Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Von

M. A. Stern.

Der Königl. Gesellsch. der Wissensch. vorgelegt am 4. Mai 1878.

Bekanntlich hat man eine grosse Anzahl Recursionsformeln zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen gefunden. Sie haben alle den gemeinschaftlichen Charakter, dass sie den Werth irgend einer Bernoulli'schen Zahl unter der Voraussetzung angeben, dass man sämmtliche vorhergehende Bernoulli'sche Zahlen bereits kennt. Dasselbe gilt auch von den Secantencoefficienten oder Euler'schen Zahlen, wie ich sie im Folgenden nennen werde. Eine einzige Ausnahme bilden in Beziehung auf die Bernoulli'schen Zahlen die zwei Recursionsformeln welche Herr Professor Seidel, von einer eigenthümlichen Bildungsweise dieser Zahlen ausgehend, vor nicht langer Zeit gefunden hat*). Bei diesen nemlich braucht man nur, um die m^{te} Bernoulli'sche Zahl zu finden, die ihr vorhergehenden, bis zur $\frac{m}{2}$ten oder $\frac{m+1}{2}$ten, je nachdem m gerade oder ungerade ist, als bekannt voraus zu setzen. Im Folgenden soll eine Anzahl Formeln entwickelt werden, deren Charakter darin besteht, dass man eine Bernoulli'sche Zahl vom Range $2k+r$, wo r Null oder eine ganze positive Zahl ist, durch eine Recursionsformel findet, in welcher die vorhergehenden Bernoulli'schen Zahlen bis zur k^{ten} vorkommen. Diese Formeln enthalten nicht blos die erwähnten Seidel'schen als besondere Fälle, sondern es ergeben sich auch aus denselben sowohl bekannte als unbekannte Relationen, in welchen *alle* Bernoulli'schen Zahlen, von der ersten bis zu einer bestimmten, vorkommen.

*) Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der K B. Akademie der Wissensch. 1877 H. 2. S. 165 und S. 172.

Es zeigt sich aber zugleich, dass dasselbe Verfahren auch auf die Euler'schen Zahlen anwendbar ist, woraus sich eine grosse Anzahl neuer Relationen, sowohl zwischen Euler'schen und Bernoulli'schen Zahlen als auch zwischen letzteren ergiebt.

Ich benutze im Folgenden einige schon bekannte Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen. Um jedoch nicht auf verschiedene Schriften verweisen zu müssen, will ich diese Relationen zunächst aus einem einfachen Principe ableiten, dessen ich mich schon früher zu ähnlichem Zwecke bedient habe*).

Bekanntlich hat man, wenn man

$$fx = \frac{x}{e^x - 1} = f0 + f'0 . x + f^2 0 . \frac{x^2}{1.2} \dots$$

setzt, $f0 = 1$, $f'0 = -\frac{1}{2}$ ferner von $m = 1$ an, $f^{2m+1}0 = 0$ und wenn B_m die m^{te} Bernoulli'sche Zahl bezeichnet, so kann man diese dadurch definiren, dass man

$$B_m = (-1)^{m-1} f^{2m} 0$$

setzt. Ich werde in der Folge, zur Abkürzung, f^k statt $f^k 0$ schreiben. Man hat auch

$$f(-x) = e^x fx$$

oder

$$f - f'.x + f^2 . \frac{x^2}{1.2} \dots = \left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} \dots\right) \left(f + f'.x + f^2 . \frac{x^2}{1.2} \dots\right)$$

Vergleicht man hier auf beiden Seiten den Coefficienten von x^{2m+1} welcher auf der linken Seite Null ist, so erhält man

$$\frac{f^{2m}}{1.2 \dots 2m} + \frac{f^{2m-2}}{1.2 \dots 2m-2} . \frac{1}{1.2.3} \dots + \frac{f^2}{1.2} . \frac{1}{1.2 \dots 2m-1} - \frac{2m-1}{1.2 \dots 2m+1} . \frac{1}{2} = 0$$

oder, wenn man, wie es im Folgenden immer geschehen soll,

$$\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots n} = (m, n)$$

setzt,

$$\text{I)} \quad (2m+1, 1) f^{2m} + (2m+1, 3) f^{2m-2} \dots + (2m+1, 2m-1) f^2 - \frac{2m-1}{2} = 0$$

*) Göttinger Studien 1847. Zur Theorie der Euler'schen Integrale.

also auch

$$(2m+1,\,1)B_m-(2m+1,\,3)B_{m-1}\dots$$
$$+(-1)^{m-1}(2m+1,\,2m-1)B_1+(-1)^m\frac{2m-1}{2}=0$$

Vergleicht man dagegen die Coefficienten von x^{2m} so findet man

$$(2m+2,\,2)f^{2m}+(2m+2,\,4)f^{2m-2}\dots-m=0$$

oder, wenn man $m-1$ statt m setzt,

$$\text{II)}\qquad (2m,\,2)f^{2m-2}+(2m,\,4)f^{2m-4}\dots-(m-1)=0$$

also auch

$$(2m,\,2)B_{m-1}-(2m,\,4)B_{m-2}\dots+(-1)^{m-1}(m-1)=0$$

Man hat ferner

$$fx=\frac{e^x+1}{2}f(2x)$$

Entwickelt man hier wieder auf beiden Seiten nach aufsteigenden Potenzen von x und vergleicht die Coefficienten von x^{2m} so findet man

$$\text{III)}\quad (2^{2m}-1)f^{2m}+2^{2m-3}(2m,\,2)f^{2m-2}+2^{2m-5}(2m,\,4)f^{2m-4}\dots-\frac{2m-1}{2}=0$$

also auch

$$(2^{2m}-1)B_m-2^{2m-3}(2m,\,2)B_{m-1}+\dots+(-1)^m\frac{2m-1}{2}=0$$

Vergleicht man dagegen die Coefficienten von x^{2m-1} so hat man

$$\text{IV)}\qquad 2^{2m-1}(2m+1,\,1)f^{2m}+2^{2m-3}(2m+1,\,3)f^{2m-2}\dots-m=0$$

also $\quad 2^{2m-1}(2m+1,\,1)B_m-2^{2m-3}(2m+1,\,3)B_{m-1}\dots+(-1)^m m=0$

Dies sind die bekannten Relationen, welche ich später benutze.

2.

Ich setze $\Delta f^k=f^{k+1}-f^k$. Ist nun k gerade $=2m$ und mithin, insofern m nicht Null ist, $f^{k+1}=f^{2m+1}=0$ so hat man

$$\Delta f^{2m} = -f^{2m}$$

und zugleich da

$$\Delta f^{k-1} = f^k - f^{k-1}$$

auch

$$\Delta f^{2m-1} = f^{2m}$$

Ist aber $m = 0$ und also $f^{k+1} = f' = -\frac{1}{2}$ so hat man

$$\Delta f = f' - f = -\frac{3}{2}$$

Dieses Resultat, welches man in der Form

$$\Delta f - f' = -1$$

schreiben kann, ist aber, wie nun gezeigt werden soll, nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Formel, welche heisst

$$\Delta^k f - f^k = (-1)^k k$$

wo k gerade oder ungerade sein kann.

