Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1937
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0176
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0176

LOG Id: LOG_0028
LOG Titel: Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre.

Von *Hermann Schmidt* in Jena.

Die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung der Form $y'' + Q(z)y = 0$ ($Q(z)$ Polynom) sind durch Herrn R. Nevanlinna [1]) systematisch vom Standpunkt der Theorie der gebrochenen Funktionen aus untersucht worden; hierbei ergeben sich naturgemäß mancherlei Beziehungen zu speziellen Funktionen, die von der Differentialgleichung her schon früher eingehend behandelt worden sind [2]). In den folgenden Zeilen soll nun auf einige solche Beziehungen aufmerksam gemacht werden, die anscheinend bisher nicht bemerkt wurden. Dies dürfte an sich von Interesse sein, überdies gestattet die Herübernahme bekannter Ergebnisse auch für die Behandlung im Sinne der neueren Theorie mitunter merkliche Abkürzungen der Rechnung.

1. Die Differentialgleichung $y'' - q^2 z^{q-2} y = 0$ [3]) (q ganz, $\geqq 2$) geht vermöge $u = z^{-\frac{1}{2}} y$; $x = 2i\, z^{\frac{q}{2}}$ in die Besselsche Gleichung

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \alpha^2)\, u = 0$$

vom Parameter $\alpha = \frac{1}{q}$ über. Für die von Herrn Nevanlinna eingeführten ganzen Funktionen [4]) $A(z)$, $B(z)$ ergibt sich daraus unmittelbar

$$A(z) = e^{-\frac{\pi i}{2q}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{q}}\left(2iz^{\frac{q}{2}}\right) = z + \cdots,$$

$$B(z) = e^{\frac{\pi i}{2q}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right) z^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{q}}\left(2iz^{\frac{q}{2}}\right) = 1 + \cdots,$$

wenn $J_\alpha(x)$ die Besselsche Funktion 1. Art vom Parameter α bedeutet. Die asymptotischen Eigenschaften von $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ ergeben sich dann besonders bequem aus den bekannten asymptotischen Entwicklungen der Besselfunktionen.

2. Herr H. Wagner [5]) integriert die Differentialgleichung

$$g''(z) - (z^{2n-2} + c z^{n-2}) g(z) = 0 \qquad (n \geqq 2 \text{ ganz}, c \text{ beliebig}) \tag{1}$$

---

[1]) R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta Math. **58** (1932), S. 295—373, insbes. § 9.

[2]) Beispiel: Die Funktionen des parabolischen Zylinders; vgl. a. a. O. [1]), S. 361ff.

[3]) R. Nevanlinna, Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen, Acta Math. **55** (1930), S. 259—276, Gleichung (13).

[4]) A. a. O. [3]), Gleichung (12).

[5]) H. Wagner, Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten, dieses Journal **175** (1936), S. 6—49.

und die daraus vermöge $x = \frac{2}{n} z^n$, $h(x) = g(z)$ hervorgehende Differentialgleichung

$$xh''(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)h'(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{c}{2n}\right)h(x) = 0 \tag{2}$$

vermittels Laplacescher Transformation.

Vermöge $h = e^{-\frac{x}{2}} y$ geht nun (2) über in die Kummersche Differentialgleichung

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0 \text{ [6]} \tag{3}$$

mit den Parametern

$$\beta = \frac{n - 1 + c}{2n}, \quad \gamma = \frac{n-1}{n}.$$

Das kanonische Fundamentalsystem am Nullpunkt ist

$$\begin{aligned} \mathring{y}_1 &= {}_1F_1(\beta, \gamma, x) = 1 + \cdots, \\ \mathring{y}_2 &= x^{1-\gamma} {}_1F_1(\beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} (z + \cdots), \end{aligned} \tag{4}$$

wenn wir, wie üblich, mit

$$_1F_1(\beta, \gamma, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta, \nu)}{(\gamma, \nu)} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

die Kummersche Reihe bezeichnen. Ferner gibt es zwei linear unabhängige Lösungen $\overset{\infty}{y}_1, \overset{\infty}{y}_2$, die für $x \to \infty$ in $-\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \operatorname{arc} x \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ die asymptotischen Darstellungen gestatten:

$$\overset{\infty}{y}_1 \sim x^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\beta, \nu)(\beta - \gamma + 1, \nu) \frac{(-x)^{-\nu}}{\nu!}, \tag{5$_1$}$$

$$\overset{\infty}{y}_2 \sim e^x x^{\beta-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\gamma - \beta, \nu)\,(1 - \beta, \nu) \frac{x^{-\nu}}{\nu!} \text{ [7]}. \tag{5$_2$}$$

Es bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} \mathring{y}_1 &= e^{-\pi i \beta} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \beta)} \overset{\infty}{y}_1 + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \overset{\infty}{y}_2, \\ \mathring{y}_2 &= e^{-\pi i(\beta - \gamma + 1)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)} \overset{\infty}{y}_1 + \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1)} \overset{\infty}{y}_2 \text{ [8]}. \end{aligned} \tag{6}$$

Für $x \to \infty$ in einem inneren Teilsektor der rechten (linken) Halbebene geht ersichtlich $\overset{\infty}{y}_1 : \overset{\infty}{y}_2$ $(\overset{\infty}{y}_2 : \overset{\infty}{y}_1)$ gegen Null. Daraus ist sofort das Hauptresultat von Herrn Wagner über die Lage der logarithmischen Windungspunkte[9]) abzulesen, noch mit der kleinen Erweiterung, daß $\gamma = 1 - \frac{m}{n}$ $((m, n) = 1, n \geqq 2)$ eine beliebige rationale, aber nicht

[6]) Vgl. hierzu insbesondere Kienast, Untersuchungen über die Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0$, Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 57 (1921), S. 247—325, im folgenden zitiert mit K. Dort ist auch ältere Literatur angegeben. Es könnten natürlich auch die expliziten Formeln für die gleichwertige Whittakersche Normierung benutzt werden, vgl. Whittaker-Watson, Modern Analysis, 4. Aufl. 1927, Kap. 16.

[7]) Vgl. K, S. 250/251. Man käme auch mit den dortigen, etwas beschränkteren Aussagen über das Gültigkeitsgebiet der Entwicklungen (5) aus.

[8]) K, S. 256, 17), 18), auch S. 287 unten.

[9]) A. a. O. [5]), S. 25.

ganze Zahl sein darf; die Funktion $w = \frac{\mathring{y}_2(z^n)}{\mathring{y}_1(z^n)}$ ist dann immer noch meromorph, nur erhält die Umkehrfunktion für $m \geqq 2$ noch eine algebraische Verzweigung über $w = 0$, für $m \leqq -2$ über $w = \infty$.

3. Aus $(5)_1$, $(5)_2$ ergibt sich ferner mit einem Schlag die Diskussion der Fälle, wo die Gleichung (1) eine Lösung der Form $D(z)e^{d(z)}$ besitzt ($D(z)$, $d(z)$ Polynome) [10]. Offenbar sind dies wegen des Eindeutigkeitssatzes für asymptotische Potenzreihen genau die Fälle, wo eine der Reihen (5) abbricht. Wir erhalten also unmittelbar die Tabelle

	$\beta = -k$	$\beta - \gamma + 1 = -k$	$\gamma - \beta = -k$	$1 - \beta = -k$
$c =$	$-(2k+1)n+1$	$-(2k+1)n-1$	$(2k+1)n-1$	$(2k+1)n+1$
$g(z) =$	$e^{-\frac{z^n}{n}} L_k\left(\frac{2}{n}z^n, -\frac{1}{n}\right)$	$e^{-\frac{z^n}{n}} z L_k\left(\frac{2}{n}z^n, \frac{1}{n}\right)$	$e^{\frac{z^n}{n}} L_k\left(-\frac{2}{n}z^n, -\frac{1}{n}\right)$	$e^{\frac{z^n}{n}} z L_k\left(-\frac{2}{n}z^n, \frac{1}{n}\right)$.

Hierbei ist $k \geqq 0$ ganz, beliebig, und es bedeutet

$$L_k(x, \alpha) = (-1)^k (\alpha + 1, k)\, {}_1F_1(-k, \alpha + 1, x) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

das Kummersche [11]) (= verallgemeinerte Laguerresche) Polynom vom Parameter α. Die erste Hälfte der letzten Zeile der Tabelle folgt aus (4), da die nach Eintragung der speziellen Parameterwerte abbrechende Reihe $(5)_1$, die jetzt im gewöhnlichen Sinne eine Lösung darstellt, mit derjenigen der Reihen (4) proportional sein muß, die gleichfalls abbricht, die zweite Hälfte dann durch Einsetzen der Parameterwerte in $(5)_2$ und Vergleich mit den soeben erhaltenen Ausdrücken.

---

[10]) A. a. O. [5]), S. 43—46 durch recht weitläufige Koeffizientenrechnungen. Nur für $n = 2$ wird nachträglich (S. 48/49) auf das Auftreten Hermitescher Polynome hingewiesen.

[11]) Zur Geschichte und Bezeichnungsweise vgl. z. B. W. Hahn, Bericht über die Nullstellen der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome, Jahresber. d. D. M. V. **44** (1934), S. 215—236, insbes. Einleitung und Schriftenverzeichnis.

Eingegangen 30. September 1936.