

## Werk

**Titel:** Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen

**Ort:** Göttingen

**Jahr:** 1857

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN250442582\_0007

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN250442582\\_0007](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN250442582_0007)

**LOG Id:** LOG\_0017

**LOG Titel:** Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe  $F(\dots)$  darstellbaren Functionen

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN250442582

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN250442582>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Beiträge

zur

## Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen

von

*Bernhard Riemann,*

Assessor der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

Der Königlichen Societät vorgelegt am 6. November 1856.

Die Gauss'sche Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ , als Function ihres vierten Elements  $x$  betrachtet, stellt diese Function nur dar, so lange der Modul von  $x$  die Einheit nicht überschreitet. Um diese Function in ihrem ganzen Umfange, bei unbeschränkter Veränderlichkeit dieses ihres Arguments, zu untersuchen, bieten die bisherigen Arbeiten über dieselbe zwei Wege dar. Man kann nämlich entweder von einer lineären Differentialgleichung welcher sie genügt ausgehen, oder von ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale. Jeder dieser Wege gewährt eigenthümliche Vortheile; jedoch ist bisjetzt, in der reichhaltigen Abhandlung von Kummer im 15. Bande des mathematischen Journals von Crelle und auch in den noch unveröffentlichten Untersuchungen von Gauss, nur der erste betreten, wohl hauptsächlich desshalb, weil die Rechnung mit bestimmten Integralen zwischen complexen Grenzen noch zu wenig ausgebildet war, oder doch nicht als einem grossen Leserkreise geläufig vorgelegt werden konnte.

In der folgenden Abhandlung habe ich diese Transcendente nach einer neuen Methode behandelt, welche im Wesentlichen auf jede Function, die einer lineären Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügt, anwendbar bleibt. Nach derselben lassen sich die früher zum Theil durch ziemlich mühsame Rechnung gefundenen Resultate fast unmittelbar aus der

Definition ableiten, und dies ist in dem hier vorliegenden Theile dieser Abhandlung geschehen, hauptsächlich in der Absicht für die vielfachen Anwendungen dieser Function in physikalischen und astronomischen Untersuchungen eine bequeme Übersicht über ihre möglichen Darstellungen zu geben. Es ist nöthig, einige allgemeine Vorbemerkungen über die Betrachtung einer Function bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres Arguments voraufzuschicken.

Betrachtet man den Werth der unabhängig veränderlichen Grösse  $x = y + zi$  zur leichteren Auffassung ihrer Veränderlichkeit als vertreten durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten  $y, z$  sind, und denkt sich die Function  $w$  in einem Theile dieser Ebene gegeben, so kann sie von dort aus nach einem leicht zu beweisenden Satze nur auf eine Weise der Gleichung  $\frac{dw}{dz} = i \frac{dw}{dy}$  gemäss stetig fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung muss selbstredend nicht in blossen Linien geschehen, worauf eine partielle Differentialgleichung nicht angewandt werden könnte, sondern in Flächenstreifen von endlicher Breite. Bei Functionen, welche, wie die hier zu untersuchende, „mehrwertig“ sind oder für denselben Werth von  $x$  je nach dem Wege, auf welchem die Fortsetzung geschehen ist, mehrere Werthe annehmen können, giebt es gewisse Punkte der  $x$ -Ebene, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt, wie z. B. bei  $\sqrt{x-a}$ ,  $\log(x-a)$ ,  $(x-a)^\mu$ , wenn  $\mu$  keine ganze Zahl ist, der Punkt  $a$ . Wenn man von diesem Punkte  $a$  aus sich eine beliebige Linie gezogen denkt, so kann der Werth der Function in der Umgebung von  $a$  so gewählt werden, dass er sich ausserhalb dieser Linie überall stetig ändert; sie nimmt aber dann zu beiden Seiten dieser Linie verschiedene Werthe an, so dass die Fortsetzung der Function über diese Linie hinüber eine von der jenseits schon vorhandenen verschiedene Function giebt.

Zur Erleichterung des Ausdrucks sollen die verschiedenen Fortsetzungen Einer Function für denselben Theil der  $x$ -Ebene „Zweige“ dieser Function genannt werden und ein Werth von  $x$ , um welchen herum sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, ein „Verzweigungswerth“; für einen Werth, in welchem keine Verzweigung stattfindet, heisst die Function „eindrig oder monodrom“.

I.

Ich bezeichne durch

$$P \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix}$$

eine Function von  $x$ , welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sie ist für alle Werthe von  $x$  ausser  $a, b, c$  einändrig und endlich.

2. Zwischen je drei Zweigen dieser Function  $P', P'', P'''$  findet eine lineäre homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt,

$$c'P' + c''P'' + c'''P''' = 0.$$

3. Die Function lässt sich in die Formen

$$c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')}, c_\beta P^{(\beta)} + c_{\beta'} P^{(\beta')}, c_\gamma P^{(\gamma)} + c_{\gamma'} P^{(\gamma')}$$

mit constanten  $c_\alpha, c_{\alpha'}, \dots, c_{\gamma'}$  setzen, so dass

$$P^{(\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, P^{(\alpha')}(x-a)^{-\alpha'}$$

für  $x=a$  einändrig bleiben und weder Null noch unendlich werden, und ebenso  $P^{(\beta)}(x-b)^{-\beta}, P^{(\beta')}(x-b)^{-\beta'}$  für  $x=b$  und  $P^{(\gamma)}(x-c)^{-\gamma}, P^{(\gamma')}(x-c)^{-\gamma'}$  für  $x=c$ . In Betreff der sechs Grössen  $\alpha, \alpha', \dots, \gamma'$  wird vorausgesetzt, dass keine der Differenzen  $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$  eine ganze Zahl und die Summe aller  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$  sei.

Wie mannigfaltig die Functionen seien, welche diesen Bedingungen genügen, bleibt vorläufig unentschieden und wird sich im Laufe der Untersuchung (Art. IV) ergeben. Zu grösserer Bequemlichkeit des Ausdrucks werde ich  $x$  die Veränderliche,  $a, b, c$  den ersten, zweiten, dritten Verzweigungswerth und  $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$  das erste, zweite, dritte Exponentenpaar der P-function nennen.

II.

Zunächst einige unmittelbare Folgerungen aus der Definition.

In der Function  $P \begin{Bmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix}$  können die drei ersten Vertikalreihen beliebig unter einander vertauscht werden, sowie auch  $\alpha$  mit  $\alpha', \beta$  mit  $\beta', \gamma$  mit  $\gamma'$

mit  $\gamma'$ . Es ist ferner  $P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} = P \left\{ \begin{matrix} a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma & x' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\}$ , wenn man für  $x'$  einen rationalen Ausdruck ersten Grades von  $x$  setzt, der für  $x = a, b, c$  die Werthe  $a', b', c'$  annimmt.

Für  $P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\}$ , auf welche Function sich demzufolge alle P-functionen mit denselben  $\alpha, \alpha', \dots, \gamma'$  zurückführen lassen, werde ich zur Abkürzung auch bloss  $\rho \left( \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{matrix} \right)$  setzen.

In einer solchen Function können also von den Grössen  $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$  die Grössen jedes Paares unter sich, sowie auch die drei Grössenpaare beliebig mit einander vertauscht werden, wenn man nur in der sich ergebenden P-function als Veränderliche einen rationalen Ausdruck ersten Grades von  $x$  substituirt, welcher für die zum ersten, zweiten, dritten Exponentenpaar dieser Function gehörigen Werthe von  $x$  die Werthe  $0, \infty, 1$  annimmt. Auf diese Weise erhält man die Function  $P \left( \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{matrix} \right)$  ausgedrückt durch P-functionen mit den Veränderlichen  $x, 1-x, \frac{1}{x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}, \frac{1}{1-x}$  und denselben Exponenten in anderer Ordnung.

Aus der Definition folgt ferner:

$$P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} \left( \frac{x-a}{x-b} \right)^\delta = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \alpha + \delta & \beta - \delta & \gamma & x \\ \alpha' + \delta & \beta' - \delta & \gamma' \end{matrix} \right\},$$

also auch  $x^\delta (1-x)^\varepsilon P \left( \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{matrix} \right) = P \left( \begin{matrix} \alpha + \delta & \beta - \delta - \varepsilon & \gamma + \varepsilon \\ \alpha' + \delta & \beta' - \delta - \varepsilon & \gamma' + \varepsilon & x \end{matrix} \right).$

Durch diese Umformung können zwei Exponenten verschiedener Paare beliebig gegebene Werthe erhalten und als Werthe der Exponenten, da zwischen ihnen die Bedingung  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$  stattfindet, jedwede andere eingeführt werden, für welche die drei Differenzen  $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$  dieselben sind. Aus diesem Grunde werde ich später zur Erleichterung der Übersicht durch  $P(\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', x)$  sämtliche in der Form  $x^\delta (1-x)^\varepsilon P \left( \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{matrix} \right)$  enthaltenen Functionen bezeichnen.

## III.

Es ist jetzt vor allen Dingen nöthig, den Verlauf der Function etwas genauer zu untersuchen. Zu diesem Ende denke man sich durch sämtliche Verzweigungspunkte der Function eine in sich zurücklaufende Linie  $l$  gezogen, welche die Gesamtheit der complexen Werthe in zwei Grössengebiete scheidet. Innerhalb jedes von ihnen wird alsdann jeder Zweig der Function stetig und von den übrigen gesondert verlaufen; längs der gemeinschaftlichen Grenzlinie aber werden zwischen den Zweigen des einen und des andern Gebiets in verschiedenen Begrenzungstheilen verschiedene Relationen stattfinden. Zu ihrer

bequemeren Darstellung werde ich die mittelst des Coefficientensystems  $S = \begin{pmatrix} p, q \\ r, s \end{pmatrix}$  aus den Grössen  $t, u$  gebildeten lineären Ausdrücke  $pt + qu, rt + su$  durch  $(S)(t, u)$  bezeichnen. Es möge ferner nach Analogie der von Gauss vorgeschlagenen Benennung „positiv laterale Einheit“ für  $+i$  als „positive“ Seitenrichtung zu einer gegebenen Richtung diejenige bezeichnet werden, welche zu ihr ebenso liegt, wie  $+i$  zu 1 (also bei der üblichen Darstellungsweise der complexen Grössen die linke). Demgemäss macht  $x$  einen „positiven Umlauf um einen Verzweigungswerth  $a$ “, wenn es sich durch die ganze Begrenzung eines nur diesen und keinen andern Verzweigungswerth enthaltenden Grössengebiets in einer gegen die Richtung von Innen nach Aussen positiv liegenden Richtung bewegt. Es gehe nun die Linie  $l$  der Reihe nach durch die Punkte  $x = a, x = b, x = c$ , und in dem auf ihrer positiven Seite liegenden Gebiete seien  $P', P''$  zwei in keinem constanten Verhältnisse stehende Zweige der Function  $P$ . Jeder andere Zweig  $P'''$  lässt sich dann, da in der vorausgesetztermassen stattfindenden Gleichung  $c'P' + c''P'' + c'''P''' = 0$   $c'''$  nicht verschwinden kann, linear und mit constanten Coefficienten in  $P'$  und  $P''$  ausdrücken. Nimmt man nun an, dass  $P', P''$  durch einen positiven Umlauf der Grösse  $x$  um  $a$  in  $(A)(P', P'')$ , um  $b$  in  $(B)(P', P'')$ , um  $c$  in  $(C)(P', P'')$  übergehe, so wird durch die Coefficienten der Systeme  $(A), (B), (C)$  die Periodicität der Function völlig bestimmt sein. Zwischen diesen finden aber noch Relationen Statt. Wenn nämlich  $x$  das negative Ufer der Linie  $l$  durchläuft, so müssen die Functionen  $P', P''$  die vorigen Werthe wieder annehmen, da der durchlaufene Weg negativerseits die ganze Begren-

zung eines Grössengebiets bildet, innerhalb dessen diese Functionen allenthalben einändrig sind. Es ist dies aber dasselbe, als ob der Werth  $x$  sich von einem der Werthe  $c, b, a$  bis zum folgenden auf der positiven Seite fortbewegt, dann aber jedesmal um diesen Werth positiv herum, wobei  $(P', P'')$  der Reihe nach in  $(C)(P', P'')$ ,  $(B)(C)(P', P'')$ , schliesslich in  $(A)(B)(C)(P', P'')$  übergeht. Es ist daher

$$(1) \quad (A)(B)(C) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

welche Gleichung vier Bedingungsgleichungen zwischen den zwölf Coefficienten von  $A, B, C$  liefert.

Bei der Discussion dieser Bedingungsgleichungen beschränke ich mich, zur Fixirung der Vorstellungen, auf die Function  $P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} x$ , also auf den Fall, wenn  $a = 0, b = \infty, c = 1$ , was die Allgemeinheit der Resultate nicht wesentlich beeinträchtigt, und wähle für die durch  $1, \infty, 0$  zu ziehende Linie  $l$  die Linie der reellen Werthe, welche um der Reihe nach durch  $c, b, a$  zu gehen von  $-\infty$  nach  $+\infty$  gerichtet sein muss. Innerhalb des auf der positiven Seite dieser Linie liegenden Gebiets, welches die complexen Werthe mit positiv imaginärem Gliede enthält, sind dann die oben charakterisirten Bestandtheile der Function  $P$ , die Grössen  $P^\alpha, P^{\alpha'}, P^\beta, P^{\beta'}, P^\gamma, P^{\gamma'}$  einändrige Functionen von  $x$  und sind bis auf constante Factoren, welche von der Wahl der Grössen  $c_\alpha, c_{\alpha'}, \dots, c_{\gamma'}$  abhängen, völlig bestimmt, wenn die Function

$P$  gegeben ist. Die Functionen  $P^\alpha, P^{\alpha'}$  gehen durch einen positiven Umlauf der Grösse  $x$  um  $0$  in  $P^\alpha e^{\alpha 2\pi i}, P^{\alpha'} e^{\alpha' 2\pi i}$  über und ebenso durch einen positiven Umlauf dieser Grösse um  $\infty$  die Functionen  $P^\beta, P^{\beta'}$  in  $P^\beta e^{\beta 2\pi i}, P^{\beta'} e^{\beta' 2\pi i}$  und durch einen positiven Umlauf um  $1$  die Functionen  $P^\gamma, P^{\gamma'}$  in  $P^\gamma e^{\gamma 2\pi i}, P^{\gamma'} e^{\gamma' 2\pi i}$ . Bezeichnet man den Werth, in welchen  $P$  durch einen positiven Umlauf von  $x$  um  $0$  übergeht, durch  $P'$ , so ist, wenn

$$P = c_\alpha P^\alpha + c_{\alpha'} P^{\alpha'}, \quad P' = c_\alpha e^{\alpha 2\pi i} P^\alpha + c_{\alpha'} e^{\alpha' 2\pi i} P^{\alpha'}.$$

Diese Ausdrücke haben eine von Null verschiedene Determinante, da n. V.  $\alpha - \alpha'$  keine ganze Zahl ist und folglich können  $P^\alpha, P^{\alpha'}$  auch umgekehrt in  $P, P'$ , also auch in  $P^\beta, P^{\beta'}$ ;  $P^\gamma, P^{\gamma'}$  linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden. Setzt man nun

$$\left. \begin{aligned} P^\alpha &= \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'} \\ P^{\alpha'} &= \alpha'_{\beta} P^\beta + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma} P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'} \end{aligned} \right\} \text{Keine neuen Formeln}$$

und zur Abkürzung  $\begin{Bmatrix} \alpha_\beta & \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_{\beta} & \alpha'_{\beta'} \end{Bmatrix} = (b) \begin{Bmatrix} \alpha_\gamma & \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_{\gamma} & \alpha'_{\gamma'} \end{Bmatrix} = (c)$

und die inversen Substitutionen von (b) und (c) bez.w.  $= (b)^{-1}$  und  $(c)^{-1}$ : so ergeben sich für die Functionen  $(P^\alpha, P^{\alpha'})$  die Substitutionen.

$$(A) = \begin{Bmatrix} e^{\alpha 2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{\alpha' 2\pi i} \end{Bmatrix}, (B) = (b) \begin{Bmatrix} e^{\beta 2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{\beta' 2\pi i} \end{Bmatrix} (b)^{-1}, (C) = (c) \begin{Bmatrix} e^{\gamma 2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{\gamma' 2\pi i} \end{Bmatrix} (c)^{-1}$$

Aus der Gleichung  $(A)(B)(C) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$  folgt nun zunächst, da die Determinante einer zusammengesetzten Substitution dem Producte aus den Determinanten ihrer Componenten gleich ist,

$$1 = \text{Det}(A) \text{Det}(B) \text{Det}(C) = e^{(\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma') 2\pi i} \text{Det}(b) \text{Det}(b)^{-1} \text{Det}(c) \text{Det}(c)^{-1}$$

oder, da  $\text{Det}(b) \text{Det}(b)^{-1} = 1, \text{Det}(c) \text{Det}(c)^{-1} = 1,$

(2)  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' =$  einer ganzen Zahl, womit die obige Annahme, dass diese Exponentensumme  $= 1$  sei, vereinbar ist.

Die übrigen drei in  $(A)(B)(C) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$  enthaltenen Relationen geben drei Bedingungen für (b) und (c), welche indess leichter auf folgendem Wege gefunden werden.

Wenn  $x$  erst um  $\infty$  und dann um 0 positiv herumgeht, so bildet der durchlaufene Weg zugleich einen negativen Umlauf um 1. Der Werth, in welchen  $P^\alpha$  dadurch übergeht, ist daher

$$= \alpha_{\gamma} e^{-\gamma 2\pi i} r^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} e^{-\gamma' 2\pi i} r^{\gamma'} = \left( \alpha_{\beta} e^{\beta 2\pi i} r^{\beta} + \alpha_{\beta'} e^{\beta' 2\pi i} r^{\beta'} \right) e^{\alpha 2\pi i}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem willkürlichen Factor  $e^{\sigma 2\pi i}$  und die Gleichung

$$\alpha_{\gamma} r^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} r^{\gamma'} = \alpha_{\beta} r^{\beta} + \alpha_{\beta'} r^{\beta'} \quad \text{mit } e^{-\sigma 2\pi i}$$

und subtrahirt, so ergibt sich nach Abwerfung eines allgemeinen Factors

$$\alpha_{\gamma} \sin(\sigma - \gamma) \pi e^{-\gamma \pi i} r^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma') \pi e^{-\gamma' \pi i} r^{\gamma'} = \\ \alpha_{\beta} \sin(\sigma + \alpha + \beta) \pi e^{(\alpha + \beta) \pi i} r^{\beta} + \alpha_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha + \beta') \pi e^{(\alpha + \beta') \pi i} r^{\beta'}.$$

Aus ganz ähnlichen Gründen hat man auch, wenn man überall  $\alpha'$  für  $\alpha$  setzt, die Gleichung

$$\alpha'_{\gamma} \sin(\sigma - \gamma) \pi e^{-\gamma \pi i} r^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma') \pi e^{-\gamma' \pi i} r^{\gamma'} = \\ \alpha'_{\beta} \sin(\sigma + \alpha' + \beta) \pi e^{(\alpha' + \beta) \pi i} r^{\beta} + \alpha'_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha' + \beta') \pi e^{(\alpha' + \beta') \pi i} r^{\beta'}$$

mit der willkürlichen Grösse  $\sigma$ . Befreit man beide Gleichungen von einer der Functionen, z. B.  $r^{\gamma'}$ , indem man  $\sigma$  demgemäss bestimmt, so können sich die resultirenden Gleichungen nur durch einen allgemeinen constanten Factor unterscheiden, da  $\frac{r^{\beta}}{r^{\beta'}}$  nicht constant ist. Diese Elimination von  $r^{\gamma'}$  giebt daher:

$$(3) \quad \frac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}} = \frac{\alpha_{\beta} \sin(\alpha + \beta + \gamma') \pi e^{\alpha \pi i}}{\alpha'_{\beta} \sin(\alpha' + \beta + \gamma') \pi e^{\alpha' \pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma') \pi e^{\alpha \pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma') \pi e^{\alpha' \pi i}}$$

und die ähnliche Elimination von  $r^{\gamma}$

$$(3) \quad \frac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}} = \frac{\alpha_{\beta} \sin(\alpha + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\alpha'_{\beta} \sin(\alpha' + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}},$$

welches die vier gesuchten Relationen sind. Aus ihnen ergeben sich die

Verhältnisse der Quotienten  $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}, \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}, \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$ . Die Gleichheit der beiden

aus der zweiten und vierten fließenden Werthe von  $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$  erhellt leicht als eine Folge aus  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$  mittelst der Identität  $\sin s\pi = \sin(1-s)\pi$ .

Demnach sind von den Grössen  $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}, \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}, \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}, \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$  durch eine von

ihnen, z. B.  $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$ , die übrigen bestimmt und die drei Grössen  $\alpha'_{\beta'}, \alpha'_\gamma, \alpha'_{\gamma'}$

durch die fünf Grössen  $\alpha_\beta, \alpha'_{\beta'}, \alpha_{\beta'}, \alpha_\gamma, \alpha_{\gamma'}$ . Diese fünf Grössen aber

hängen von den in  $P^\alpha, P^{\alpha'}, P^\beta, P^{\beta'}, P^\gamma, P^{\gamma'}$ , wenn die Function  $P$  gegeben ist, noch willkürlichen Factoren oder vielmehr von deren Verhältnissen ab, und können durch geeignete Bestimmung derselben jedwede endliche Werthe erhalten.

#### IV.

Die so eben gemachte Bemerkung bahnt den Weg zu dem Satze, dass in zwei P-functionen mit gleichen Exponenten die denselben Exponenten entsprechenden Bestandtheile sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

In der That, ist  $P_\lambda$  eine Function mit denselben Exponenten wie  $P$ , so kann man die fünf Grössen  $\alpha_\beta, \alpha_{\beta'}, \alpha_\gamma, \alpha_{\gamma'}$  und  $\alpha'_\beta$  bei beiden gleich annehmen und dann müssen auch die Grössen  $\alpha'_{\beta'}, \alpha'_\gamma, \alpha'_{\gamma'}$  bei beiden übereinstimmen. Man hat also gleichzeitig:

$$(P^\alpha, P^{\alpha'}) = (b)(P^\beta, P^{\beta'}) = (c)(P^\gamma, P^{\gamma'})$$

und  
folglich  $(P, P_\lambda) = (b)(P_\beta, P_{\beta'}) = (c)(P_\gamma, P_{\gamma'})$

$$(P^\alpha P_{\beta'} - P^{\alpha'} P_\beta) = \text{Det}(b)(P^\beta P_{\beta'} - P^{\beta'} P_\beta) = \text{Det}(c)(P^\gamma P_{\gamma'} - P^{\gamma'} P_\gamma)$$

Von diesen drei Ausdrücken bleibt der erste, mit  $x^{-\alpha-\alpha'}$  multiplicirt, offenbar für  $x=0$  einädrig und endlich; ebenso der zweite, mit  $x^{\beta+\beta'} = x^{-\alpha-\alpha'-\gamma-\gamma'+1}$  multiplicirt, für  $x=\infty$ , der dritte, mit  $(1-x)^{-\gamma-\gamma'}$  multiplicirt, für  $x=1$ , und dasselbe gilt von allen drei Ausdrücken für alle von 0,  $\infty$ , 1 verschiedenen Werthe von  $x$ : es ist daher

$$(P^{\alpha} P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha}) x^{-\alpha-\alpha'} (1-x)^{-\gamma-\gamma'}$$

eine allenthalben stetige und einädrige Function, also eine Constante. Sie ist ferner  $=0$  für  $x=\infty$  und muss folglich allenthalben  $=0$  sein.

Hieraus folgt

$$\frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}} = \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}}$$

$$\frac{P_1^{\beta}}{P^{\beta}} = \frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}} = \frac{\alpha_{\beta} P_1^{\beta} + \alpha_{\beta'} P_1^{\beta'}}{\alpha_{\beta} P^{\beta} + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}} = \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}}$$

$$\frac{P_1^{\gamma}}{P^{\gamma}} = \frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}} = \frac{\alpha_{\gamma} P_1^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} P_1^{\gamma'}}{\alpha_{\gamma} P^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}} = \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}}$$

Die Function  $\frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}}$  ist demnach einwerthig und muss überdies allenthalben endlich, also, w. z. b. ist, constant sein, wenn noch bewiesen wird, dass  $P^{\alpha}$  und  $P^{\alpha'}$  nicht zugleich für einen von 0, 1,  $\infty$  verschiedenen Werth von  $x$  verschwinden können.

Zu diesem Ende bemerke man, dass

$$P^{\alpha} \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^{\alpha}}{dx} = \text{Det } (b) \left( P^{\beta} \frac{dP^{\beta'}}{dx} - P^{\beta'} \frac{dP^{\beta}}{dx} \right) =$$

$$\text{Det } (c) \left( P^{\gamma} \frac{dP^{\gamma'}}{dx} - P^{\gamma'} \frac{dP^{\gamma}}{dx} \right)$$

und folglich für  $x = 0, \infty, 1$  unendlich klein von den Ordnungen  $\alpha + \alpha' - 1$ ,  $\beta + \beta' + 1 = 2 - \alpha - \alpha' - \gamma - \gamma'$ ,  $\gamma + \gamma' - 1$  wird, übrigens aber stetig und einädrig bleibt, so dass

$$\left( P^\alpha \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^\alpha}{dx} \right) x^{-\alpha - \alpha' + 1} (1 - x)^{-\gamma - \gamma' + 1}$$

eine allenthalben stetige und einädrige Function bildet, folglich einen constanten Werth hat. Dieser constante Werth dieser Function ist nothwendig von Null verschieden, weil sonst  $\log P^\alpha - \log P^{\alpha'} = \text{const.}$ , folglich  $\alpha = \alpha'$  sein würde gegen die Voraussetzung; offenbar müsste sie gleich Null werden, wenn für einen von  $0, 1, \infty$  verschiedenen Werth von  $x$   $P^\alpha$  u.  $P^{\alpha'}$  gleichzeitig verschwänden, da  $\frac{dP^\alpha}{dx}$ ,  $\frac{dP^{\alpha'}}{dx}$  als Derivirte einädrig und stetig bleibender Functionen nicht unendlich werden können.

Es werden daher  $P^\alpha$  u.  $P^{\alpha'}$  für keinen von  $0, 1, \infty$  verschiedenen Werth von  $x$  gleichzeitig  $= 0$ , und es bleibt die einwerthige Function

$$\frac{P^\alpha}{P^{\alpha'}} = \frac{P^{\beta}}{P^{\beta'}} = \frac{P^{\gamma}}{P^{\gamma'}}$$

allenthalben endlich, mithin constant, w. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass in zwei Zweige Einer P-function, deren Quotient nicht constant ist, jede andere P-function mit gleichen Exponenten sich linear mit constanten Coefficienten ausdrücken lässt und dass durch die im Art. I. geforderten Eigenschaften die zu definirende Function bis auf zwei linear in ihr enthaltene Constanten völlig bestimmt ist. Diese werden in jedem Falle leicht aus den Werthen der Function für specielle Werthe der Veränderlichen gefunden, am bequemsten, indem man die Veränderliche einem der Verzweigungswerthe gleich setzt.

Ob es immer eine jenen Bedingungen genügende Function gebe, bleibt freilich noch unentschieden, wird sich aber später durch die wirkliche Darstellung der Function mittelst bestimmter Integrale und hypergeometrischer Reihen erledigen und bedarf daher keiner besondern Untersuchung.

## V.

Ausser den für jedwede Werthe der Exponenten möglichen Transformationen des Art. II. ergeben sich aus der Definition noch leicht die beiden Transformationen:

$$(A) \quad P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & x \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & \sqrt{x} \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{array} \right\},$$

wo nach dem Früheren  $\beta + \beta' + \gamma + \gamma' = \frac{1}{2}$  sein muss, und

$$(B) \quad P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & \varrho & \varrho^2 & \sqrt[3]{x} \\ \gamma & \gamma & \gamma & \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{array} \right\},$$

wo  $\gamma + \gamma' = \frac{1}{3}$  und  $\varrho$  eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Um sämtliche Functionen, welche sich mit Hülfe dieser Transformationen auf einander zurückführen lassen, bequem zu übersehen, ist es zweckmässig, statt der Exponenten ihre Differenzen einzuführen und, wie oben vorgeschlagen, durch  $P(\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', x)$  sämtliche in der Form  $x^{\delta} (1 - x)^{\varepsilon} P \left( \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} \middle| x \right)$  enthaltenen Functionen zu bezeichnen, wobei  $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$  die erste, zweite, dritte Exponentendifferenz genannt werden mag.

Aus den Formeln im Art. II. folgt dann, dass in der Function

$$P(\lambda, \mu, \nu, x)$$

die Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  beliebig in's Entgegengesetzte verwandelt und beliebig unter einander vertauscht werden können. Die Veränderliche nimmt dabei einen der 6 Werthe  $x, 1 - x, \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x}, \frac{1}{1 - x}, \frac{x}{x - 1}$  an, und zwar haben von den 48 auf diese Weise sich ergebenden P-functionen je acht, welche durch blosse Zeichenänderung der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  aus einander hervorgehen, dieselbe Veränderliche.

Von den in diesem Art. angegebenen Transformationen A und B ist die erste anwendbar, wenn von den Exponentendifferenzen entweder eine gleich  $\frac{1}{2}$  oder zwei einander gleich sind, die zweite, wenn von ihnen entweder zwei  $= \frac{1}{3}$  oder alle drei einander gleich sind. Durch successive Anwendung dieser Transformationen erhält man daher durch einander ausgedrückt:

I.  $P(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x_2)$ ,  $P(\mu, 2\nu, \mu, x_1)$  und  $P(\nu, 2\mu, \nu, x_3)$ ,

wobei  $\sqrt{1 - x_2} = 1 - 2x_1$ ,  $\sqrt{1 - \frac{1}{x_2}} = 1 - 2x_3$ , also

$$x_2 = 4x_1(1 - x_1) = \frac{1}{4x_3(1 - x_3)} \text{ sich ergibt.}$$

II.  $P(\nu, \nu, \nu, x_3)$ ,  $P(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_2)$ ,  $P(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_1)$ ,

$P(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3}, x_4)$ ,  $P(\frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_5)$ ,  $P(\frac{\nu}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, x_6)$ ,

wenn  $1 - \frac{1}{x_4} = \left(\frac{x_3 + \rho}{x_3 + \rho^2}\right)^3$  und folglich  $\frac{1}{x_4} = \frac{3(\rho^2 - \rho)x_3(1 - x_3)}{(\rho^2 + x_3)^3}$ ,

$x_4(1 - x_4) = \frac{(\rho + x_3)^3(\rho^2 + x_3)^3}{27x_3^2(1 - x_3)^2} = \frac{(1 - x_3(1 - x_3))^3}{27x_3^2(1 - x_3)^2}$ ; ferner nach I.

$$4x_4(1 - x_4) = x_5 = \frac{1}{4x_6(1 - x_6)}, \quad 4x_3(1 - x_3) = x_2 = \frac{1}{4x_1(1 - x_1)}.$$

III.  $P(\nu, \nu, \frac{1}{2}, x_2)$ ,  $P(\nu, 2\nu, \nu, x_1)$

$P(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_3)$ ,  $P(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_4)$ ,

wenn  $x_3 = \frac{1}{4}(2 - x_2 - \frac{1}{x_2}) = 4x_4(1 - x_4)$ ,  $x_2 = 4x_1(1 - x_1)$ .

Alle diese Functionen können noch mittelst der allgemeinen Transformationen umgeformt und dadurch ihre Exponentendifferenzen beliebig vertauscht und mit beliebigen Vorzeichen versehen werden. Ausser den beiden Transcendenten II. und III. lässt, wenn eine Exponentendifferenz willkürlich bleiben soll, nur noch die Function  $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = P(\nu, 1, \nu)$  eine häufigere Wiederholung der Transformationen A und B zu, welche indess, da  $P\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu & -\nu & 1 \end{smallmatrix} x\right) = \text{const. } x^\nu + \text{const.}'$ , auf ganz elementare Formeln führt.

In der That ist die Transformation B nur anwendbar auf  $P(\nu, \nu, \nu)$  oder  $P(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3})$ , also nur auf die Transcendente II.; die Transformation A aber lässt sich häufiger als in I. noch wiederholen, wenn entweder von den Grössen  $\mu, \nu, 2\mu, 2\nu$  eine gleich  $\frac{1}{2}$  gesetzt oder eine der Gleichungen  $\mu = \nu$ ,  $\mu = 2\nu$ ,  $\nu = 2\mu$  angenommen wird. Von diesen Annahmen führt  $\mu = 2\nu$  oder  $\nu = 2\mu$  auf die Transcendente II.,  $\mu = \nu$ , sowie  $2\mu$  oder  $2\nu = \frac{1}{2}$  auf die Transcendente III., endlich  $\mu$  oder  $\nu = \frac{1}{2}$  auf die Function  $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke, welche man durch diese Transformation für jede der Transcendenten I--III. erhält, ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass in den obigen P-functionen als Veränderliche alle Wurzeln der Gleichungen, durch welche sie bestimmt werden, zulässig sind und jede Wurzel zu einem Systeme von 6 Werthen gehört, welche mittelst der allgemeinen Transformationen für einander als Veränderliche eingeführt werden können.

Es führen aber im Falle I. die beiden Werthe von  $x_1$  und  $x_3$ , welche zu einem gegebenen  $x_2$  gehören, auf dasselbe System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen I. durch P-functionen mit  $6 \cdot 3 = 18$  verschiedenen Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Im Falle II. führen von den zu einem gegebenen Werthe von  $x_5$  gehörigen Werthen die beiden Werthe von  $x_6$  und  $x_4$ , die 6 Werthe von  $x_3$  und von den 6 Werthen von  $x_2$  und von  $x_1$  je zwei zu demselben Systeme von 6 Werthen. Es liefern also  $x_1$  und  $x_2$  je drei und  $x_3, \dots, x_6$  je ein System von 6 Werthen, also alle zusammen  $6 \cdot 10 = 60$  Werthe, durch deren P-functionen sich jede der Functionen II. ausdrücken lässt.

Im Falle III. endlich liefern  $x_3$ , die beiden Werthe von  $x_2$ , die beiden Werthe von  $x_4$ , und von den vier Werthen von  $x_1$  je zwei ein System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen III. durch P-functionen von  $6 \cdot 5 = 30$  verschiedenen Veränderlichen darstellbar ist.

In jeder P-function können nun ohne Änderung der Veränderlichen mittelst der allgemeinen Transformationen die Exponentendifferenzen beliebige Vorzeichen erhalten, und also kann, da keine dieser Exponentendifferenzen  $= 0$  ist, eine und dieselbe Function auf 8 verschiedene Arten als P-function derselben Veränderlichen dargestellt werden. Die Anzahl sämtlicher Ausdrücke beträgt also im Falle I.  $8 \cdot 6 \cdot 3 = 144$ , im Falle II.  $8 \cdot 6 \cdot 10 = 480$ , im Falle III.  $8 \cdot 6 \cdot 5 = 240$ .

## VI.

Wenn, man sämtliche Exponenten einer P-function um ganze Zahlen ändert, so bleiben in den Gleichungen (3) Art. III. die Grössen

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\sin(\alpha' + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}}, \quad \frac{\sin(\alpha + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}},$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\sin(\alpha' + \beta + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}}, \quad \frac{\sin(\alpha + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha \pi i}}{\sin(\alpha' + \beta' + \gamma) \pi e^{\alpha' \pi i}}$$

ungeändert.

Sind daher in den Functionen  $P(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ,  $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, x)$  die entsprechenden Exponenten  $\alpha$  und  $\alpha_1$ , etc. um ganze Zahlen verschieden, so kann man die acht Grössen  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \beta_1)$ ,  $(\alpha, \beta')$ , ... den acht Grössen  $\alpha, \alpha', \alpha_1, \alpha_1', \alpha_1, \alpha_1', \alpha_1, \alpha_1'$ , ... gleich annehmen, da aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der drei übrigen folgt.

Nach der im Art. IV. angewandten Schlussweise folgt hieraus:

$$P^\alpha P_1^{\alpha_1} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1'} = \text{Det}(b) (P^\beta P_1^{\beta_1} - P^{\beta'} P_1^{\beta_1'}) = \text{Det}(c) (P^\gamma P_1^{\gamma_1} - P^{\gamma'} P_1^{\gamma_1'});$$

und wenn man von den Grössen  $\alpha + \alpha_1$  und  $\alpha_1 + \alpha'$ ,  $\beta + \beta_1$  und  $\beta_1 + \beta'$ ,  $\gamma + \gamma_1$  und  $\gamma_1 + \gamma'$  diejenigen Grössen jedes Paares, welche um eine positive ganze Zahl kleiner sind, als die andern, durch  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  bezeichnet, so ist

$$(P^\alpha P_1^{\alpha_1} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1'}) x^{-\bar{\alpha}} (1-x)^{-\bar{\gamma}}$$

eine Function von  $x$ , welche einädrig und endlich bleibt für  $x = 0$ ,  $x = 1$  und alle übrigen endlichen Werthe von  $x$ , für  $x = \infty$  aber unendlich wird von der Ordnung  $-\bar{\alpha} + \bar{\gamma} - \bar{\beta}$ , folglich eine ganze Function  $F$  vom Grade  $-\bar{\alpha} + \bar{\gamma} - \bar{\beta}$ .

Man bezeichne nun, wie früher, die Exponentendifferenzen  $\alpha - \alpha_1$ ,  $\beta - \beta_1$ ,  $\gamma - \gamma_1$  durch  $\lambda, \mu, \nu$ . In Betreff dieser ergibt sich zunächst: ihre Summe ändert sich um eine gerade Zahl, wenn sich sämtliche Exponenten um ganze Zahlen ändern; denn sie übertrifft die Summe sämtlicher Exponenten, welche unverändert = 1 bleibt, um  $-2(\alpha + \beta + \gamma)$ , welche Grösse sich dabei um eine gerade Zahl ändert. Sie können sich aber dabei um jedwede ganze Zahlen ändern, deren Summe gerade ist. Bezeichnet man ferner  $\alpha_1 - \alpha_1'$ ,  $\beta_1 - \beta_1'$ ,  $\gamma_1 - \gamma_1'$  durch  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  und durch  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$  die

absoluten Werthe der Differenzen  $\lambda - \lambda_1$ ,  $\mu - \mu_1$ ,  $\nu - \nu_1$ , so ist von den Grössen  $\alpha + \alpha_1$  und  $\alpha' + \alpha_1$  diejenige, welche um die positive Zahl  $\Delta\lambda$  kleiner ist, als die andern

$$= \frac{\alpha + \alpha'_1 + \alpha' + \alpha_1}{2} - \frac{\Delta\lambda}{2}, \text{ also}$$

$$- \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\alpha + \alpha'_1 + \alpha' + \alpha_1}{2} \text{ und ebenso}$$

$$- \frac{\beta}{\beta} = \frac{\Delta\mu}{2} - \frac{\beta + \beta'_1 + \beta' + \beta_1}{2}$$

$$- \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta\nu}{2} - \frac{\gamma + \gamma'_1 + \gamma' + \gamma_1}{2}.$$

Der Grad der ganzen Function  $F$ , welcher gleich der Summe dieser Grössen ist, ergibt sich daher

$$= \frac{\Delta\lambda + \Delta\mu + \Delta\nu}{2} - 1.$$

## VII.

Sind jetzt  $P(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ,  $P_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, x)$ ,  $P_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, x)$  drei Functionen, in welchen sich die entsprechenden Exponenten um ganze Zahlen unterscheiden, so fliesst aus diesem Satze mittelst der identischen Gleichung  $P^\alpha(P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} - P_1^{\alpha'_1} P_2^{\alpha_2}) + P_1^{\alpha_1}(P_2^{\alpha_2} P^\alpha - P_2^{\alpha'_2} P^\alpha) + P_2^{\alpha_2}(P^\alpha P_1^{\alpha_1} - P^\alpha P_1^{\alpha'_1}) = 0$  der wichtige Satz, dass zwischen ihren entsprechenden Gliedern eine lineäre homogene Gleichung stattfindet, deren Coefficienten ganze Functionen von  $x$  sind, und dass also

„sämmliche P-functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, sich in zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Functionen von  $x$  als Coefficienten ausdrücken lassen.“

Eine specielle Folge aus den Beweisgründen dieses Satzes ist, dass sich der zweite Differentialquotient einer P-function, linear mit rationalen Functionen als Coefficienten in den ersten und die Function selbst ausdrücken lässt, und also die Function einer lineären homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt.

Beschränkt man sich, um ihre Ableitung möglichst zu vereinfachen, auf den Fall  $\gamma = 0$ , auf welchen der allgemeine nach Art. II. leicht zurückgeführt

wird, und setzt  $P = y$ ,  $P^\alpha = y'$ ,  $P^{\alpha'} = y''$ , so ergibt sich, dass die Functionen

$$y' \frac{dy''}{d \log x} - y'' \frac{dy'}{d \log x}, \frac{d^2 y'}{d \log x^2} y'' - \frac{d^2 y''}{d \log x^2} y', \frac{dy'}{d \log x} \frac{d^2 y''}{d \log x^2} - \frac{dy''}{d \log x} \frac{d^2 y'}{d \log x^2}$$

mit  $x^{-\alpha - \alpha'} (1 - x)^{-\gamma' + 2}$  multiplicirt, endlich und einändrig bleiben für endliche Werthe von  $x$  und unendlich von der ersten Ordnung werden für  $x = \infty$ , und dass überdies das erste dieser Producte für  $x = 1$  unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Für  $y = \text{const.}' y' + \text{const.}'' y''$  findet daher eine Gleichung von der Form statt

$$(1 - x) \frac{d^2 y}{d \log x^2} - (A + Bx) \frac{dy}{d \log x} + (A' - B'x) y = 0,$$

in welcher  $A, B, A', B'$  noch zu bestimmende Constanten bezeichnen.

Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich eine Lösung dieser Differentialgleichung nach um 1 steigenden oder fallenden Potenzen in eine Reihe

$$\sum_n a_n x^n$$

entwickeln, und zwar wird der Exponent  $\mu$  des Anfangsgliedes im ersten Falle, wo er der niedrigste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu - A\mu + A' = 0$$

und im zweiten, wo der höchste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu + B\mu + B' = 0$$

bestimmt. Die Wurzeln der ersteren Gleichung müssen  $\alpha$  und  $\alpha'$ , die der letztern  $-\beta$  und  $-\beta'$  sein und folglich ist

$$A = \alpha + \alpha' \quad A' = \alpha\alpha'$$

$$B = \beta + \beta' \quad B' = \beta\beta',$$

und es genügt die Function  $P \binom{\alpha, \beta}{\alpha', \beta'} \gamma' x) = y$  der Differentialgleichung

$$(1 - x) \frac{d^2 y}{d \log x^2} - (\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')x) \frac{dy}{d \log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta'x) y = 0.$$

Es bestimmen sich ferner die Coefficienten aus einem von ihnen mittelst der Recursionsformel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\beta)(n+\beta')}{(n+1-\alpha)(n+1-\alpha')}$$

welcher  $a_n = \frac{\text{Const.}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha')\Gamma(-n-\beta)\Gamma(-n-\beta')}$  genügt.

Demnach bildet die Reihe

$$y = \text{Const.} \sum \frac{x^n}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha')\Gamma(-n-\beta)\Gamma(-n-\beta')}$$

sowohl wenn die Exponenten von  $\alpha$  oder  $\alpha'$  an um die Einheit steigen, als auch wenn sie von  $-\beta$  oder  $-\beta'$  an um die Einheit fallen, eine Lösung der Differentialgleichung und zwar bez. w. diejenigen particularen Lösungen, welche oben durch  $P^\alpha$ ,  $P^{\alpha'}$ ,  $P^\beta$ ,  $P^{\beta'}$  bezeichnet worden sind.

Nach Gauss, welcher durch  $F(a, b, c, x)$  eine Reihe bezeichnet, in welcher der Quotient des  $n+1$ ten Gliedes in das folgende  $= \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}x$  und das erste Glied  $= 1$  ist, lässt sich dieses Resultat für den einfachsten Fall, für  $\alpha = 0$ , so ausdrücken

$$P^\alpha \left( \begin{matrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} x \right) = \text{Const.} F(\beta, \beta', 1-\alpha', x)$$

oder

$$F(a, b, c, x) = P^\alpha \left( \begin{matrix} 0 & a & 0 \\ 1-c & b & c-a-b \end{matrix} x \right).$$

Aus demselben erhält man auch leicht einen Ausdruck der P-function durch ein bestimmtes Integral, indem man in dem allgemeinen Gliede der Reihe für die  $\Gamma$ -functionen ein Euler'sches Integral zweiter Gattung einführt und dann die Ordnung der Summation und Integration vertauscht. Auf diese Weise findet man, dass das Integral

$$x^\alpha (1-x)^\gamma \int_s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma} ds$$

von einem der vier Werthe  $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$  bis zu einem dieser vier Werthe

auf beliebigem Wege erstreckt eine Function  $P(\alpha, \beta, \gamma, x)$  bildet, und bei passender Wahl dieser Grenzwerte und des Weges von einem zum andern jede der sechs Functionen  $P^\alpha, P^\beta, \dots, P^\gamma$  darstellt. Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Integral die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Function besitzt. Es wird dies in der Folge geschehen, wo dieser Ausdruck der P-function durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in  $P^\alpha, P^\beta, \dots$  noch willkürlich gebliebenen Factoren benutzt werden soll; und ich bemerke hier nur noch, dass es, um diesen Ausdruck allgemein anwendbar zu machen, einer Modification des Weges der Integration bedarf, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen der Werthe 0, 1,  $\frac{1}{x}$ ,  $\infty$  so unendlich wird, dass sie die Integration bis an denselben nicht zulässt.

### VIII.

Zufolge der im Art. II. und dem vorigen erhaltenen Gleichungen

$$P^\alpha(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^\alpha (1-x)^\gamma P^\alpha(0, \beta + \alpha + \gamma, \gamma - \alpha, x) =$$

$$\text{Const. } x^\alpha (1-x)^\gamma F(\beta + \alpha + \gamma, \beta' + \alpha + \gamma, \alpha - \alpha' + 1, x)$$

fließt aus jedem Ausdrucke einer Function durch eine P-function eine Entwicklung derselben in eine hypergeometrische Reihe, welche nach steigenden Potenzen der Veränderlichen in dieser P-function fortschreitet. Nach Art. V. giebt es 8 Darstellungen einer Function durch P-functionen mit derselben Veränderlichen, welche durch Vertauschung zusammengehöriger Exponenten aus einander erhalten werden, also z. B. 8 Darstellungen mit der Veränderlichen  $x$ . Von diesen liefern aber je zwei, welche durch Vertauschung ihres zweiten Paares,  $\beta$  und  $\beta'$ , aus einander entstehen, dieselbe Entwicklung; man erhält also vier Entwicklungen nach steigenden Potenzen von  $x$ , von denen zwei, welche durch Vertauschung von  $\gamma$  und  $\gamma'$  aus einander erhalten werden, die Function  $P^\alpha$ , die beiden andern die Function  $P^{\alpha'}$  darstellen. Diese vier Entwicklungen convergiren, solange der Modul von  $x < 1$ , und divergiren, wenn er grösser als 1 ist, während die vier Reihen nach fallen-

den Potenzen von  $x$ , welche  $P^\beta$  und  $P^{\beta'}$  darstellen, sich umgekehrt verhalten. Für den Fall, wenn der Modul von  $x$  gleich 1 ist, folgt aus der Fourier'schen Reihe, dass die Reihen zu convergiren aufhören, wenn die Function für  $x = 1$  unendlich von einer höhern Ordnung als der ersten wird, aber convergent bleiben, wenn sie nur unendlich von einer niedrigeren Ordnung als 1 wird oder endlich bleibt. Es convergiren also auch in diesem Falle nur die Hälfte der 8 Entwicklungen nach Potenzen von  $x$ , solange der reelle Theil von  $\gamma' - \gamma$  nicht zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt, und sie convergiren sämmtlich, sobald dieses stattfindet.

Demnach hat man zur Darstellung einer P-function im Allgemeinen 24 verschiedene hypergeometrische Reihen, welche nach steigenden oder fallenden Potenzen von drei verschiedenen Grössen fortschreiten, und von denen für einen gegebenen Werth von  $x$  jedenfalls die Hälfte, also zwölf convergiren. Im Falle I. Art. V. sind alle diese Anzahlen mit 3, im Falle II. mit 10, im Falle III. mit 5 zu multipliciren. Am geeignetsten zur numerischen Rechnung werden von diesen Reihen meistens diejenigen sein, deren viertes Element den kleinsten Modul hat.

Was die Ausdrücke einer P-function durch bestimmte Integrale betrifft, die sich durch die am Schlusse des vorigen Art. aus den Transformationen des Art. V. ableiten lassen, so sind diese Ausdrücke sämmtlich von einander verschieden. Man erhält also im Allgemeinen 48, im Falle I. 144, im Falle II. 480, im Falle III. 240 bestimmte Integrale, welche dasselbe Glied einer P-function darstellen und also zu einander ein von  $x$  unabhängiges Verhältniss haben. Von diesen lassen sich je 24, welche durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen der Exponenten aus einander hervorgehen, auch in einander transformiren durch eine solche Substitution ersten Grades, dass für irgend drei von den Werthen  $0, 1, \infty, \frac{1}{x}$  der Integrationsveränderlichen  $s$  die neue Veränderliche die Werthe  $0, 1, \infty$  annimmt. Die übrigen Gleichungen erfordern, soweit ich sie untersucht habe, zu ihrer Bestätigung durch Methoden der Integralrechnung die Transformation von vielfachen Integralen.