Bezeichnen $u, u_1, u_2 \ldots u_m$ eine Reihe auf einander folgender Werthe, so ist nach einer bekannten Formel der Differenzenrechnung

1) $\Delta^m u = u_m - (m,1) u_{m-1} + (m,2) u_{m-2} \ldots + (-1)^{m-1}(m, m-1) u_1 + (-1)^m u$

Setzt man $u_r = f^r$ so folgt hieraus

$$\Delta^m f = f^m - (m,1) f^{m-1} + (m,2) f^{m-2} \ldots + (-1)^{m-1}(m, m-1) f' + (-1)^m f$$

Setzt man $2m+1$ statt m und zugleich für f' und f ihre Werthe, so hat man mithin

$$\begin{aligned}\Delta^{2m+1} f = & -(2m+1,1) f^{2m} - (2m+1,3) f^{2m-2} \ldots \\ & -(2m+1, 2m-1) f^2 - \frac{2m+1}{2} - 1\end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel I) so ergiebt sich

$$\Delta^{2m+1} f = -(2m+1)$$

Setzt man dagegen $2m$ statt m so folgt

$$\Delta^{2m} f = f^{2m} + (2m, 2) f^{2m-2} + \ldots + m + 1$$

Dieser Ausdruck mit der Formel II) verglichen führt zu

$$\Delta^{2m} f = f^{2m} + 2m$$

Da man nun auch

$$\Delta^{2m+1} f = f^{2m+1} - (2m+1)$$

schreiben kann, so sieht man, dass in der That allgemein

$$\Delta^k f - f^k = (-1)^k k$$

ist.

Aus 1) folgt

2) $$\Delta^m u_n = u_{m+n} - (m, 1) u_{m+n-1} + (m, 2) u_{m+n-2} \dots + (-1)^m u_n$$

Zugleich ist, wie bekannt,

3) $$\Delta^m u_n = \Delta^{m+n} u + (n, 1) \Delta^{m+n-1} u + (n, 2) \Delta^{m+n-2} u \dots + (n, n) \Delta^m u$$

Setzt man in 2) und 3)

$$u_r = f^r$$

so folgt

A) $$\Delta^m f^n = f^{m+n} - (m, 1) f^{m+n-1} + (m, 2) f^{m+n-2} \dots + (-1)^m (m, m) f^n$$

B) $$\Delta^m f^n = \Delta^{m+n} f + (n, 1) \Delta^{m+n-1} f \dots + (n, n-1) \Delta^{m+1} f + (n, n) \Delta^m f$$

Es sind nun hier vier Fälle zu unterscheiden:

Ist erstens m und zugleich n gerade, mithin, wie oben gezeigt worden ist, $\Delta^m f = m + f^m$; $\Delta^{m+1} f = -(m+1)$ so folgt aus B)

$$\begin{aligned}\Delta^m f^n = m+n &- (n, 1)(m+n-1) \dots + (n, n-2)(m+2) - (n, n-1)(m+1) + (n, n) m \\ &+ f(m+n) \dots \quad + (n, n-2) f^{m+2} \quad + (n, n) f^m\end{aligned}$$

Nun ist in dieser Gleichung die obere Horizontalreihe rechts

$$\begin{aligned}&= (m+n)[1 - (n, 1) + (n, 2) \dots + (n, n)] + [(n, 1) - 2(n, 2) + 3(n, 3) \dots - n(n, n)] \\ &= (m+n)(1-1)^n + n(1-1)^{n-1} = 0\end{aligned}$$

also $$\Delta^m f^n = f^{m+n} + (n, 2) f^{m+n-2} \dots + (n, n) f^m$$

Zugleich giebt A)

$$\Delta^m f^n = f^{m+n} + (m, 2) f^{m+n-2} + \ldots + (m, m) f^n$$

Man hat also

$$\begin{aligned}&(n, 2) f^{m+n-2} + (n, 4) f^{m+n-4} \ldots + (n, n) f^m \\ = &(m, 2) f^{m+n-2} + (m, 4) f^{m+n-4} \ldots + (m, m) f^n\end{aligned}$$

und hieraus folgt, unter der Voraussetzung, dass $n > m$

4) $$\begin{aligned}&[(n, 2) - (m, 2)] f^{m+n-2} + [(n, 4) - (m, 4)] f^{m+n-4} + \ldots + [(n, m) - (m, m)] f^n \\ &+ (n, m+2) f^{n-2} + (n, m+4) f^{n-4} \ldots + (n, n) f^m = 0\end{aligned}$$

Ist zweitens m gerade aber n ungerade und wieder $n > m$ so folgt aus A) und B)

$$\begin{aligned}&-(m, 1) f^{m+n-1} - (m, 3) f^{m+n-3} \ldots - (m, m-1) f^{n+1} \\ = &(n, 1) f^{m+n-1} + (n, 3) f^{m+n-3} \ldots + (n, n-2) f^{m+2} + (n, n) f^m\end{aligned}$$

oder

5) $$\begin{aligned}&[(n, 1) + (m, 1)] f^{m+n-1} + [(n, 3) + (m, 3)] f^{m+n-3} \ldots \\ &+ [(n, m-1) + (m, m-1)] f^{n+1} + (n, m+1) f^{n-1} + \ldots + (n, n) f^m = 0\end{aligned}$$

Ist drittens m ungerade, n gerade, also nun $\Delta^m f = -m$; $\Delta^{m+1} f = m + 1 + f^{m+1}$
so ist nach B)

$$\begin{aligned}\Delta^m f^n = &-(m+n) + (n, 1)(m+n-1) - (n, 2)(m+n-2) \ldots + (n, n-1)(m+1) \\ &-(n, n) m + (n, 1) f^{m+n-1} \ldots + (n, n-1) f^{m+1}\end{aligned}$$

und hieraus folgt, wie oben gezeigt worden ist,

$$\Delta^m f^n = (n, 1) f^{m+n-1} + (n, 3) f^{m+n-3} \ldots + (n, n-1) f^{m+1}$$

Zugleich ist nach A)

$$\Delta^m f^n = -(m, 1) f^{m+n-1} - (m, 3) f^{m+n-3} \ldots - (m, m) f^n$$

Mithin, wenn man wieder $n > m$ nimmt

6) $$\begin{aligned}&[(n, 1) + (m, 1)] f^{m+n-1} + [(n, 3) + (m, 3)] f^{m+n-3} \ldots + [(n, m) + (m, m)] f^n \\ &+ (n, m+2) f^{n-2} \ldots + (n, n-1) f^{m+1} = 0\end{aligned}$$

Diese Formel setzt jedoch voraus, dass $n > m+1$. Ist $n = m+1$ so hat man statt dessen

$$6^*)\qquad [(n,1)+(m,1)]f^{m+n-1}\ldots+[(n,m)+(m,m)]f^n = 0$$

Ist viertens m ungerade und zugleich n ungerade so findet man durch dieselben Betrachtungen aus A) und B) die Werthe

$$\Delta^m f^n = f^{m+n} + (m,2)f^{m+n-2} + (m,4)f^{m+n-4} + \ldots + (m,m-1)f^{n+1}$$
$$\Delta^m f^n = f^{m+n} + (n,2)f^{m+n-2} + (n,4)f^{m+n-4} + \ldots + (n,n-1)f^{m+1}$$

also, wenn man wieder $n > m$ nimmt,

$$7)\qquad [(n,2)-(m,2)]f^{m+n-2}+\ldots+[(n,m-1)-(m,m-1)]f^{n+1}+\ldots \\ +(n,n-1)f^{m+1} = 0$$

Man bemerke, dass man die vier Formeln 4), 5), 6), 7) in eine einzige zusammen ziehen kann, nemlich

$$\sum_{r=0}^{r=n}[(n,r)-(-1)^{m+n}(m,r)]f^{m+n-r} = 0$$

Schreibt man aber statt f^{2r} seinen Werth $(-1)^{r-1}B_r$ und setzt noch immer $n > m$ so findet man aus diesen Formeln, wenn n und m beide gerade Zahlen sind:

$$[(n,2)-(m,2)]B_{\frac{m+n-2}{2}}-[(n,4)-(m,4)]B_{\frac{m+n-4}{2}}+\ldots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}B_{\frac{m}{2}} = 0$$

und wenn n und m beide ungerade Zahlen sind:

$$[(n,2)-(m,2)]B_{\frac{m+n-2}{2}}-[(n,4)-(m,4)]B_{\frac{m+n-4}{2}}+\ldots \\ +(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n,n-1)B_{\frac{m+1}{2}} = 0$$

Ist m gerade und n ungerade so hat man

$$[(n,1)+(m,1)]B_{\frac{m+n-1}{2}}-[(n,3)+(m,3)]B_{\frac{m+n-3}{2}}\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}B_{\frac{m}{2}} = 0$$

ist dagegen m ungerade und n gerade so hat man

$$[(n,1)+(m,1)]B_{\frac{m+n-1}{2}}-[(n,3)+(m,3)]B_{\frac{m+n-3}{2}}\dots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}(n,n-1)B_{\frac{m+1}{2}}=0$$

Dies gilt jedoch nur wenn $n>m+1$. Ist $n=m+1$ so hat man statt dessen nach 6*)

$$[(n,1)+(m,1)]B_{\frac{m+n-1}{2}}-[(n,3)+(m,3)]B_{\frac{m+n-3}{2}}+\dots$$
$$+(-1)^{\frac{n-2}{2}}[(n,m)+(m,m)]B_{\frac{m+1}{2}}=0$$

zu nehmen.

Es ergiebt sich hieraus, dass wenn k und r beliebige ganze positive Zahlen bedeuten (r kann auch Null oder -1 sein, sobald nur $n>m$) man vier verschiedene Recursionsformeln hat, vermittelst deren man B_{2k+r} aus den vorhergehenden Bernoulli'schen Zahlen bis zu B_k einschliesslich berechnen kann.

Setzt man nemlich $m=2k$; $n=2k+2(r+1)$ so hat man

8) $$[(n,2)-(m,2)]B_{2k+r}-[(n,4)-(m,4)]B_{2k+r-1}\dots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}B_k=0$$

Ist $m=2k-1$; $n=2k+2r+3$ so hat man

9) $$[(n,2)-(m,2)]B_{2k+r}-[(n,4)-(m,4)]B_{2k+r-1}\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n,n-1)B_k=0$$

ist $m=2k$; $n=2k+2r+1$ so folgt

10) $$[(n,1)+(m,1)]B_{2k+r}-[(n,3)+(m,3)]B_{2k+r-1}\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}B_k=0$$

und ist $m=2k-1$, $n=2k+2r+2$ so hat man

11) $$[(n,1)+(m,1)]B_{2k+r}-[(n,3)+(m,3)]B_{2k+r-1}\dots+(-1^{\frac{n-2}{2}}(n,n-1)B_k=0$$

In dem besonderen Falle wenn $r=-1$ also $n=m+1$ hat man

11a) $$[(n,1)+(m,1)]B_{2k-1}-[(n,3)+(m,3)]B_{2k-2}\dots$$
$$+(-1)^{\frac{n-2}{2}}[(n,m)+(m,m)]B_k=0$$

Setzt man in den Formeln 8) und 10) für k den Werth 1 so erhält man Recursionsformeln, welche alle Bernoulli'schen Zahlen, von der ersten bis zu irgend einer $r+2$ten enthalten. Sie unterscheiden sich aber von allen ähnlichen, (d. h. solchen, bei welchen in den einzelnen Gliedern die einzelnen Bernoulli'schen Zahlen vorkommen) bisher bekannten, und namentlich von den oben in §. 1. abgeleiteten, dadurch, dass sie nicht zugleich ein Glied enthalten, in welchem gar keine Bernoulli'sche Zahl vorkommt. So erhält man aus 8) indem man $m=2$; $n=2r+4$ und zugleich $\frac{n}{2}=s=2k+r$ setzt,

8*) $$[(2s,2)-1]B_s-(2s,4)B_{s-1}\dots+(-1)^{s-1}B_1=0$$

Ebenso folgt aus 10) wenn man $m=2$ und $2k+r=r+2=s$, also $n=2s-1$ setzt,

10*) $$[(2s-1,1)+2]B_s-(2s-1,3)B_{s-1}\dots+(-1)^{s-1}B_1=0$$

Will man dagegen die Formeln 9) und 11) auf den Fall ausdehnen, wenn $k=1$ also auch $m=1$ so bedürfen sie einer kleinen Modification. Diese Formeln beruhen nemlich auf der Voraussetzung, dass $\Delta^m f=-m$, während $\Delta^1 f$ nicht $=-1$, sondern, wie oben bemerkt worden ist, $=-\frac{3}{2}$ ist. Man muss daher noch $-\frac{1}{2}$ addiren und erhält statt 9) wenn man $n=2r+5=2s+1$ also $s=r+2=2k+r$ setzt,

9*) $$(2s+1,2)B_s-(2s+1,4)B_{s-1}\dots+(-1)^{s-1}(2s+1,2s)B_1+(-1)^s\tfrac{1}{2}=0$$

ebenso erhält man statt 11) wenn man $n=2r+4$ und $2k+r=\frac{n}{2}=s$ setzt, also $n=2s$; $r=s-2$

11*) $$[(2s,1)+1]B_s-(2s,3)B_{s-1}\dots+(-1)^{s-1}(2s,2s-1)B_1+(-1)^s\tfrac{1}{2}=0\,^{*)}$$

*) Die erste dieser zwei Formeln ist bekannt. Man findet sie, wenn man von der obigen Formel II die Formel I abzieht und die Gleichung $(2s+2,k)-(2s+1,k-1)$

Setzt man in 10) für r den Werth Null, so dass $m=2k$ und $n=2k+1$ so findet man

$$(4k+1)B_{2k}-(4k-1)\frac{2k.2k-1}{1.2.3}B_{2k-1}\ldots+(-1)^k B_k=0$$

oder, wenn man $2k=p$ setzt,

$$(2p+1)B_p-(2p-1)\frac{p.p-1}{1.2.3}B_{p-1}\ldots+(-1)^{\frac{p}{2}}B_{\frac{p}{2}}=0$$

Dieselbe Formel erhält man für die Voraussetzung, dass p ungerade aus 11a) wenn man $r=-1$, also $m=2k-1$, $n=2k$ und $p=2k-1$ setzt, nur dass im letzten Gliede $(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p+2)B_{\frac{p+1}{2}}$ statt $(-1)^p B_{\frac{p}{2}}$ zu nehmen ist.

Multiplicirt man in dieser Formel alle Glieder mit $p+1$ so erhält man die erste der oben (§. 1.) erwähnten zwei Formeln, welche Herr Prof. Seidel gefunden hat.

3.

Man betrachte jetzt die Reihe

$$\mathfrak{F}0,\ \mathfrak{F}^1 0,\ \mathfrak{F}^2 0 \text{ u. s. w.}$$

in welcher $\mathfrak{F}0=-1$, $\mathfrak{F}^1 0=1$ und, von $m=1$ an, allgemein

$$\mathfrak{F}^{2m}0=2(2^{2m}-1)f^{2m};\quad \mathfrak{F}^{2m+1}0=0$$

sein soll. In der Folge soll wieder allgemein $\mathfrak{F}^k$ statt $\mathfrak{F}^k 0$ geschrieben werden.

Setzt man in Formel 1) allgemein für u_r den Werth $\mathfrak{F}^r$ so erhält man

$$\Delta^m\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^m-(m,1)\mathfrak{F}^{m-1}+(m,2)\mathfrak{F}^{m-2}+(-1)^{m-1}(m,m-1)\mathfrak{F}^1\ldots+(-1)^m\mathfrak{F}$$

und demnach

$=(2s+1,k)$ berücksichtigt. Dagegen scheint mir die zweite noch nicht bekannt zu sein. Man kann beide auch vermittelst der Gleichungen $f^{2s}=\Delta f^{2s-1}=f^{2s}+(2s-1,2)f^{2s-2}\ldots$ und $f^{2s}=-\Delta f^{2s}=-(2s,1)f^{2s}-(2s,3)f^{2s-2}\ldots$ finden.

$$\Delta^{2m}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{2m} + (2m, 2)\mathfrak{F}^{2m-2} \dots - (2m, 2m-1)\mathfrak{F}^{1} + \mathfrak{F}$$
$$\Delta^{2m+1}\mathfrak{F} = -(2m+1, 1)\mathfrak{F}^{2m} - (2m+1, 3)\mathfrak{F}^{2m-2} \dots + (2m+1, 2m)\mathfrak{F}^{1} - \mathfrak{F}$$

Indem man hier statt $\mathfrak{F}^{2m}$ u. s. w. die oben angegebenen Werthe setzt, erhält man

$$\Delta^{2m}\mathfrak{F} = 2(2^{2m}-1)f^{2m} + (2m, 2)2(2^{2m-2}-1)f^{2m-2} \dots - (2m, 2m-1) - 1$$
$$\Delta^{2m+1}\mathfrak{F} = -(2m+1, 1)2(2^{2m}-1)f^{2m} - (2m+1, 3)2(2^{2m-2}-1)f^{2m-2} \dots$$
$$+ (2m+1, 2m) + 1$$

Nun ist (§. 1. F. I.)

$$(2m+1, 1)f^{2m} + (2m+1, 3)f^{2m-2} + \dots + (2m+1, 2m-1)f^{2} = m - \tfrac{1}{2}$$

und (ebend. F. IV.)

$$2^{2m}(2m+1, 1)f^{2m} + 2^{2m-2}(2m+1, 3)f^{2m-2} + \dots = 2m$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweiten ab und multiplicirt die Differenz mit 2 so ergiebt sich

$$(2m+1, 1)2(2^{2m}-1)f^{2m} + (2m+1, 3)2(2^{2m-2}-1)f^{2m-2} + \dots = 2m+1$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Werthe von $\Delta^{2m+1}\mathfrak{F}$ so findet man

$$\Delta^{2m+1}\mathfrak{F} = -(2m+1) + (2m+1, 2m) + 1 = 1$$

Dies gilt jedoch nur wenn m nicht Null. Im entgegengesetzten Falle hat man

$$\Delta\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{1} - \mathfrak{F} = 2$$

Ferner ist (§. 1. F. III)

$$(2^{2m}-1)f^{2m} = -2^{2m-3}(2m, 2)f^{2m-2} - 2^{2m-5}(2m, 4)f^{2m-4} \dots + m - \tfrac{1}{2}$$

oder

$$-2(2^{2m}-1)f^{2m} = 2^{2m-2}(2m, 2)f^{2m-2} + 2^{2m-4}(2m, 4)f^{2m-4} \dots - (2m-1)$$

Zugleich hat man (ebend. F. II)

$$0 = (2m, 2)f^{2m-2} + (2m, 4)f^{2m-4} \dots - (m-1)$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, und multiplicirt die Differenz mit 2 so hat man

$$-2^2(2^{2m}-1)f^{2m}$$
$$=(2m,2)\,2(2^{2m-2}-1)f^{2m-2}+(2m,4)\,2(2^{2m-4}-1)f^{2m-2}\ldots-2m$$

Dieser Ausdruck mit dem oben gefundenen Werthe von $\Delta^{2m}\mathfrak{F}$ verglichen giebt demnach

$$\Delta^{2m}\mathfrak{F}=2(2^{2m}-1)f^{2m}-2^2(2^{2m}-1)f^{2m}+2m-2m-1$$

oder

$$\Delta^{2m}\mathfrak{F}=-2(2^{2m}-1)f^{2m}-1$$

Nun ist nach Formel 2) und 3) wenn man $u_r=\mathfrak{F}^r$ setzt

A[1]) $\Delta^m\mathfrak{F}^n=\mathfrak{F}^{m+n}-(m,1)\mathfrak{F}^{m+n-1}+(m,2)\mathfrak{F}^{m+n-2}\ldots+(-1)^m(m,m)\mathfrak{F}^n$

B[1]) $\Delta^m\mathfrak{F}^n=\Delta^{m+n}\mathfrak{F}+(n,1)\Delta^{m+n-1}\mathfrak{F}+(n,2)\Delta^{m+n-2}\mathfrak{F}\ldots+(n,n)\Delta^m\mathfrak{F}$

Es sind hier wieder vier Fälle zu unterscheiden. Sind m und n beide gerade so folgt aus A[1])

$$\Delta^m\mathfrak{F}^n=2(2^{m+n}-1)f^{m+n}+2(m,2)(2^{m+n-2}-1)f^{m+n-2}\ldots+2(2^n-1)f^n$$

Zugleich folgt aus B[1]) wenn man die Gleichung

$$1-(n,1)+(n,2)\ldots-(n,n)=0$$

berücksichtigt,

$$\Delta^m\mathfrak{F}^n=-2(2^{m+n}-1)f^{m+n}-2(n,2)(2^{m+n-2}-1)f^{m+n-2}\ldots-2(2^m-1)f^m$$

Nimmt man $n>m$ so hat man demnach, wenn man diese zwei Werthe von $\Delta^m\mathfrak{F}^n$ durch Subtraction vereinigt

12) $2(2^{m+n}-1)f^{m+n}+(2^{m+n-2}-1)[(n,2)+m,2]f^{m+n-2}+\ldots$
$+(2^n-1)[(n,m)+(m,m)]f^n+(2^{n-2}-1)(n,m+2)f^{n-2}\ldots+(2^m-1)(n,n)f^m=0$

Ist $n=m$ so hat man

12*) $(2^{2m}-1)f^{2m}+(2^{2m-2}-1)(m,2)f^{2m-2}\ldots+(2^m-1)f^m=0$

Sind m und n beide ungerade, so folgt aus A[1])

$$\Delta^m\mathfrak{F}^n=2(2^{m+n}-1)f^{m+n}+2(m,2)(2^{m+n-2}-1)f^{m+n-2}+\ldots$$
$$+2(m,m-1)(2^{n+1}-1)f^{n+1}$$

zugleich folgt aus B[1])

$$\Delta^m \mathfrak{F}^n = -2\left[(2^{m+n}-1)f^{m+n} + (n,2)(2^{m+n-2}-1)f^{m+n-2} \ldots + (n,n-1)(2^{m+1}-1)f^{m+1}\right]$$

Setzt man wieder $n > m$ so ergiebt sich hieraus

13) $$2(2^{m+n}-1)f^{m+n} + [(n,2)+(m,2)](2^{m+n-2}-1)f^{m+n-2} \ldots + [(n,m-1)+(m,m-1)](2^{n+1}-1)f^{n+1} + (2^{n+3}-1)(n,m+1)f^{n-1} + \ldots + (n,n-1)(2^{m+1}-1)f^{m+1} = 0$$

und wenn $m = n$

13*) $$(2^{2m}-1)f^{2m} + (m,2)(2^{2m-2}-1)f^{2m-2} + \ldots + (m,m-1)(2^{m+1}-1)f^{m+1} = 0$$

Ist m gerade und n ungerade so giebt A[1])

$$\Delta^m \mathfrak{F}^n = -(m,1)\,2\,(2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} - (m,3)\,2\,(2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} \ldots - m(m-1)\,2\,(2^{n+1}-1)f^{n+1}$$

zugleich folgt aus B[1])

$$\Delta^m \mathfrak{F}^n = -(n,1)\,2\,(2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} - (n,3)\,2\,(2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} \ldots - (n,n-2)\,2\,(2^{m+2}-1) - 2(2^m-1)f^m$$

also, wenn wieder $n > m$

14) $$[(n-1)-(m,1)](2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} + [(n,3)-(m,3)](2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} + \ldots + [(n,m-1)-(m,m-1)](2^{n+1}-1)f^{n+1} + (n,m+1)(2^{n-1}-1)f^{n-1} \ldots + (2^m-1)f^m = 0$$

Ist dagegen m ungerade und n gerade so geben A[1]) und B[1])

$$\Delta^m \mathfrak{F}^n = -(m,1)\,2\,(2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} - (m,3)\,2\,(2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} \ldots - (m,m)(2^{n-1}-1)f^n$$

$$\Delta^m \mathfrak{F}^n = -(n,1)\,2\,(2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} - (n,3)\,2\,(2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} \ldots - (n,n-1)\,2\,(2^{m+1}-1)f^{m+1}$$

mithin wenn $n > m$

15) $$[(n,1)-(m,1)](2^{m+n-1}-1)f^{m+n-1} + [(n,3)-(m,3)](2^{m+n-3}-1)f^{m+n-3} \ldots + [(n,m)-(m,m)](2^n-1)f^n + (n,m+2)(2^{n-2}-1)f^{n-2} \ldots + (n,n-1)(2^{m+1}-1)f^{m+1} = 0$$

Man kann die vier Formeln 12), 13), 14), 15) durch die einzige

$$\sum_{r=0}^{r=n} [(n,r)+(-1)^{m+n}(m,r)](2^{m+n-r}-1)f^{m+n-r}=0$$

ausdrücken.

Schreibt man aber wieder $(-1)^{r-1}B_r$ statt f^{2r} so erhält man vier neue Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und zwar, indem man noch immer $n>m$ setzt, wenn m und n beide gerade Zahlen sind

$$16)\quad 2(2^{m+n}-1)B_{\frac{m+n}{2}}-(2^{m+n-2}-1)[(n,2)+(m,2)]B_{\frac{m+n-2}{2}}\ldots +(-1)^{\frac{n}{2}}(2^m-1)B_{\frac{m}{2}}=0$$

wenn m und n beide ungerade

$$17)\quad 2(2^{m+n}-1)B_{\frac{m+n}{2}}-(2^{m+n-2}-1)[(n,2)-(m,2)]B_{\frac{m+n-2}{2}}\ldots +(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n,n-1)(2^{m+1}-1)B_{\frac{m+1}{2}}=0$$

Wäre $m=n$ so giengen diese Formeln, jenachdem m gerade oder ungerade, in

$$(2^{2m}-1)B_m-(2^{2m-2}-1)(m,2)B_{m-1}\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}(2^m-1)B_{\frac{m}{2}}=0$$

und

$$(2^{2m}-1)B_m-(2^{2m-2}-1)(m,2)B_{m-1}\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}(m,m-1)(2^{m+1}-1)B_{\frac{m+1}{2}}=0$$

über. In diesen zwei letzten Gleichungen ist die zweite der oben (§. 1) erwähnten von Herrn Prof. Seidel gefundenen Formeln enthalten.

Ist m gerade und n ungerade so hat man

$$18)\quad [(n,1)-(m,1)](2^{m+n-1}-1)B_{\frac{m+n-1}{2}}-[(n,3)-(m,3)](2^{m+n-3}-1)B_{\frac{m+n-3}{2}}\ldots +(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^m-1)B_{\frac{m}{2}}=0$$

und wenn m ungerade, n gerade

$$19)\ [(n,1)-(m,1)](2^{m+n-1}-1)B_{\frac{m+n-1}{2}}-[(n,3)-(m,3)](2^{m+n-3}-1)B_{\frac{m+n-3}{2}}\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n}{2}-1}(n,n-1)(2^{m+1}-1)B_{\frac{m+1}{2}}=0$$

Setzt man also $m=2k$; $n=2k+2r$ so folgt aus 16)

$$20)\quad 2(2^{4k+2r}-1)B_{2k+r}-(2^{4k+2r-2}-1)[(n,2)+(m,2)]B_{2k+r-1}\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n}{2}}(2^{2k}-1)B_k=0$$

setzt man $m=2k-1$; $n=2k-1+2r+2$
so giebt 17)

$$21)\quad 2(2^{4k+2r}-1)B_{2k+r}-(2^{4k+2r-2}-1)[(n,2)+(m,2)]B_{2k+r-1}\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^{2k}-1)B_k=0$$

setzt man $m=2k$; $n=2k+2r+1$ so folgt aus 18)

$$22)\ [(n,1)-(m,1)](2^{4k+2r}-1)B_{2k+r}-[(n,3)-(m,3)](2^{4k+2r-2}-1)B_{2k+r-1}\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2^{2k}-1)B_k=0$$

und setzt man $m=2k-1$, $n=2k+2(r+1)$ so folgt aus 19)

$$23)\ [(n,1)-(m,1)](2^{4k+2r}-1)B_{2k+r}-[(n,3)-(m,3)](2^{4k+2r-2}-1)B_{2k+r-1}\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n}{2}-1}(2^{2k}-1)B_k=0$$

Die Formeln 20) und 22) gelten noch wenn man $k=1$ setzt, und zwar wenn man $s=r+2$ setzt, erhält man

$$20^*)\ 2(2^{2s}-1)B_s-(2^{2s-2}-1)(2s-2,2)+1)B_{s-1}\cdots+(-1)^{s-1}(2^2-1)B_1=0$$

$$22^*)\quad [(2s-1,1)-2](2^{2s}-1)B_s-(2s-1,3)(2^{2s-2}-1)B_{s-1}\cdots$$
$$+(-1)^{s-1}(2^2-1)B_1=0$$

Dies sind also zwei neue Formeln, in welchen alle Bernoulli'schen Zahlen von der ersten bis zur s^{ten} vorkommen, und die kein Glied enthalten, in welchem keine Bernoulli'sche Zahl vorkommt.

Dagegen bedürfen die Formeln 21) und 23), wenn man $k=1$ setzt, einer Modification, wie dies schon in ähnlicher Weise bei den Formeln 9) und 11) bemerkt worden ist. Da nemlich nun $m=2k-1=1$

und $\Delta^1 \mathfrak{F} = 2$ so geht $\Delta^m \mathfrak{F}^n$ in $\Delta \mathfrak{F}^n$ über und man erhält aus B¹) wenn n ungerade

$$\Delta \mathfrak{F}^n = -2[(2^{n+1}-1)f^{n+1}+(n,2)(2^{n-1}-1)f^{n-1}\ldots+(n,n-1)(2^2-1)f^2-1]$$

zugleich giebt A¹) wenn n ungerade

$$\Delta \mathfrak{F}^n = 2(2^{n+1}-1)f^{n+1}$$

Man hat daher

$$2(2^{n+1}-1)f^{n+1}+(n,2)(2^{n-1}-1)f^{n-1}\ldots+(2^2-1)(n,n-1)f^2-\tfrac{1}{2}=0$$

und diesem entsprechend, wenn man $n+1=2s$ setzt,

$$\begin{aligned}2(2^{2s}-1)B_s-(2^{2s-2}-1)(2s-1,2)B_{s-1}\ldots\\ +(-1)^{s-1}(2^2-1)(2s-1,2s-2)B_1+(-1)^s\tfrac{1}{2}=0\end{aligned}$$

Ist n gerade so giebt B¹)

$$\Delta \mathfrak{F}^n = -2[(n,1)(2^n-1)f^n+(n,3)(2^{n-2}-1)f^{n-2}\ldots+(n,n-1)(2^2-1)f^2-1]$$

zugleich folgt aus A¹)

$$\Delta \mathfrak{F}^n = -2(2^n-1)f^n$$

also

$$[(n,1)-1](2^n-1)f^n+(n,3)(2^{n-2}-1)f^{n-2}\ldots+(n,n-1)(2^2-1)f^2-\tfrac{1}{2}=0$$

woraus, wenn man $n=2s$ setzt,

$$\begin{aligned}[2s,1-1](2^{2s}-1)B_s-(2s,3)(2^{2s-2}-1)B_{s-1}\ldots\\ +(-1)^{s-1}(2s,2s-1)(2^2-1)B_1+(-1)^s\tfrac{1}{2}=0\end{aligned}$$

folgt.

4.

Eine neue Reihe und zwar viel verwickelterer Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen erhält man, wenn man mit Hülfe der oben (§. 2.) gefundenen Werthe

$$f^{2m} = -\Delta f^{2m} = \Delta f^{2m-1}$$

die Formeln A) und B) (ebend.) umbildet. Es sind auch hier wieder vier Fälle zu unterscheiden.

Setzt man $m = 2k$, $n = 2r$ so folgt aus A) wenn man überall $-\Delta f^{2a}$ statt f^{2a} setzt

$$\Delta^{2k} f^{2r} = -\Delta f^{2k+2r} - (2k, 2)\,\Delta f^{2k+2r-2} \ldots - (2k, 2k)\,\Delta f^{2r}$$

Entwickelt man nun in dieser Gleichung jeden der auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke nach der aus B) sich ergebenden Formel

$$\Delta f^{2r} = (2r, 0)\,\Delta^{2r+1} f + (2r, 1)\,\Delta^{2r} f \ldots + (2r, 2r-1)\,\Delta^2 f + (2r, 2r)\,\Delta f$$

und setzt man zugleich zur Abkürzung s statt $2k + 2r$ so dass

$$\Delta^{2k} f^{2r} = -(2k, 0)\,\Delta f^{s} - (2k, 2)\,\Delta f^{s-2} - (2k, 4)\,\Delta f^{s-4} \ldots - (2k, 2k)\,\Delta f^{s-2k}$$

so findet man $\Delta^{2k} f^{2r} =$

$$\begin{array}{ll} -(2k,0)\,[(s,0)\Delta^{s+1} f + (s,1)\,\Delta^{s} f + (s,2)\,\Delta^{s-1} f \ldots + (s, 2k)^{s-2k+1}\Delta f \ldots + (s,s)\,\Delta f] \\ -(2k,2)\,[\qquad (s-2,0)\Delta^{s-1} f \ldots + (s-2, 2k-2)\Delta^{s-2k+1} f \ldots + (s-2, s-2)\Delta f] \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ -(2k,2k)\,[\qquad (s-2k, 0)\,\Delta^{s-2k+1} f \ldots + (s-2k, s-2k)\,\Delta f] \end{array}$$

Schreibt man demnach

$$\Delta^{2k} f^{2r} = -A_0\,\Delta^{s+1} f - A_1\,\Delta^{s} f \ldots - A_{2l}\,\Delta^{s+1-2l} f - A_{2l+1}\,\Delta^{s-2l} f \ldots - A_s \Delta f$$

so ist

$$A_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)\,(s-2t, 2l-2t)$$

$$A_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)\,(s-2t, 2l-2t+1)$$

Auch ist $A_s = (2k, 0) + (2k, 2) \ldots + (2k, 2k) = 2^{2k-1}$

Da s gerade ist, so hat man $\Delta^{s+1} f = -(s+1)$, $\Delta^{s} f = s + f^{s}$ u. s. w. also

$$\begin{array}{r} \Delta^{2k} f^{2r} = A_0\,(s+1) - A_1 s \ldots + A_{2l}(s+1-2l) - A_{2l+1}(s-2l) \ldots + \tfrac{1}{2} A_s \\ - A_1 f^{s} - A_3 f^{s-2} \ldots - A_{2l+1} f^{s-2l} \ldots - A_{s-1} f^{2} \end{array}$$

Man schreibe die erste Horizontalreihe auf der rechten Seite in der Form

$$\begin{array}{r} A_0\,(s+1) - A_1(s+1-1) \ldots + A_{2l}(s+1-2l) - A_{2l+1}(s+1-2l-1) \ldots \\ + A_s(s+1-s) + \tfrac{1}{2} A_s \end{array}$$

so kann man zunächst den Theil

$$(s+1)(A_0-A_1\ldots+A_{2l}-A_{2l+1}\ldots+A_s)$$

ausscheiden, da er $=0$ ist. Denn man hat, wenn man statt A_0, A_1 u. s. w. ihre Werthe setzt,

$$\begin{aligned}A_0-A_1+\ldots+A_s=&(2k,0)[(s,0)-(s,1)+(s,2)-(s,3)\ldots+(s,s)]\\&+(2k,2)[(s-2,0)-(s-2,1)\ldots\qquad+(s-2)(s-2)]\\&\ldots\ldots\ldots\\&+(2k,2k)[(s-2k,0)-(s-2k,1)\ldots+(s-2k,s-2k)]\end{aligned}$$

wo jede Horizontalreihe auf der rechten Seite Null ist. Es bleibt mithin ausser $\frac{1}{2}A_s$ noch

$$A_1-2A_2+3A_3\ldots-sA_s$$

welcher Ausdruck ebenfalls Null ist. Denn aus den Werthen von $A_1\,A_2$ u. s. w. folgt

$$\begin{aligned}A_1-2A_2+3A_3\ldots-sA_s=&\\&(2k,0)[(s,1)-2(s,2)+3(s,3)\ldots\quad-s(s,s)]\\&-(2k,2)[2(s-2,0)-3(s-2,1)\ldots+s(s-2,s-2)]\\&-(2k,4)[4(s-4,0)-5(s-4,1)\ldots+s(s-4,s-4)]\\&\ldots\ldots\ldots\\&-(2k,2k)[2k(s-2k,0)-(2k+1)(s-2k,1)\ldots+s(s-2k,s-2k)]\end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich wenn g irgend eine ganze positive gerade Zahl bedeutet $(g,1)-2(g,2)\ldots-g(g,g)=0$ also verschwindet die erste Horizontalreihe, auch ist $(g,0)-(g,1)+(g,2)\ldots+(g,g)=0$ mithin auch, wenn α irgend eine Zahl bedeutet,

$$\alpha(g,0)-(\alpha+1)(g,1)+(\alpha+2)(g,2)\ldots+(\alpha+g)(g,g)=0$$

woraus sich ergiebt, dass auch alle folgenden Horizontalreihen Null sind. Es bleibt also nur $\frac{1}{2}A_s=2^{2k-2}$ übrig, und man hat mithin

$$\Delta^{2k}f^{2r}=-A_1f^s-A_3f^{s-2}\ldots-A_{2l+1}f^{s-2l}\ldots-A_{s-1}f^2+2^{2k-2}$$

Andererseits folgt aber aus A)

$$\Delta^{2k} f^{2r} = f^s + (2k, 2) f^{s-2} \ldots + (2k, 2k) f^{s-2k}$$

Man erhält demnach, wenn man hier wieder statt f^s u. s. w. die entsprechenden durch Bernoulli'sche Zahlen ausgedrückten Werthe setzt, eine neue Relation, welche heisst

$$A_1 B_{k+r} - A_3 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A_{k+r-1} B_1 + (-1)^{k+r} 2^{2k-2}$$
$$= -B_{k+r} + (2k, 2) B_{k+r-1} - (2k, 4) B_{k+r-2} \ldots + (-1)^{k-1} B_r$$

Ist z. B. $k = 2$, $r = 3$ so findet man

$A_0 = 1$, $A_1 = 10$, $A_2 = 51$, $A_3 = 168$, $A_4 = 379$, $A_5 = 594$, $A_6 = 645$, $A_7 = 476$, $A_8 = 228$, $A_9 = 64$, $A_{10} = 8$ also

$$10 B_5 - 168 B_4 + 594 B_3 - 476 B_2 + 64 B_1 - 4 = -B_5 + 6 B_4 - B_3$$
$$= \frac{116}{3.5.7.11}$$

Selbstverständlich könnte man dieser Relation noch eine andere Form geben, indem man statt der Formel A) die Formel B) benutzte, aus welcher sich im gegenwärtigen Falle nach §. 2.

$$\Delta^{2k} f^{2r} = f^s + (2r, 2) f^{s-2} \ldots + (2r, 2r) f^{2k}$$

ergeben würde. Ich werde dies in der Folge bei ähnlicher Veranlassung nicht wiederholt hervorheben.

Setzt man in A) überall statt f^{2a} nicht $-\Delta f^{2a}$ sondern Δf^{2a-1} so erhält man

$$\Delta^{2k} f^{2r} = \Delta f^{s-1} + (2k, 2) \Delta f^{s-3} \ldots + (2k, 2k) \Delta f^{s-2k-1}$$

Wendet man wieder auf die Ausdrücke Δf^{s-1}, Δf^{s-3} u. s. w. die Formel B) an, so findet man

$$\Delta^{2k} f^{2r} = A'_0 \Delta^s f + A'_1 \Delta^{s-1} f \ldots + A'_{2l} \Delta^{s-2l} f + A'_{2l+1} \Delta^{s-2l-1} \ldots + A'_{s-1} \Delta f$$

wo

$$A'_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)(s - 2t - 1, 2l - 2t)$$

$$A'_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)(s - 2t - 1, 2l - 2t + 1)$$

Setzt man nun statt $\Delta^s f$ u. s. w. die entsprechenden Werthe $s+f^s$ u. s. w. so folgt

$$\begin{aligned}\Delta^{2k}f^{2r} &=\\ A'_0 s - A'_1(s-1)\ldots + A'_{2l}(s-2l) - A'_{2l+1}(s-2l-1)\ldots - A'_{s-1} - \tfrac{1}{2}A'_{s-1}\\ + A'_0 f^s + A'_2 f^{s-2}\ldots + A'_{2l} f^{s-2l} + \ldots + A'_{s-2} f^2\end{aligned}$$

Schreibt man statt der ersten Horizontalreihe auf der rechten Seite

$$\begin{aligned}s(A'_0 - A'_1 \ldots + A'_{2l} - A'_{2l+1} \ldots - A'_{s-1}) - \tfrac{1}{2}A'_{s-1}\\ + A'_1 - 2A'_2 \ldots - 2lA'_{2l} + (2l+1)A'_{2l+1} + \ldots + (s-1)A'_{s-1}\end{aligned}$$

so kann man wieder ähnlich wie oben zeigen, dass dieser Ausdruck sich auf $-\frac{1}{2}A'_{s-1}$ reducirt, denn man hat

$$\begin{aligned}A'_0 - A'_1 \ldots - A'_{s-1} &= (2k,0)[(s-1,0)-(s-1,1)\ldots-(s-1,s-1)]\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + (2k,2k)[(s-1-2k,0)-(s-1-2k,1)\ldots-(s-1-2k,s-1-2k)]\end{aligned}$$

$=0$ da jede Horizontalreihe auf der rechten Seite Null ist. Ferner ist

$$\begin{aligned}&A'_1 - 2A'_2 \ldots + (s-1)A'_{s-1}\\ &= (2k,0)[(s-1,1)-2(s-1,2)\ldots+(s-1)(s-1,s-1)]\\ &\quad -(2k,2)[2(s-3,0)-3(s-3,1)\ldots-(s-1)(s-3,s-3)]\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad -(2k,2k)[2k(s-2k-1,0)\ldots-(s-1)(s-2k-1,s-2k-1)]\end{aligned}$$

Nun ist, wenn u eine ungerade Zahl bedeutet, $(u,1)-2(u,2)\ldots+u(u,u)=0$ (abgesehen von dem Falle wenn $u=1$, wo man nur $(1,1)=1$ hat) also verschwindet die erste Horizontalreihe, und da auch $(u,0)-(u,1)+(u,2)\ldots-(u,u)=0$ so verschwinden auch alle folgenden Horizontalreihen, wenn nicht, wovon vorläufig abgesehen wird, $r=1$ und also $s-2k-1=1$. In diesem *Ausnahmefalle* nemlich wird die letzte Horizontalreihe $-(2k,2k)[2k(1,0)-(2k+1)(1,1)]=1$. Berücksichtigt man nun noch dass $A'_0=1$, $A'_{s-1}=2^{2k-1}$ so folgt

$$\Delta^{2k}f^{2r} = f^s + A'_2 f^{s-2}\ldots + A'_{2l}f^{s-2l}\ldots + A'_{s-2}f^2 - 2^{2k-2}$$

Vergleicht man wieder diesen Ausdruck mit dem aus A) erhaltenen Werthe von $\Delta^{2k} f^{2r}$ so führt dies zu der Relation

$$\begin{aligned} A'_2 B_{k+r-1} - A'_4 B_{k+r-2} \ldots + (-1)^{k+r} A'_{s-2} B_1 + (-1)^{k+r+1} 2^{2k-2} \\ = (2k, 2) B_{k+r-1} - 2(k, 4) B_{k+r-2} \ldots + (-1)^{k-1} B_r \end{aligned}$$

Diese Formel bedarf jedoch einer Modification wenn $r = 1$. Dann wird nemlich die Gleichung A)

$$\Delta^{2k} f^2 = f^{2k+2} + (2k, 2) f^{2k} \ldots + (2k, 2k) f^2$$

Nun ist $f^2 = f^1 + \Delta f^1 = \Delta f^1 - \frac{1}{2}$; während man im Allgemeinen Δf^{2a-1} statt f^{2a} zu setzen hat, muss man mithin statt f^2 nicht Δf^1 sondern $\Delta f^1 - \frac{1}{2}$ setzen. Hierdurch, und indem man zugleich berücksichtigt, dass nun, wie oben bemerkt wurde,

$$A'_1 - 2A'_2 \ldots + (s-1) A'_{s-1} = 1$$

ist, findet man

$$\Delta^{2k} f^2 = f^{2k+2} + A'_2 f^{2k} \ldots + A_{s-2} f^2 - 2^{2k-2} + \frac{1}{2}$$

woraus

$$\begin{aligned} A'_2 B_k - A'_4 B_{k-1} \ldots + (-1)^{k-1} A'_{2k} B_1 + (-1)^{k+r-1} (2^{2k-2} - \tfrac{1}{2}) \\ = (2k, 2) B_k - (2k, 4) B_{k-1} \ldots + (-1)^{k-1} B_1 \end{aligned}$$

folgt.

Ist z. B. $k = 2$ und zugleich $r = 1$ so findet man $A'_2 = 16$, $A'_4 = 24$ und erhält

$$16 \cdot \tfrac{1}{30} - 24 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 - \tfrac{1}{2} = 6 \cdot \tfrac{1}{30} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{30}$$

Ist $m = 2k$, $n = 2r + 1$ so findet man aus A) vermittelst $f^{2a} = -\Delta f^{2a}$

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = (2k, 1) \Delta f^s + (2k, 3) \Delta f^{s-2} \ldots + (2k, 2k-1) \Delta f^{s-2k+2}$$

Die Anwendung der Formel B) giebt nun

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = A_0 \Delta^{s+1} f + A_1 \Delta^s f \ldots + A_{2l} \Delta^{s+1-2l} f + A_{2l+1} \Delta^{s-2l} \ldots + A_s \Delta f$$

Hier ist

$$A_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-2t, 2l-2t)$$

$$A_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-2t, 2l-2t+1)$$

Die Substitution $\Delta^{s+1} f = -(s+1)$, $\Delta^s f = s + f^s$ u. s. w. führt alsdann zu

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = -A_0 (s+1) + A_1 s \ldots - A_s - \tfrac{1}{2} A_s$$
$$+ A_1 f^s + A_3 f^{s-2} \ldots + A_{s-1} f^2$$

und dies reducirt sich wieder auf

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = A_1 f^s + A_3 f^{s-2} \ldots + A_{s-1} f^2 - 2^{2k-2}$$

Zugleich folgt unmittelbar aus A)

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = -(2k, 1) f^s - (2k, 3) f^{s-2} \ldots - (2k, 2k-1) f^{s-2k+2}$$

woraus mithin die neue Relation

$$A_1 B_{k+r} - A_3 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A_{2k+2r-1} B_1 + (-1)^{k+r} 2^{2k-2}$$
$$= -(2k, 1) B_{k+r} + (2k, 3) B_{k+r-1} \ldots + (-1)^k (2k, 2k-1) B_{r+1}$$

folgt. Diese Formel bleibt noch gültig wenn $r = 0$. