}$ zugeordnet ist, wo φ ein Polynom in den kommutativen Variablen a, b, a^{-1}, b^{-1} mit ganzen Koeffizienten, α die Exponentensumme von a in P, β die Exponentensumme von b in P ist. Diese Darstellung wird erhalten durch sukzessive Anwendung der folgenden Springregeln

$$(1) \qquad b^l a^k = u^{\frac{a^k-1}{a-1}\frac{b^l-1}{b-1}} a^k b^l = u^{\varepsilon_k \varepsilon_l a^{\frac{\varepsilon_k-1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_l-1}{2}} p_k q_l} a^k b^l$$

mit

$$k = \varepsilon_k |k|, \qquad l = \varepsilon_l |l|,$$

$$p_k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}, \quad p_{-k} = 1 + a^{-1} + a^{-2} + \cdot \; \cdot + a^{-k+1} \qquad (k > 0),$$

$$q_l = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{l-1}, \quad q_{-l} = 1 + b^{-1} + b^{-2} + \cdots + b^{-l+} \qquad (l > 0),$$

$$p_0 = q_0 = 0, \quad p_1 = p_{-1} = q_1 = q_{-1} = 1,$$

$$(2) \qquad b^l u^{\psi} = u^{\psi b^l} b^l,$$

$$(3) \qquad a^k u^{\chi} = u^{\chi a^k} a^k,$$

wobei k, l ganz, ψ, χ Polynome in a, a^{-1}, b, b^{-1} mit ganzen Koeffizienten sind.

Die Darstellung

$$P = u^{\varphi} a^{\alpha} b^{\beta}$$

ist im allgemeinen nicht eineindeutig; indessen ist dies der Fall, sofern in dem Potenzprodukt P nur positive Exponenten vorkommen. Dann hat man

$$P = b^{k_1} a^{l_1} b^{k_2} a^{l_2} \cdots b^{k_t} a^{l_t} = u^{\varphi} a^{\alpha} b^{\beta}$$

mit

$$\alpha = \Sigma l_i, \quad \beta = \Sigma k_i,$$

$$\varphi = q_{k_1} p_{l_1} + a^{l_1} q_{k_1+k_2} p_{l_2} + \cdots + a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-1}} q_{k_1+k_2+\,\cdot\,+k_t} p_{l_t}.$$

Analog sei

$$P' = u^{\varphi'} a^{\alpha'} b^{\beta'}.$$

---

[5]) Für das Folgende siehe etwa Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes für den Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), S. 14—36. Unsere Bezeichnung weicht von der dort gegebenen ab. Wir setzen

$$aua^{-1} = u^a, \quad a^{-1}ua = u^{a^{-1}}, \quad bub^{-1} = u^b, \quad b^{-1}ub = u^{b^{-1}} \quad \text{usw.}$$

Die a, b im Exponenten von u sind kommutative Variable, die Erzeugenden a, b der metabelschen Gruppe dagegen nicht kommutativ.

Ist $u^{\varphi'} a^{\alpha'} b^{\beta'}$ formal identisch mit $u^{\varphi} a^{\alpha} b^{\beta}$, also $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ und $\varphi' \equiv \varphi$, so folgt, daß P' mit P formal identisch ist:

$$\varphi' = q_{k'_1} p_{l'_1} + a^{l'_1} q_{k'_1+k'_2} p_{l'_2} + \cdots + a^{l'_1+l'_2+\cdots+l'_{s-1}} q_{k'_1+k'_2+\cdots+k'_s} p_{l'_s}.$$

Nimmt man in φ bzw. φ' die höchste vorkommende Potenz von b, so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-1}} p_{l_t} = a^{l'_1+l'_2+\cdots+l'_{s-1}} p_{l'_s},$$

daraus durch Vergleich der niedrigsten Potenz von a

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_{t-1} = l'_1 + l'_2 + \cdots + l'_{s-1}, \quad \text{also } l_t = l'_s.$$

Aus

$$q_{k_1} p_{l_1} + \cdots + a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-2}} q_{k_1+\cdots+k_{t-1}} p_{l_{t-1}} = q_{k'_1} p_{l'_1} + \cdots + a^{l'_1+l'_2+\cdots+l'_{s-2}} q_{k'_1+\cdots+k'_{s-1}} p_{l'_{s-1}}$$

folgt jetzt durch Vergleich der beiderseits höchsten vorkommenden Potenz von b

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1} = k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_{s-1}, \quad \text{also } k_t = k'_s,$$

und durch Vergleich der zugehörigen Koeffizienten

$$a^{l_1+\cdots+l_{t-2}} p_{l_{t-1}} = a^{l'_1+\cdots+l'_{s-1}} p_{l'_{s-1}}, \quad \text{also } l_{t-1} = l'_{s-1}.$$

Durch Fortsetzung folgt die Behauptung $P' \equiv P$.

2. Zu $\mathfrak{M}$ gehört ein Gruppenring aus den Elementen $\sum_{i=1}^{N} r_i P_i$, r_i rational, P_i Element aus $\mathfrak{M}$. Die Addition ist erklärt durch Addition gleichstelliger Koeffizienten r_i, die Multiplikation durch gliedweises Ausmultiplizieren. Dadurch erhält man einen Ring. Gebrauchen wir für die P die obige Darstellung, so hat man als Ringelement

$$\sum_{\nu, n, m} r_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m,$$

wo die Zeiger ν bzw. n, m endlich viele natürliche bzw. ganze Zahlen durchlaufen. Die Multiplikation ist jetzt gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned}(4)\qquad \sum_{\nu,n,m} r_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \cdot \sum_{\mu,k,l} \varrho_{\mu k l} u^{\psi_\mu} a^k b^l &= \sum_{\substack{\nu,n,m\\ \mu,k,l}} r_{\nu n m} \varrho_{\mu k l} u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + a^n \frac{a^k-1}{a-1}\frac{b^m-1}{b-1}} a^{n+k} b^{m+l} \\ &= \sum_{\substack{\nu,n,m\\ \mu,k,l}} r_{\nu n m} \varrho_{\mu k l} u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + \varepsilon_k \varepsilon_m a^{\frac{\varepsilon_k - 1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_m - 1}{2}} a^n p_k q_m} a^{n+k} b^{m+l}.\end{aligned}$$

Die Basiselemente dieses Rings $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ sind Potenzprodukte in den nicht-kommutativen Unbestimmten a, b, a^{-1}, b^{-1} und je endlich vielen der untereinander vertauschbaren Unbestimmten $v_{ki} = u^{\pm a^i b^k}$ $(i, k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Um die Assoziativität der durch (4) definierten Multiplikation einzusehen, hat man zu beweisen

$$\{u^{\varphi} a^k b^l \cdot u^{\psi} a^m b^h\} \cdot u^{\chi} a^s b^t = u^{\varphi} a^k b^l \cdot \{u^{\psi} a^m b^h \cdot u^{\chi} a^s b^t\}.$$

Durch Vergleich der Exponenten von u in den beiderseitigen Normalformen erhält man

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\varphi + a^k b^l \psi + a^k \frac{a^m - 1}{a - 1} \frac{b^l - 1}{b - 1} + a^{m+k} b^{l+h} \chi + a^{m+k} \frac{a^s - 1}{a - 1} \frac{b^{l+h} - 1}{b - 1} \\ &= \varphi + a^k b^l \psi + a^{k+m} b^{l+h} \chi + a^{m+k} \frac{a^s - 1}{a - 1} b^l \frac{b^h - 1}{b - 1} + a^k \frac{a^{m+s} - 1}{a - 1} \frac{b^l - 1}{b - 1},\end{aligned}$$

und dies ist eine Identität.

3. Der soeben konstruierte Ring ist offenbar Unterring in dem Ring $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ mit dem allgemeinen Element

$$\sum_{k=M}^{\infty}\left(\sum_{i=N_k}^{\infty} R_{ik}\,a^i\right) b^k\,,$$

wo N_k, $M \gtreqless 0$ ganz und R_{ik} eine rationale Funktion von endlich vielen der $u^{a^\nu b^\mu}$ ($\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) ist. Wir schreiben diese Doppelsumme im folgenden kürzer $\sum\limits_{i,k} R_{ik} a^i b^k$.

Die Addition ist erklärt durch

$$\sum_{i,k} R_{ik}\,a^i b^k + \sum_{i,k} \mathsf{P}_{ik}\,a^i b^k = \sum_{i,k} (R_{ik} + \mathsf{P}_{ik})\,a^i b^k = \sum_{i,k} S_{ik}\,a^i b^k,$$

wo die P_{ik}, S_{ik} analoge Bedeutung haben wie die R_{ik}.

Die Multiplikation ist sinngemäß im Anschluß an das Vorige definiert. Setzt man

$$\mathsf{P}_{nm} = \frac{\sum\limits_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}}}{\sum\limits_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}} \qquad (\text{nicht alle } \bar{\varrho}_h = 0),$$

so ist

$$(6) \qquad \sum_{i,k} R_{ik}\,a^i b^k \cdot \sum_{n,m} \mathsf{P}_{nm}\,a^n b^m = \sum_{\substack{i,k,\\ n,m}} R_{ik} \frac{\sum\limits_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)} \cdot a^i b^k}}{\sum\limits_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)} \cdot a^i b^k}}\, u^{a^i \frac{a^n-1}{a-1} \frac{b^k-1}{b-1}}\, a^{i+n}\, b^{k+m}\,.$$

Sind insbesondere die R und P ganzrationale Funktionen, die sich auf einen Summanden u^φ reduzieren, so geht (6) in (4) über. Sind die R, P allgemeine ganzrationale Funktionen, so folgt (6) aus (4) vermöge der distributiven Gesetze. Treten in R, P Nenner auf, so benutze man zur Herleitung von (6) die Springregel

$$\begin{aligned}
b^k \mathsf{P}_{nm} &= b^k \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}} \Big(\sum_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}\Big)^{-1} \\
&= \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)} b^k} \Big(\sum_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}\, b^{-k}\Big)^{-1} \\
&= \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)} b^k} \Big(b^{-k} \sum_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)} b^k}\Big)^{-1} \\
&= \frac{\sum\limits_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)} b^k}}{\sum\limits_h \bar{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)} b^k}}\, b^k.
\end{aligned}$$

Die Assoziativität der durch (6) definierten Multiplikation folgt durch eine einfache Überlegung aus der Assoziativität innerhalb des Rings $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$; die zu beweisende Gleichung führt nämlich sofort auf (5).

4. *Der Ring $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ ist ein Schiefkörper.* Zunächst ist $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ nullteilerfrei. Wir setzen ein Element $\sum\limits_{i,k} R_{ik} a^i b^k$ dann gleich Null, wenn alle R_{ik} gleich Null sind, d. h. wenn in jedem R_{ik} alle Koeffizienten im Zähler (aber nicht alle Koeffizienten im Nenner) verschwinden. Zwei Elemente heißen gleich, wenn ihre Differenz verschwindet.

Sei

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty\\ k=M,\ldots\infty}} R_{ik}\,a^i b^k \neq 0, \qquad R_{N_M M} \neq 0,$$

$$\Omega' = \sum_{\substack{n=N'_m,\ldots\infty\\ m=M',\ldots\infty}} \mathsf{P}_{nm}\,a^n b^m \neq 0, \qquad \mathsf{P}_{N'_{M'} M'} \neq 0$$

$$(N_k,\ M,\ N'_m,\ M' \gtreqless 0,\ \text{ganz}),$$

so ist auch das Produkt dieser beiden Elemente von Null verschieden, denn das Glied $a^{N_M+N'_{M'}}\, b^{M+M'}$ kommt genau einmal vor, versehen mit dem Koeffizienten

$$c = R_{N_M\, M}\, \frac{\sum\limits_l \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} a^{N_M} b^M}}{\sum\limits_h \bar{\varrho}_h^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\psi_h^{(N'_{M'},\, M')} a^{N_M} b^M}}\, u^{a^{N_M} \frac{a^{N'_{M'}}-1}{a-1} \frac{b^M-1}{b-1}},$$

der von Null verschieden ist, da die rationalen Funktionen von endlich vielen kommutativen Unbestimmten, hier $u^{a^\nu b^\mu}$, keine Nullteiler haben.

Das Element mit $R_{00} = 1$, $R_{ik} = 0$ sonst, ist die Haupteinheit des Rings; man hat jetzt zu zeigen: Die Gleichung

$$\Omega\Omega' = 1$$

hat bei gegebenem $\Omega' \neq 0$ mindestens eine Lösung Ω, bei gegebenem $\Omega \neq 0$ mindestens eine Lösung Ω'. Die Einzigkeit der ersten bzw. zweiten Lösung folgt dann aus der Nullteilerfreiheit, endlich die Übereinstimmung der ersten mit der zweiten Lösung nach dem bekannten Schluß mit Hilfe des assoziativen Gesetzes.

Eine Lösung von $\Omega\Omega' = 1$ bei gegebenem Ω' gewinnt man mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten generell genau so wie beim Hilbertschen Schiefkörper (siehe Anm. [4])). Gegeben sind die P_{nm}, die R_{ik} gesucht. Zwischen den P und den R besteht analog wie bei Hilbert ein System von in R linearen Relationen, aus denen sich die Unbekannten R_{ik} sukzessive bestimmen. Zunächst läuft k von $-M'$ bis ∞, i von $-N'_{M'}$ bis ∞; man findet den Wert von $R_{-N'_{M'},\, -M'}$ aus $c = 1$, daraus rekursiv alle $R_{i,\, -M'}$ und weiterhin ein R_{ik} mit festem i, k rekursiv aus den $R_{i'k}$ mit $i' < i$ und den ebenfalls bekannten $R_{jk'}$ mit $k' < k$. In der linearen Beziehung, die R_{ik} liefert, kommt R_{ik} mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vor, nämlich abgesehen von einer reinen symbolischen Potenz von u, mit

$$\frac{\sum\limits_l \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^i \cdot b^k}}{\sum\limits_h \bar{\varrho}_h^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_h^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^i \cdot b^k}}.$$

Um die Gleichung $\Omega\Omega' = 1$ bei gegebenem Ω aufzulösen, bedient man sich ebenfalls des Ansatzes der unbestimmten Koeffizienten, hier P_{nm}. Das System der durch Koeffizientenvergleich nach b und a resultierenden Gleichungen ist jetzt nicht mehr in den P_{nm} selbst linear, sondern in den rationalen Funktionen, die aus den P_{nm} dadurch hervorgehen, daß die im Exponenten von u auftretenden φ und ψ jedesmal einen festen Faktor erhalten, nämlich $a^{N_M}\, b^M$ für dasjenige P, das in einer solchen Gleichung den größten Index m und dann den größten Index n hat. Aus $c = 1$ findet man $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'}$ ($N'_{M'} = -N_M$, $M' = -M$), indem man

$$\left(R_{N_M\, M}\, u^{a^{N_M} \frac{a^{N'_{M'}}-1}{a-1} \frac{b^M-1}{b-1}}\right)^{-1}$$

wieder als Bruch schreibt und im Zähler und Nenner in jedem Exponenten von u den Faktor $a^{-N_M}\, b^{-M}$ anbringt. — Damit ist man fertig.

5. Der Schiefkörper $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ enthält einen zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ isomorphen Teilring, folglich auch einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Teilring. In $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ sind nämlich die Potenzprodukte in a, b zu endlich vielen über den rationalen Zahlen linear unabhängig, weil sie in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ verschiedene Normalformen haben (s. Nr. **1**).

Gelänge es darüber hinaus, in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ zwei Elemente ξ, η so anzugeben, daß alle Potenzprodukte in $\xi, \xi^{-1}, \eta, \eta^{-1}$ zu je endlich vielen über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind, so wäre bewiesen, daß $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ sogar einen zu $\mathfrak{G}$ isomorphen Teilring enthält, womit die Einbettung des Gruppenringes der freien Gruppe aus zwei Erzeugenden in einen Schiefkörper geleistet wäre.

§ 2. Anordnung des Schiefkörpers $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$.

1. Wir ordnen zunächst die Polynome φ der Argumente a, b, a^{-1}, b^{-1} (a, b sind kommutative Variable) mit ganzen Koeffizienten so an: es sei dann und nur dann $\varphi = 0$, wenn alle Koeffizienten verschwinden, und es sei $\varphi \gtrless 0$, je nachdem die kleinste vorkommende Potenz von b als Koeffizienten ein solches Polynom in a, a^{-1} hat, dessen niedrigste vorkommende Potenz von a einen ganzzahligen Koeffizienten $\gtrless 0$ hat. Dieses Glied in φ wollen wir das Hauptglied nennen. Nun sei $\varphi \gtrless \psi$, falls $\varphi - \psi \gtrless 0$ ist.

Diese Anordnung ist monoton: Aus $\varphi > 0$, $\psi > 0$ folgt

$$\varphi + \psi > 0, \qquad \varphi\psi > 0,$$

wie man sofort einsieht.

Nun sei

$$A = \sum_{i=1}^{h} r_i u^{\varphi_i} \gtrless 0,$$

je nachdem $r_1 \gtrless 0$, sofern $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_h$. Ist

$$A' = \sum_{k=1}^{l} r_k' u^{\psi_k}, \qquad \psi_1 < \cdots < \psi_l,$$

so sei $A \gtrless A'$, je nachdem $A - A' \gtrless 0$. Dann erkennt man leicht die Beziehungen: Aus $A > 0$, $A' > 0$ folgt $A + A' > 0$, $AA' > 0$. Das erste ist trivial, das zweite folgt aus der Tatsache, daß das Vorzeichen von

$$AA' = \sum_{\substack{i=1,\ldots,h \\ k=1,\ldots,l}} r_i r_k' u^{\varphi_i + \psi_k}$$

bestimmt wird durch das Glied $u^{\varphi_1+\psi_1}$, das mit dem positiven Koeffizienten $r_1 r_1'$ versehen ist.

Die rationalen Funktionen

$$Z_1 = \frac{A}{A'}, \quad Z_2 = \frac{B}{B'}$$

(B, B' usw. bezeichnen Elemente vom selben Typ wie A, A') ordnen wir gemäß

$$Z = \frac{C}{C'} \gtrless 0,$$

je nachdem $CC' \gtrless 0$, und $Z_1 \gtrless Z_2$, je nachdem $Z_1 - Z_2 \gtrless 0$. Dann folgt aus $Z_1 > 0$, $Z_2 > 0$ auch $Z_1 + Z_2 > 0$, denn es ist

$$Z_1 + Z_2 = \frac{A}{A'} + \frac{B}{B'} = \frac{AB' + A'B}{A'B'}$$

und

$$(AB' + A'B)\, A'B' = AA'B'^2 + BB'A'^2 > 0$$

wegen der Monotoniegesetze für die Anordnung der $A, \ldots$ und der Voraussetzung $AA' > 0$ und $BB' > 0$.

2. *Anordnung der Elemente von* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$. Die in § 1 mit R_{ik} bezeichneten Elemente sind die soeben mit Z bezeichneten Elemente. Wir setzen fest:

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty \\ k=M,\ldots\infty}} R_{ik}\, a^i b^k \gtrless 0, \text{ je nachdem } R_{N_M\, M} \gtrless 0.$$

Wir nennen $R_{N_M\, M}\, a^{N_M} b^M$ das Hauptglied von Ω. Es sei

$$\Omega \gtrless \Omega', \quad \text{je nachdem} \quad \Omega - \Omega' \gtrless 0.$$

Daß aus $\Omega > 0$, $\Omega' > 0$ auch $\Omega + \Omega' > 0$ folgt, ist dann sofort einzusehen.

Die Monotoniegesetze der Multiplikation ergeben sich so: Es sei

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty \\ k=M,\ldots\infty}} R_{ik}\, a^i b^k > 0, \qquad \Omega' = \sum_{\substack{n=N'_m,\ldots\infty \\ m=M',\ldots\infty}} \mathsf{P}_{nm}\, a^n b^m > 0.$$

Dann hat $\Omega\Omega'$ nach (6) das Hauptglied

$$R_{N_M\, M} \frac{\sum\limits_{l} \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')} u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^{N_M} \cdot b^M}}{\sum\limits_{k} \bar{\varrho}_h^{(N'_{M'},\, M')} u^{\psi_h^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^{N_M} \cdot b^M}}\, u^{a^{N_M} \frac{a^{N'_{M'}}-1}{a-1} \frac{a^M-1}{b-1}}\, a^{N_M + N'_{M'}}\, b^{M+M'},$$

dessen Koeffizient positiv ist, weil nach Voraussetzung $R_{N_M\, M} > 0$, $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'} > 0$, daher auch noch derjenige Bruch, der aus $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'}$ dadurch hervorgeht, daß man in jedem Glied im Zähler und Nenner im Exponenten von u einen festen Faktor $a^{N_M} b^M$ anfügt; denn die Größenanordnung der Exponenten wird dadurch nicht zerstört. Schließlich ist auch der dritte Faktor im Hauptglied positiv, also auch das Produkt aller drei Faktoren. Folglich ist $\Omega\Omega' > 0$. Ebenso beweist man, daß $\Omega'\Omega > 0$ ist.

3. a) Aus dieser Anordnung des Schiefkörpers $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ folgt dann sofort: In $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ gilt keine Regel von der Form, daß ein festes Polynom in zwei Unbestimmten mit rationalen Koeffizienten identisch in den Unbestimmten gleich Null ist [6]). Dies ist eine Folge der Tatsache, daß in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ die Normalformen $u^{\varphi} a^{\alpha} b^{\beta}$, die zu verschiedenen Potenzprodukten der speziellen Elemente a, b gehören, nichtarchimedisch verschieden sind, so daß keine Linearkombination von ihnen verschwinden kann.

Man kann sogar beweisen: Eine Regel dieser Form gilt in keinem geordneten Schiefkörper, in dem zwei Elemente a, b existieren mit [7])

$$ba \ll ab \tag{7}$$

und

$$a b^{n+1} a^i \gg b a^{i+1} b^n \quad \text{für beliebige ganze positive } i, n. \tag{8}$$

Diese Voraussetzungen sind in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ erfüllt wegen

$$ba = uab \ll ab,$$

$$ab^{n+1} a^i = u^{a p_i q_{n+1}} a^{i+1} b^{n+1} \gg u^{p_{i+1} q_1} a^{i+1} b^{n+1} = b a^{i+1} b^n.$$

Aus (7) und (8) folgt nämlich: Verschiedene Potenzprodukte in a und b mit bzw. gleichen Dimensionen in a und b sind nichtarchimedisch verschieden. Daraus folgt dann die Behauptung, da es genügt, sich auf homogene Polynome zu beschränken [8]).

---

[6]) Vgl. die in Anm. [2]) zitierte Arbeit, in der die Frage nach ganzrationalen Rechenregeln in geordneten Schiefkörpern allgemein beantwortet wird.

[7]) Das Zeichen $\gg$ ($\ll$) ist für nichtarchimedisch größer (kleiner) gesetzt.

[8]) Siehe M. Dehn, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Annalen **85** (1922), S. 184—194, bes. S. 187.

b) Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen beweist man ferner: In einem geordneten Schiefkörper können zwei Elemente w, v, die den Bedingungen

$$2 > w > 1, \quad w - 1 = z, \quad \text{also} \quad 0 < z < 1, \quad \text{und} \quad zv \gg vz$$

genügen, keine Relation erfüllen von der Art, daß ein Potenzprodukt in w, v einem andern solchen Potenzprodukt von bzw. gleichen Dimensionen in w, v gleich ist.

§ 3. Spezialisierungen.

1. Die Untersuchungen von § 1 bieten die Möglichkeit, durch geeignete Spezialisierung der Variablen a, b im Exponenten von u und von u selbst eine große Menge von Schiefkörpern, und zwar auch anordbaren, zu konstruieren [9]).

Das einfachste Beispiel ist der *Schiefkörper von Hilbert.* Man setze u gleich einer rationalen Zahl $\neq 1$, etwa $u = 2$, also

$$u^a = u^{a^{-1}} = u^b = u^{b^{-1}} = 2\,,$$

und es bleibt der Schiefkörper, erzeugt durch zwei über den rationalen Zahlen transzendente Element a, b mit der erzeugenden Springregel $ba = 2ab$.

2. Setzt man $ba = uab$, u Unbestimmte, und $u^a = u$, $u^b = u$, so resultiert der geordnete Schiefkörper, erzeugt durch zwei Unbestimmte a, b über dem nichtarchimedisch geordneten Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten u als Zentrum. Die erzeugende Springregel ist $ba = uab$, wo u mit a und b vertauschbar ist.

3. α) Im folgenden betrachten wir noch den Fall,

$$u = a \quad {}^{10}). \tag{9}$$

Dabei ergibt sich ein geordneter Schiefkörper, der einen zum freien Ring $\mathfrak{F}$ aus zwei Erzeugenden isomorphen Teilring enthält. Es ist also die Einbettung von $\mathfrak{F}$ in einen geordneten Schiefkörper bereits auf einfachere Weise möglich als in § 1.

Der Ansatz (9) ist ein Spezialfall von

$$u = \mathfrak{P}(a) = r_0 + r_1 a + r_2 a^2 + \cdots \quad (r_i \text{ rational}),$$

den wir hier nicht behandeln wollen (siehe dazu § 4, Nr. 8) [11]).

Vermöge (9) hat man

$$u^{a^n} = a = u^{a^{-n}}, \quad n > 0,$$

und

$$u^b = a^2, \quad u^{b^n} = a^{2^n}, \quad u^{a^m b^n} = a^{2^n} \quad (n \geqq 0, \ m \text{ ganz}).$$

---

[9]) Z. B. indem man in geeigneter Weise zwischen den a, b, a^{-1}, b^{-1} im Exponenten von u solche Bedingungen festsetzt, daß die $u^{a^\nu b^\mu}$ sich auf endlich viele Elemente reduzieren. Freilich bedarf es zuweilen besonderer Untersuchungen, ob das durch Spezialisierung hervorgegangene System wirklich ein Schiefkörper ist, wie z. B. im folgenden für $u = a$, wo schon die Definition des allgemeinen Elementes abzuändern ist.

[10]) Der Fall $u = a^\nu$ ($\nu = 2, 3, \ldots$) liefert nichts wesentlich Neues. Für den Fall $u = a^{-2}$ siehe I. H. M. Wedderburn, Algebras which do not possess a finite basis, Trans. Amer. Math. Soc. **26**, S. 395—426, insbes. S. 425.

[11]) Der Gedanke, aus zwei Elementen a, b über den rationalen Zahlen einen Schiefring zu konstruieren mit der erzeugenden Springregel

$$ba = (r_1 a + r_2 a^2 + r_3 a^3 + \cdots)\, b,$$

wo die r_i feste rationale Zahlen sind und $r_1 > 0$, stammt von Herrn Köthe (briefliche Mitteilung vom 11. 2. 1934) — Herr Köthe vermutete die Einbettbarkeit des Schiefrings in einen anordbaren Schiefkörper mit Hilfe des Oreschen Regularitätskriteriums; dazu ist die Voraussetzung $r_1 > 0$ wesentlich (vgl. dazu § 4, Nr. 8, wo x und a an Stelle von a und b geschrieben ist. In entsprechender Weise wie dort erledigt sich der Fall, daß in der erzeugenden Springrelation eine beliebige mit a (dort x) beginnende Potenzreihe als Faktor auftritt).

Wir schreiben $a^{\frac{1}{2^n}}$ statt $u^{b^{-n}}$ (dies ist zunächst nur eine Bezeichnung) und haben dann

$$b^n a^m = a^{m 2^n} b^n \tag{10}$$

nach Formel (1) in § 1; diese Gleichung gilt auch für $n < 0$, denn man darf mit den Brüchen im Exponenten von a nach den Regeln der Bruchrechnung rechnen: setzt man

$$\left(u^{b^{-n}}\right)^m = a^{\frac{m}{2^n}},$$

so gilt

$$\left(u^{b^{-n}}\right)^m \left(u^{b^{-n}}\right)^{m_1} = \left(u^{b^{-n}}\right)^{m+m_1} = u^{(m+m_1)b^{-n}} = a^{\frac{m}{2^n}} \cdot a^{\frac{m_1}{2^n}} = a^{\frac{m+m_1}{2^n}},$$

$$\left(a^{\frac{m}{2^n}}\right)^k = a^{\frac{mk}{2^n}}.$$

Es ist also

$$u^{a^m b^n} = a^{2^n}$$

für je zwei ganze n, m. Daher ist nach (1) in § 1 auch Formel (10) richtig.

Die Elemente des Schiefkörpers sind

$$\sum_{m=M}^{\infty}\left(\sum_{n=N_m}^{\infty} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}}\right) b^m \equiv \sum_{n,m} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m \quad (r_{nm} \text{ rational, } i_m \text{ ganz} \geqq 0;\ N_m,\ M \text{ ganz} \lesseqgtr 0)$$

mit den Verknüpfungsvorschriften

$$\begin{aligned} &\sum r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m + \sum \varrho_{nm} a^{\frac{n}{2^{j_m}}} b^m \\ &= \sum r'_{nm} a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m + \sum \varrho'_{nm} a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m = \sum (r'_{nm} + \varrho'_{nm}) a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m, \end{aligned} \tag{11}$$

falls $h_m \geqq i_m, j_m$ (ist $h > i$, so kann man jede Laurent-Reihe von $a^{\frac{1}{2^i}}$ auch als Laurent-Reihe von $a^{\frac{1}{2^h}}$ schreiben), und

$$\sum_{n,m} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m \cdot \sum_{k,l} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^{j_l}}} b^l = \sum_{\substack{n,m\\k,l}} r_{nm}\varrho_{kl} a^{\frac{n}{2^{i_m}} + \frac{2^m k}{2^{j_l}}} b^{m+l} = \sum_{s,t} \bar{r}_{st} a^{\frac{s}{2^{h_t}}} b^t. \tag{12}$$

Die distributiven Gesetze sind evident, das assoziative Gesetz ist sofort zu verifizieren.

β) Nullteilerfreiheit und Inverse. Man definiere

$$S = \sum_{\substack{n=N_m,\dots\infty\\ m=M\ ,\dots\infty}} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m = 0, \text{ wenn alle } r_{nm} = 0.$$

Ist

$$S' = \sum_{\substack{k=N'_l,\dots\infty\\ l=M',\dots\infty}} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^{j_l}}} b^l,$$

so sei $S = S'$, falls $S - S' = 0$.

Ist $S \neq 0$ und $S' \neq 0$, so ist auch $SS' \neq 0$, $S'S \neq 0$. Denn in SS' kommt das Glied $a^{\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M \cdot N'_{M'}}{2^{j_{M'}}}} b^{M+M'}$ genau einmal vor, versehen mit dem Koeffizienten $r_{N_M M} \cdot \varrho_{N'_{M'} M'}$, in dem nach Voraussetzung beide Faktoren $\neq 0$ sind.

Das Element $r_{00} = 1$, $r_{ik} = 0$ sonst, ist die Haupteinheit. Um bei gegebenem $S \neq 0$ das Element S' aus der Gleichung $SS' = 1$ zu bestimmen, setze man S' mit unbekannten Koeffizienten ϱ_{kl} und unbekannten j_l an und nehme in der üblichen Weise Koeffizientenvergleich vor. Zunächst findet man $M' = -M$, also $l = -M, \ldots$. Die kleinste Potenz von $a^{\frac{1}{2^h}}$, die im Koeffizienten von b^0 vorkommt, muß a^0 sein, also ist

$$\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'}}{2^{j_{M'}}} = 0.$$

Man setze etwa $j_{M'} = M + i_M$, also $N'_{M'} = -N_M$. Dann ergibt sich rekursiv

$$r_{N_M\,M}\,\varrho_{N'_{M'}\,M'} = 1, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'}\,M'};$$

$$r_{N_M\,M}\,\varrho_{N'_{M'}+1\,M'} + r_{N_M+1\,M}\,\varrho_{N'_{M'}} = 0, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'}+1\,M'};$$

usw. Damit sind alle $\varrho_{kM'}$ für $k = N'_{M'}, \ldots$ bestimmt. Der Koeffizient des zu bestimmenden ϱ ist jedesmal $r_{N_M\,M} \neq 0$.

Zu b^1 hat man den Koeffizienten

$$\sum_{\substack{n=N_{M+1},\ldots\infty\\ k=N'_{M'},\ldots\infty}} r_{n\,M+1}\,\varrho_{kM'}\,a^{\frac{n}{2^{i_{M+1}}}+\frac{2^{M+1}k}{2^{j_{M'}}}} + \sum_{\substack{n'=N_M,\ldots\infty\\ k'=N'_{M'+1},\ldots\infty}} r_{n'M}\,\varrho_{k'\,M'+1}\,a^{\frac{n'}{2^{i_M}}+\frac{2^M k'}{2^{j_{M'+1}}}} = 0.$$

Man bestimme $j_{M'+1}$ und $N'_{M'+1}$ zunächst aus

$$\mu = \frac{N_{M+1}}{2^{i_{M+1}}} - \frac{2^{M+1}N_M}{2^{j_{M'}}} = \frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'+1}}{2^{j_{M'+1}}} \qquad (j_{M'} = M + i_M),$$

indem man etwa setzt $j_{M'+1} = M + \operatorname{Max}\{i_{M+1}, i_M\} = M + d_1$, woraus dann $N'_{M'+1}$ als ganze Zahl bestimmt ist. Es folgt jetzt

$$r_{N_{M+1}\,M+1}\,\varrho_{N'_{M'}\,M'} + r_{N_M\,M}\,\varrho_{N'_{M'+1}M'+1} = 0, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'+1}M'+1},$$

usw. Allgemein bestimmt sich $\varrho_{N'_{M'+1}+\lambda\,M'+1}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ aus einer linearen Gleichung, die durch Nullsetzen des Koeffizienten von $a^{\frac{\mu 2^{d_1}+\lambda}{2^{d_1}}}$ entsteht; an dieser Gleichung sind so viele Indizespaare n, k beteiligt, wie der Gleichung $\sigma n + \tau k = \mu 2^{d_1} + \lambda$ genügen, wo σ, τ feste Potenzen $\geqq 0$ von 2 sind, und so viele Indizespaare n', k', wie der Gleichung $\zeta n' + k' = \mu 2^{d_1} + \lambda$ genügen, wo ζ ebenfalls eine feste Potenz $\geqq 0$ von 2 ist. Das ϱ mit dem größten λ-Wert im ersten Index hat stets den Koeffizienten $r_{N_M\,M}$. So fahre man fort. Nullsetzen des Koeffizienten von b^ν $(\nu = 2, 3, \ldots)$ liefert $j_{M'+\nu}$ und $N'_{M'+\nu}$ aus

$$\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'+\nu}}{2^{j_{M'+\nu}}} = \operatorname{Min}\left\{\left(\frac{N_{M+\nu}}{2^{i_{M+\nu}}} + \frac{2^{M+\nu}N'_{M'}}{2^{j_{M'}}}\right), \ldots, \left(\frac{N_{M+1}}{2^{i_{M+1}}} + \frac{2^{M+1}N'_{M'+\nu-1}}{2^{j_{M'+\nu-1}}}\right)\right\}.$$

Ist also etwa $j_{M'+\nu} = M + \operatorname{Max}\{i_M, i_{M+1}, \ldots, i_{M+\nu}\} = M + d_\nu$, dann wird $N'_{M'+\nu}$ eine ganze Zahl. Aus dem sich jetzt durch Koeffizientenvergleich nach Potenzen von $a^{\frac{1}{2^{d_\nu}}}$ ergebenden Gleichungssystem bestimmen sich rekursiv für laufendes k die Koeffizienten $\varrho_{k\,M'+\nu}$. — In analoger Weise löst man die Gleichung $SS' = 1$ bei gegebenem $S' \neq 0$, unbekannt sind dann die r_{nm} und i_m.

Es existiert also mindestens eine Rechts- und eine Linksinverse; Eindeutigkeit und Gleichheit beider Inversen folgen dann wie früher.

γ) Wir behaupten:

In dem durch (9) *bestimmten Schiefkörper erzeugen die Elemente*

$$\xi = e^a \equiv 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots, \qquad \eta = b$$

einen zu $\mathfrak{F}$ *isomorphen Unterring.*

Man hat nämlich

$$P = \xi^{\alpha_1}\eta^{\beta_1} \ldots \xi^{\alpha_k}\eta^{\beta_k} = e^{\alpha_1 a + \alpha_2 a^{2^{\beta_1}} + \alpha_3 a^{2^{\beta_1+\beta_2}} + \cdots + \alpha_k a^{2^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}}}} \cdot b^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k},$$

$$\alpha_1 \geqq 0,\ \beta_k \geqq 0, \quad \text{sonst alle Exponenten} > 0.$$

Formal verschiedene P haben verschiedene Normalformen im Schiefkörper, denn aus

$$e^{\alpha_1 a + \alpha_2 a^{2^{\beta_1}} + \cdots + \alpha_k a^{2^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}}}} \cdot b^{\beta_1+\cdots+\beta_k} = e^{\alpha'_1 a + \alpha'_2 a^{2^{\beta'_1}} + \cdots + \alpha'_l a^{2^{\beta'_1+\cdots+\beta'_{l-1}}}} \cdot b^{\beta'_1+\cdots+\beta'_l}$$

folgt $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = \beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_l$. Die Gleichheit zweier Elemente im Schiefkörper ist eine Identität in b und a. Gilt aber identisch in a

$$e^{Q(a)} = e^{Q'(a)},$$

wo Q, Q' Polynome in a mit positiven Koeffizienten ohne konstantes Glied sind, so folgt

$$Q(a) \equiv Q'(a).$$

Denn wäre $Q(a) \not\equiv Q'(a)$, so sei die Bezeichnung so gewählt, daß $Q - Q' > 0$ für alle $a > \omega > 0$. Dann liefert die Gleichung

$$e^{Q-Q'} = 1$$

für $a \to \infty$ einen Widerspruch, also folgt $l = k$, $\alpha_i = \alpha'_i$, $\beta_i = \beta'_i$.

Es folgt weiter: Formal verschiedene Potenzprodukte P_i in ξ und η sind im Schiefkörper über den rationalen Zahlen linear unabhängig. Zunächst kann eine solche Abhängigkeit nur zwischen solchen P_i bestehen, die in η dieselbe Exponentensumme haben, dann bleibt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{Q_i(a)} = 0$$

identisch in a, wo die Q_i formal verschiedene Polynome in a ohne konstantes Glied sind. Unter diesen Polynomen gibt es genau ein „größtes", etwa Q_1, so daß für alle hinreichend großen positiven a

$$Q_1 - Q_k > 0 \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

ist. Die Gleichung

$$c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i\, e^{Q_i - Q_1} = 0$$

liefert für $a \to \infty$ dann $c_1 = 0$.

Um endlich zu zeigen, daß ξ, η einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring erzeugen, genügt es zu bemerken, daß die Normalform des Produktes zweier P_i gleich dem Produkt der Normalformen der beiden P_i ist.

δ) Anordnung. Sei

$$S = \sum_{\substack{n=N_m, \ldots \infty \\ m=M, \ldots \infty}} r_{nm}\, a^{\frac{n}{2^{im}}}\, b^m, \qquad r_{N_M\, M} \neq 0.$$

Dann setzen wir $S \gtrless 0$, je nachdem $r_{N_M\,M} \gtrless 0$, und $S \gtrless S'$, falls $S - S' \gtrless 0$.

Wir nennen $r_{N_M\,M} \cdot a^{\frac{N_M}{2^{i_M}}} \cdot b^M$ das *Hauptglied* von S. Dann gilt ersichtlich mit $S > 0$, $S' > 0$ auch $S + S' > 0$, wo etwa

$$S' = \sum_{\substack{k = N'_l, \dots \infty \\ l = M', \dots \infty}} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^{j_l}}} b^l, \qquad \varrho_{N'_{M'}\,M'} \neq 0.$$

Denn das Hauptglied der Summe hat einen Koeffizienten, der nicht kleiner ist als der Koeffizient im Hauptglied eines der beiden Summanden.

Ferner gilt: Aus $S > 0$, $S' > 0$ folgt $SS' > 0$ und $S'S > 0$. Denn SS' hat das Hauptglied

$$r_{N_M\,M}\, \varrho_{N'_{M'}\,M'}\, a^{\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{N'_{M'} 2^M}{2^{j_{M'}}}}\, b^{M+M'},$$

und dieser Ausdruck ist positiv, weil $r_{N_M\,M} > 0$, $\varrho_{N'_{M'}\,M'} > 0$. In dieser Anordnung ist insbesondere $b \ll a$, $ba = a^2 b \ll ab$,

$$\xi = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots, \qquad \text{also offenbar } 2 > \xi > 1.$$

Wir können daher den Satz aus § 2, Nr. **3** b) auf die Elemente $w = \xi$ und $v = b = \eta$ anwenden; man hat nämlich $w - 1 = z = a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$ und

$$zv = ab + \frac{a^2 b}{2!} + \frac{a^3 b}{3!} + \cdots$$

$$vz = ba + \frac{ba^2}{2!} + \frac{ba^3}{3!} + \cdots = a^2 b + \frac{a^4 b}{2!} + \frac{a^6 b}{3!} + \cdots,$$

also

$$zv \gg vz.$$

Aus unserem Satz folgt dann, daß zwei formal verschiedene Potenzprodukte gleicher Dimension in w, v bzw. ξ, η im Schiefkörper verschieden sind. Freilich liefert diese Größenbetrachtung darüber hinaus nicht noch eine Aussage über die lineare Unabhängigkeit der P, und erst recht nicht von solchen P, die nicht alle gleicher Dimension sind.

§ 4. Einbettung des Gruppenrings der metabelschen Gruppe in einen Schiefkörper mit endlich vielen Parametern.

1. Der Schiefkörper $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$, in den wir den Gruppenring der metabelschen Gruppe eingebettet haben, wurde durch unendlich viele Symbole, nämlich a, b und $v_{\nu\mu} = u^{a^\nu b^\mu}$ (ν, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) erzeugt. Wir zeigen jetzt, daß man $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ auch in einen anordbaren Schiefkörper einbetten kann, dessen Basiselemente aus einer *festen Anzahl von Unbestimmten* (nämlich drei) und deren Reziproken multiplikativ komponiert sind, falls man als Zentrum einen geeigneten Körper wählt. Man kann dann freilich nicht verlangen, daß wie bei Hilbert der Kommutator von zwei erzeugenden Unbestimmten ein Zentrumselement ist (bei Hilbert hat man $bab^{-1} a^{-1} = 2$).

2. Wir machen zunächst folgende heuristische Überlegung: Seien $g(x)$ und $h(x)$ zwei mit x beginnende Potenzreihen mit Koeffizienten aus einem beliebigen abstrakten

Körper. Sei

$$g(h(x)) = h(g(x)) \text{ identisch in } x.$$

Dann folgt

$$g_\nu(h_\mu(x)) = h_\mu(g_\nu(x)) \text{ identisch in } x,$$

wo rekursiv definiert ist

$$\begin{gathered} g = g_1, \quad h = h_1, \\ g_\nu(g_1(x)) = g_{\nu+1}(x), \quad h_\nu(h_1(x)) = h_{\nu+1}(x), \\ g_{-\nu}(g_{-1}(x)) = g_{-(\nu+1)}(x), \quad h_{-\nu}(h_{-1}(x)) = h_{-(\nu+1)}(x) \end{gathered}$$

und

$$\begin{gathered} g_1(g_{-1}(x)) = x = g_{-1}(g_1(x)) = g_0(x), \\ h_1(h_{-1}(x)) = x = h_{-1}(h_1(x)) = h_0(x). \end{gathered}$$

Dabei sind $g_\nu(x)$, $h_\mu(x)$ wieder Potenzreihen in x, die mit x beginnen; ebenso beginnen die sämtlichen Iterierten $g_\nu(h_\mu(x))$ mit x.

Wir setzen im Anschluß an § 1

$$(13)\quad \begin{cases} u = 1 + x, \quad u^a = 1 + g(x), \quad u^b = 1 + h(x), \\ u^{a^\nu b^\mu} = 1 + g_\nu(h_\mu(x)) \qquad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ u^\varphi = \prod\limits_{\substack{i=n,\ n+1, \dots, N \\ j=m,\ m+1, \dots, M}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}}, \end{cases}$$

wo

$$\varphi = \sum_{\substack{i=n, \dots, N \\ j=m, \dots, M}} \gamma_{ij} a^i b^j \qquad (\gamma_{ij} \text{ ganz, } n, N, m, M \text{ ganz} \gtreqless 0).$$

Wir lassen also jedem Element der metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$, geschrieben mit Hilfe der symbolischen Potenzen, d. h. $u^\varphi a^\alpha b^\beta$, eindeutig einen Ausdruck $F(x)\, a^\alpha b^\beta$ entsprechen, wo $F(x)$ eine Potenzreihe in x ist, beginnend mit x^0. Jedem Element des Rings $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ lassen wir die Summe der Ausdrücke $F(x)\, a^\alpha b^\beta$, versehen mit rationalen Koeffizienten, entsprechen, das ist ein Ausdruck $\Sigma \Psi_{ik}(x)\, a^i b^k$, summiert über endlich viele i, k; dabei ist Ψ_{ik} eine Potenzreihe in x, versehen mit Koeffizienten aus dem Körper der Koeffizienten von g und h. Wir versuchen jetzt, mit x, a, b als erzeugenden Unbestimmten einen Schiefring über einem geeigneten Zentrum so zu konstruieren, daß er einen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ isomorphen Teilring enthält und sich in einen geordneten Schiefkörper einbetten läßt.

3. Wir betrachten jetzt als *allgemeines Ringelement* den Ausdruck

$$(14)\qquad \sum_{l=L}^{\infty} \left[\sum_{k=M_l}^{\infty} \left(\sum_{i=N_{kl}}^{\infty} r_{ikl}\, x^i \right) a^k \right] b^l \qquad (L, M_l, N_{kl} \gtreqless 0, \text{ ganz}).$$

r_{ikl} sei Zentrumselement. Wir schreiben für diese dreifache Summe im folgenden kurz

$$\sum_{i,k,l} r_{ikl}\, x^i a^k b^l.$$

Die Rechenregeln sind in diesem Ring geeignet zu definieren (siehe Nr. 4). Wir bezeichnen den Ring mit $\mathfrak{S}^*$. Er enthält offenbar dann einen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ isomorphen Teilring, wenn die oben eingeführten Ausdrücke $F(x)\, a^\alpha b^\beta$, die den Elementen von $\mathfrak{M}$ zugeordnet sind, in $\mathfrak{S}^*$ über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Setzt man in $\mathfrak{S}^*$ ein Element dann gleich 0, wenn alle $r_{ikl} = 0$, so ist für die lineare Unabhängigkeit notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $1 + g_\nu(h_\mu(x))$ (ν, μ ganz) zu je endlich vielen über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig sind oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß die $g_\nu(h_\mu(x))$ zu je endlich vielen algebraisch unabhängig sind. Es ist nicht gelungen, dieser Forderung durch geeignete Wahl von zwei Potenzreihen g, h mit rationalen Koeffizienten zu genügen.

Wir wählen als Rationalitätsbereich den Körper der rationalen Funktionen zweier Unbestimmten y, z und setzen

$$(15)\qquad \begin{cases} g(x) = \sin(z \arcsin x) = zx + \cdots, \\ h(x) = \sin(y \arcsin x) = yx + \cdots, \end{cases}$$

wo die Funktionszeichen abkürzend für die Reihenentwicklungen gesetzt sind. Die Koeffizienten in g bzw. h sind rationale Funktionen von z bzw. y.

Man findet

$$(16)\qquad g_\nu(h_\mu(x)) = \sin(z^\nu y^\mu \arcsin x) = h_\mu(g_\nu(x)) = H_{\nu\mu} \qquad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Diese Funktionen sind in der Tat über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig, das heißt: ein Polynom in endlich vielen $H_{\nu\mu}$ mit rationalen Koeffizienten kann nicht identisch in x, y, z verschwinden. Sei ähnlich das Polynom

$$(17)\qquad P(\sin(z^\nu y^\mu \arcsin x)) = 0.$$

Die linke Seite ist eine Potenzreihe in x; x sei eine komplexe Variable und ferner

$$(18)\qquad x = \sin i\tau$$

gesetzt, wo τ ein so kleines reelles Intervall $0 \leqq \tau \leqq t$ durchlaufe, daß beständig $|\sin i\tau| < 1$ ist. Durch die Substitution (18) geht dann die linke Seite von (17) in eine Potenzreihe in τ über, die für alle Werte des obigen Intervalls verschwindet, nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie also identisch verschwindet. Man hat daher identisch in τ

$$P(\sin z^\nu y^\mu i\tau) = 0$$

oder

$$P\left(\frac{e^{-z^\nu y^\mu \tau} - e^{z^\nu y^\mu \tau}}{2i}\right) = 0.$$

Daraus folgt aber identisch in τ

$$Q(e^{z^\nu y^\mu \tau} - e^{-z^\nu y^\mu \tau}) = 0,$$

wo Q ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist, oder ausgerechnet

$$Q(e^{z^\nu y^\mu \tau}) + Q_1 = \sum_{l=1}^{n} c_l e^{\chi_l \tau} + Q_1 = 0,$$

wo $\lim\limits_{\tau \to \infty} \frac{Q_1}{Q} = 0$ ist und χ_l lauter formal verschiedene Polynome in z, z^{-1}, y, y^{-1} mit ganzen Koeffizienten sind und nicht alle c_l verschwinden, falls nicht in Q alle Koeffizienten Null sind. Jetzt trage man für z und y algebraisch unabhängige transzendente Zahlen ein, dann nehmen die χ_l lauter verschiedene numerische Werte an, woraus man nach Division mit Q durch den Grenzübergang $\tau \to \infty$ schließt, daß alle c_l verschwinden müssen.

4. Wir verstehen jetzt unter den r_{ikl} in (14) aus Nr. **3** rationale Funktionen der kommutativen Unbestimmten y, z und definieren in $\mathfrak{S}^*$ folgende *Rechenoperationen*: Ist

$$U = \sum_{i,k,l} r_{ikl} x^i a^k b^l, \quad V = \sum_{j,n,m} \varrho_{jnm} x^j a^n b^m,$$

so sei

$$(19)\qquad U + V = \sum_{i,k,l} (r_{ikl} + \varrho_{ikl}) x^i a^k b^l$$

(die Indizes an den Koeffizienten r, ϱ laufen von einer ganzen Zahl $\gtreqless 0$ bis ∞) und

$$(20)\qquad UV = \sum_{\substack{i,k,l \\ j,n,m}} r_{ikl} \varrho_{jnm} x^i (h_l(g_k(x)))^j \prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{e_{ls} e_n} a^{k+n} b^{l+m},$$

$$s = \frac{\varepsilon_n - 1}{2}, \frac{\varepsilon_n - 1}{2} + \varepsilon_n, \ldots, \frac{(2|n| - 1)\varepsilon_n - 1}{2}, \quad n = \varepsilon_n |n| \text{ [12]}$$
$$t = \frac{\varepsilon_l - 1}{2}, \frac{\varepsilon_l - 1}{2} + \varepsilon_l, \ldots, \frac{(2|l| - 1)\varepsilon_l - 1}{2}, \quad l = \varepsilon_l |l|.$$

Die distributiven Gesetze sind dann evident. Das assoziative Gesetz der Multiplikation folgt daraus, daß die Basiselemente $x^i a^k b^l$ sich assoziativ multiplizieren: Die Relation

$$[(x^i a^k b^l)(x^j a^n b^m)](x^\mu a^\nu b^\lambda) = (x^i a^k b^l)[(x^j a^n b^m)(x^\mu a^\nu b^\lambda)]$$

führt auf

$$\begin{aligned} x^i(h_l(g_k(x)))^j \prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} (h_{l+m}(g_{k+n}(x)))^\mu \prod_{\sigma,\tau} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{\varepsilon_{l+m}\varepsilon_\nu} \\ = x^i(h_l(g_k(x)))^j \prod_{\sigma,\beta} (1 + g_{n+k+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_\nu} (h_m(g_n(h_l(g_k(x)))))^\mu \prod_{\gamma,t} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_{\nu+n}}, \end{aligned} \tag{21}$$

wo s, t wie oben variieren und

$$\sigma = \frac{\varepsilon_\nu - 1}{2}, \frac{\varepsilon_\nu - 1}{2} + \varepsilon_\nu, \ldots, \frac{(2|\nu| - 1)\varepsilon_\nu - 1}{2},$$
$$\tau = \frac{\varepsilon_{l+m} - 1}{2}, \frac{\varepsilon_{l+m} - 1}{2} + \varepsilon_{l+m}, \ldots, \frac{(2|m+l| - 1)\varepsilon_{m+l} - 1}{2},$$
$$\beta = \frac{\varepsilon_m - 1}{2}, \frac{\varepsilon_m - 1}{2} + \varepsilon_m, \ldots, \frac{(2|m| - 1)\varepsilon_m - 1}{2},$$
$$\gamma = \frac{\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2}, \frac{\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2} + \varepsilon_{n+\nu}, \ldots, \frac{(2|n+\nu| - 1)\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2},$$
$$\nu = \varepsilon_\nu |\nu|, \; m + l = \varepsilon_{m+l}|m + l|, \; m = \varepsilon_m |m|, \; n + \nu = \varepsilon_{n+\nu}|n + \nu|.$$

Zur Herleitung der rechten Seite von (21) beachte man, daß aus (20) folgt

$$b^l \Phi(x) = \Phi(h_l(x)) b^l, \quad a^k \Phi(x) = \Phi(g_k(x)) a^k,$$
$$b^l a^n = \prod_{s,t} (1 + g_s(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} a^n b^l,$$

wo k, l, n ganz sind und $\Phi(x)$ eine Laurent-Reihe mit endlich vielen negativen Potenzen bedeutet.

Nun ist aber

$$h_m(g_n(h_l(g_k(x)))) = h_{m+l}(g_{n+k}(x)),$$

also hat man nach Entfernung gleicher Faktoren in (21) zu beweisen

$$\begin{aligned} \prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} \prod_{\sigma,\tau} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{\varepsilon_{l+m}\varepsilon_\nu} \\ = \prod_{\sigma,\beta} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_\nu} \prod_{\gamma,t} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{\varepsilon_{n+\nu}\varepsilon_l}. \end{aligned} \tag{22}$$

Zum Beweis von (22) hat man verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die ε gleich $+1$ oder gleich -1 sind. Es genügt, einige Fälle durchzuführen, die übrigen erledigen sich entsprechend.

a) $l, m, n, k, \nu > 0$.

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1 \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))$$
$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \beta=0,1,\ldots,m-1}} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x))) \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n+\nu-1 \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))$$

[12]) Ist also $n > 0$, so ist $s = 0, 1, \ldots, n-1$; ist $n < 0$, so ist $s = -1, -2, \ldots, -|n|$. Für $n = 0$ $(l = 0)$ setze man in (20) $\varepsilon_n = 0$ $(\varepsilon_l = 0)$.

oder

$$\prod_{\substack{\gamma=n,\ldots,n+\nu-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x))) = \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x))).$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=l,l+1,\ldots,l+m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau'=0,1,\ldots,m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\tau'}(x))) \prod_{\substack{\sigma'=n,\ldots,n+\nu-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\sigma'}(h_t(x))).$$

b) $k, l, n, m > 0,\ \nu < 0,\ \nu = -\nu',\ \nu' > 0.$

1. Fall: $n - \nu' < 0.$

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(\nu'-n)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}$$

oder, wenn man den zweiten Faktor links gemäß

$$\tau = 0, 1, \ldots, l-1; \qquad \tau = l, l+1, \ldots, l+m-1$$

zerlegt,

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} = \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(\nu'-n)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}.$$

Hier ist der zweite Faktor links gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-n\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=-(n+1),\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{s=n-1,n-2,\ldots,0\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_\tau(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(\nu'-n)\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_\tau(x)))^{-1};$$

damit ist man fertig.

2. Fall: $n - \nu' > 0.$

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n-\nu'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))$$

oder

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} = \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n-\nu'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))$$

oder

$$\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-\nu'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} \prod_{\substack{s=n-\nu',n-\nu'+1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1+g_{k+s}(h_t(x))) = 1,$$

und das ist richtig.

c) $k, l, \nu > 0,\ n, m < 0,\ n = -n',\ n' > 0,\ m = -m',\ m' > 0.$

1. Fall: $l - m' > 0$ und $\nu - n' > 0$.

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,\nu-n'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))\,.$$

Nun ist

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,n'-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=n',n'+1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=l-m',\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}.$$

Trägt man dies links ein, so hebt sich links das erste gegen das zweite Glied, das dritte Glied links gegen das zweite Glied rechts, das vierte Glied links gegen das erste Glied rechts.

2. Fall: $l - m' > 0$ und $\nu - n' < 0$.

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-\nu)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}\,.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-(n'-\nu)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{s=-(n'-\nu)-1,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=l-m',l-m'+1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}.$$

Jetzt hebt sich das erste Glied links gegen das zweite Glied rechts, das zweite Glied links gegen das dritte Glied links, das vierte Glied links gegen das erste Glied rechts.

3. Fall: $l - m' < 0$ und $\nu - n' < 0$.

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-\nu)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=-1,-2,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-(n'-\nu)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{s=-(n'-\nu)-1,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=l-1,\ldots,l-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))\,.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=l-1,\ldots,l-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\beta(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-\nu)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}\,.$$

Es hebt sich das zweite Glied links gegen das erste rechts, das zweite Glied rechts gegen das vierte rechts, das erste Glied links gegen das dritte rechts.

4. Fall: $l - m' < 0$ und $\nu - n' > 0$.

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \tau=-1,-2,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$
$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,\nu-n'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x))).$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{s=-1,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,\ldots,\nu-1\\ \tau=l-1,\ldots,0,-1,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$
$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,n'-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=n',\ldots,\nu-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))).$$

Es hebt sich das erste Glied links gegen das dritte Glied links, das zweite Glied links gegen das erste rechts, das vierte Glied links gegen das zweite rechts.

5. Die Elemente $U, V, \ldots$ bilden also einen Ring. *Dieser Ring enthält einen zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ isomorphen Unterring.* Ordnen wir nämlich dem Element

$$M = \sum_{\nu,n,m} \varrho_{\nu nm} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \qquad (\varrho_{\nu nm} \text{ rational})$$

aus $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ das Element

$$U = \sum_{\nu,n,m} \varrho_{\nu nm} \prod_{\substack{i=k_\nu, k_\nu+1,\ldots,K_\nu\\ j=l_\nu, l_\nu+1,\ldots,L_\nu}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}^{(\nu)}} a^n b^m$$

zu, wo

$$\varphi_\nu = \sum_{\substack{i=k_\nu,\ldots,K_\nu\\ j=l_\nu,\ldots,L_\nu}} \gamma_{ij}^{(\nu)} a^i b^j$$

gesetzt ist mit ganzen $\gamma_{ij}^{(\nu)}$, so ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Zunächst ist dann evident, daß der Summe $M + M'$ die Summe $U + U'$ zugeordnet ist. Ferner hat man

$$MM' = \sum \varrho_{rnm} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \sum \varrho'_{\mu st} u^{\psi_\mu} a^s b^t$$
$$= \sum_{\substack{\nu,n,m\\ \mu,s,t}} \varrho_{rnm} \varrho'_{\mu st} u^{\varphi_\nu + a^n \left(b^m \psi_\mu + \varepsilon_s \varepsilon_m a^{\frac{\varepsilon_s-1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_m-1}{2}} p_s q_m\right)} a^{n+s} b^{m+t},$$
$$\psi_\mu = \sum_{\substack{\sigma=k'_\mu,\ldots,K'_\mu\\ \tau=l'_\mu,\ldots,L'_\mu}} \delta_{\sigma\tau}^{(\mu)} a^\sigma b^\tau \qquad (\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)} \text{ ganz}).$$

Ist

$$U' = \sum \varrho'_{\mu st} \prod_{\sigma,\tau} (1 + g_\sigma(h_\tau(x)))^{\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)}} a^s b^t,$$

so ist UU' nach (20) das Element

$$\sum_{\substack{\nu,n,m\\ \mu,s,t}} \varrho_{rnm} \varrho'_{\mu st} \Psi(x) a^{n+s} b^{m+t},$$

wo gesetzt ist

$$\Psi(x) = \prod_{\substack{i=k_\nu,\ldots,K_\nu\\ j=l_\nu,\ldots,L_\nu}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}^{(\nu)}} \prod_{\substack{\sigma=k'_\mu,\ldots,K'_\mu\\ \tau=l'_\mu,\ldots,L'_\mu}} (1 + g_{n+\sigma}(h_{\tau+m}(x)))^{\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)}} \prod_{\alpha,\beta} (1 + g_{\alpha+n}(h_\beta(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_s}$$

$$\left(\alpha = \frac{\varepsilon_s - 1}{2}, \frac{\varepsilon_s - 1}{2} + \varepsilon_s, \ldots, \frac{(2|s| - 1)\varepsilon_s - 1}{2};\ \beta = \frac{\varepsilon_m - 1}{2}, \frac{\varepsilon_m - 1}{2} + \varepsilon_m, \ldots, \frac{(2|m| - 1)\varepsilon_m - 1}{2}\right).$$

Dieses Element ist gerade dem Produkt MM' zugeordnet, denn $\Psi(x)$ ist

$$u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + \varepsilon_s \varepsilon_m a^{n + \frac{\varepsilon_s - 1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_m - 1}{2}} p_s q_m}$$

zugeordnet.

6. *Der Ring* $\mathfrak{S}^*$ *ist nullteilerfrei.* U, V seien die in Nr. 4 angeschriebenen Elemente aus $\mathfrak{S}^*$, UV ihr Produkt nach (20). Wir setzen ein Element U aus $\mathfrak{S}^*$ gleich Null, wenn alle $r_{ikl} = 0$, und $U = V$, wenn $U - V = 0$.

Es ist dann $UV \neq 0$, wenn $U \neq 0$ und $V \neq 0$. Es ist nämlich das Hauptglied von UV — d. h. das Glied mit der kleinsten Potenz von b, das die kleinste Potenz von a, versehen mit der kleinsten Potenz von x, zum Koeffizienten hat — wegen (20)

$$r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'} L'}\, M'_{L'}\, L'} \cdot z^{M_L \cdot N'_{M'_{L'} L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'} L'}} \cdot x^{N_{M_L L} + N'_{M'_{L'} L'}} \cdot a^{M_L + M'_{L'}} \cdot b^{L + L'} .$$

Nach Voraussetzung ist $r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \neq 0$ und $\varrho_{N'_{M'_{L'} L'}\, M'_{L'}\, L'} \neq 0$, also auch

$$r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'} L'}\, M'_{L'}\, L'} \cdot z^{M_L \cdot N'_{M'_{L'} L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'} L'}} \neq 0$$

(in U laufen i, k, l bzw. von N_{kl}, M_l, L bis ∞; in V laufen j, n, m bzw. von N'_{nm}, M'_m, L' bis ∞).

7. *Der Schiefring* $\mathfrak{S}^*$ *ist ein Schiefkörper.* Das Einselement des Rings ist charakterisiert durch $r_{000} = 1$, $r_{ikl} = 0$ sonst (1 ist hierbei die Haupteinheit im Körper der rationalen Funktionen von y und z).

Um die Gleichung

$$UV = 1$$

bei gegebenem U nach V aufzulösen, bedienen wir uns wieder der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Nach (20) aus 4 hat man

$$\sum r_{ikl}\, \varrho_{jnm}\, x^i \left(h_l(g_k(x))\right)^j \prod_{s,t} \left(1 + g_{k+s}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_l \varepsilon_n} a^{k+n} b^{l+m} = 1,$$

$i = N_{kl}, \ldots \infty$; $k = M_l, \ldots \infty$; $l = L, \ldots \infty$; $j = N'_{nm}, \ldots \infty$; $n = M'_l, \ldots \infty$; $m = L', \ldots \infty$. Gesucht sind die ϱ_{jnm}, die r_{ikl} gegeben. Zunächst erkennt man $L' = -L$, also $m = -L, \ldots \infty$, $M'_{L'} = -M_L$; der Koeffizient von $a^0 b^0$ ist eine Laurent-Reihe in x, die genau mit x^0 beginnen muß, also $N'_{M'_{L'} L'} = -N_{M_L L}$ und

$$z^{-M_L \cdot N_{M_L L}} \cdot y^{-L \cdot N_{M_L L}} \cdot r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'} L'}\, M'_{L'}\, L'} = 1 \qquad (r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \neq 0).$$

Die Koeffizienten ϱ mit demselben zweiten und dritten Index, aber größerem ersten Index ergeben sich sukzessive durch Nullsetzen der Koeffizienten der höheren Potenzen von x; $\varrho_{N'_{M'_{L'} L'} + \lambda\; M'_{L'}\, L'}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$ bestimmt sich linear, und zwar versehen mit dem Koeffizienten

$$z^{(N'_{M'_{L'} L'} + \lambda)\, M_L} \cdot y^{(N'_{M'_{L'} L'} + \lambda)\, L} \cdot r_{N_{M_L L}},$$

aus den ϱ mit kleinerem ersten Index und den bekannten r_{ikl}. Der Faktor $\prod\limits_{s,t}$ ist nämlich eine Potenzreihe in x, die mit dem absoluten Glied 1 beginnt.

Der Koeffizient von $a^1 b^0$ ist

$$\sum_{\substack{i = N_{M_L + 1\, L}, \ldots \infty \\ j = N'_{M'_{L'} L'}, \ldots \infty}} r_{i\, M_L + 1\, L} \cdot \varrho_{j\, M'_{L'}\, L'} \cdot x^i \left(h_L(g_{M_L+1}(x))\right)^j \prod_{s,t} \left(1 + g_{M_L + 1 + s}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_L \varepsilon_{M'_{L'}}}$$

$$+ \sum_{\substack{i = N_{M_L L}, \ldots \infty \\ j = N'_{M'_{L'} + 1\, L'}, \ldots \infty}} r_{i\, M_L\, L} \cdot \varrho_{j\, M'_{L'} + 1\, L'} \cdot x^i \left(h_L(g_{M_L}(x))\right)^j \prod_{s',t} \left(1 + g_{M_L + s'}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_L \varepsilon_{M'_{L'} + 1}} = 0$$

(s, t, s hängen von i und j nicht ab), also ist $N'_{M'_{L'}+1\,L'} = N_{M_L+1\,L} - 2N_{M_L L}$ und

$$r_{N_{M_L+1\,L}\,M_L+1\,L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\,M'_{L'}\,L'} \cdot z^{(M_L+1)N'_{M'_{L'}L'}} \cdot y^{L\cdot N'_{M'_{L'}L'}}$$

$$+ r_{N_{M_L L}\,M_L\,L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}+1}\,M'_{L'}+1\,L'} \cdot z^{M_L\cdot N'_{M'_{L'}+1\,L'}} \cdot y^{L\cdot N'_{M'_{L'}+1\,L'}} = 0 \text{ usw.}$$

Dies liefert rekursiv die $\varrho_{i\,M'_{L'}+1\,L'}$ für $i = N'_{M'_{L'}+1\,L'}, \ldots \infty$. In entsprechender Weise bestimmt man die ϱ mit dem dritten Index $-L$, höherem zweiten Index und laufendem ersten Index.

Setzt man dann den Koeffizienten von b^1, darauf den Koeffizienten von b^2 usw. gleich Null und wiederholt jedesmal das Verfahren, so bestimmen sich sukzessive die ϱ mit dem dritten Index $-L+1$, $-L+2$ usw.

In entsprechender Weise löst man die Gleichung $UV = 1$ bei gegebenem V nach U auf.

8. Im Schiefkörper $\mathfrak{S}^*$ erzeugen die Unbestimmten a, b, a^{-1}, b^{-1} einen zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ isomorphen Ring. Also erzeugen a, b in $\mathfrak{S}^*$ einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring. Indessen besitzt $\mathfrak{S}^*$ auch noch einfachere zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Teilringe.

Wir betrachten den *Unterring* in $\mathfrak{S}^*$, gebildet aus allen Elementen

$$T = \sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty\\ k=M,\ldots\infty}} r_{ik}x^i a^k, \qquad r_{ik} \text{ rationale Funktion von } z;\ N_k,\ M \gtreqless 0, \text{ ganz}.$$

Die Elemente T bilden sogar einen Unterschiefkörper von $\mathfrak{S}^*$, wie man leicht einsieht. — Man hat mit $g(x) = \sin(z \arcsin x)$ aus (20)

$$\sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty\\ k=M,\ldots\infty}} r_{ik}x^i a^k \cdot \sum_{\substack{n=N'_m,\ldots\infty\\ m=M',\ldots\infty}} \varrho_{nm}x^n a^m = \sum_{\substack{i,k\\ n,m}} r_{ik}\varrho_{nm}(\sin(z^k \arcsin x))^n x^i a^{k+m} = \sum_{s,t} r'_{st}x^s a^t.$$

Wir behaupten: x und a erzeugen einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring. In der Tat: In $\mathfrak{S}^*$ ist

$$P = a^{\alpha_1}x^{\beta_1}a^{\alpha_1}x^{\beta_1}\cdots a^{\alpha_k}x^{\beta_k}$$
$$= (\sin(z^{\alpha_1}\arcsin x))^{\beta_1}(\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2}\arcsin x))^{\beta_2}\cdots(\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\arcsin x))^{\beta_k}a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$$
$$\alpha_1 \geqq 0,\ \beta_k \geqq 0; \quad \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0 \text{ sonst.}$$

In $\mathfrak{S}^*$ haben formal verschiedene P verschiedene Normalformen, denn aus

$$(\sin(z^{\alpha'_1}\arcsin x))^{\beta'_1}\cdots(\sin(z^{\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_l}\arcsin x))^{\beta'_l}a^{\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_l}$$
$$= (\sin(z^{\alpha_1}\arcsin x))^{\beta_1}\cdots(\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\arcsin x))^{\beta_k}a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$$

folgt $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, und weiter, da die Funktionen $\sin(z^\nu \arcsin x)$ über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig sind, sukzessive

$$\beta'_l = \beta_k,\quad \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_{l-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1},\quad \beta'_{l-1} = \beta_{k-1}, \ldots$$

also

$$l = k, \quad \alpha_i = \alpha'_i, \quad \beta_i = \beta'_i.$$

Ferner sind in $\mathfrak{S}^*$ je endlich viele formal verschiedene P über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig nach demselben Schluß wie soeben. — Endlich erkennt man sofort, daß die Zuordnung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varrho_\nu P_\nu \rightarrow \sum_{\nu=1}^{n}\varrho_\nu(\sin(z^{\alpha_1^{(\nu)}}\arcsin x))^{\beta_1^{(\nu)}}\cdots(\sin(z^{\alpha_1^{(\nu)}+\cdots+\alpha_k^{(\nu)}}\arcsin x))^{\beta_{k_\nu}^{(\nu)}}a^{\alpha_1^{(\nu)}+\cdots+\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}}$$
$$\left(P_\nu = a^{\alpha_1^{(\nu)}}x^{\beta_1^{(\nu)}}\cdots a^{\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}}x^{\beta_{k_\nu}^{(\nu)}},\quad \varrho_\nu \text{ rational}\right)$$

ein Isomorphismus ist wegen der in $\mathfrak{S}^*$ gültigen Multiplikationsvorschrift.

§ 5. Anordnung im Schiefkörper $\mathfrak{S}^*$.

1. Wir ordnen zunächst die rationalen Funktionen von z, y in der bekannten Weise. Für die Polynome in z, y mit rationalen Koeffizienten setzen wir fest: $R \gtrless 0$, je nachdem die kleinste vorkommende Potenz in y als Faktor ein Polynom in z hat, dessen kleinste vorkommende Potenz von z einen Koeffizienten $\gtrless 0$ hat. Es sei $R \gtrless R'$, falls $R - R' \gtrless 0$. Diese Festsetzung ist eindeutig, transitiv und genügt den Monotoniegesetzen der Addition und Multiplikation.

Die rationalen Funktionen ordnen wir dann so, daß

$$\frac{R}{R'} \gtrless 0, \quad \text{falls} \quad RR' \gtrless 0$$

und

$$\frac{R_1}{R_1'} \gtrless \frac{R_2}{R_2'}, \quad \text{falls} \quad \frac{R_1}{R_1'} - \frac{R_2}{R_2'} \gtrless 0.$$

Man beweist dann leicht, daß diese Festsetzungen eine eindeutige, transitive und den Monotoniegesetzen genügende Anordnung liefern.

2. Jetzt kann man die Elemente von $\mathfrak{S}^*$ in der folgenden Weise ordnen: Es sei

$$U = \sum_{i,k,l} r_{ikl} x^i a^k b^l \gtrless 0,$$

je nachdem im Hauptglied (s. S. 221) $r_{N_{M_L L} M_L L}\, x^{N_{M_L L}} a^{M_L} b^L$ der Koeffizient $r_{N_{M_L L} M_L L} \gtrless 0$ ist; r_{ikl} ist eine rationale Funktion von z, y. Nun sei $U \gtrless V$, je nachdem $U - V \gtrless 0$. Diese Festsetzung liefert eine eindeutige und transitive Anordnung, weil die Anordnung der r_{ikl} diese Eigenschaften hat. Daß ferner aus $U > 0$, $V > 0$ auch $U + V > 0$ folgt, ist evident, denn der Koeffizient im Hauptglied der Summe ist nicht kleiner als der Koeffizient in den Hauptgliedern der Summanden. Aus $U > 0$, $V > 0$ folgt auch $UV > 0$, $VU > 0$, denn der Koeffizient des Hauptgliedes des Produktes ist nach § 4, Nr. 6, abgesehen von einer Potenz von z und y, gleich dem Produkt der Koeffizienten in den Hauptgliedern der Faktoren.

Eingegangen 13. August 1936.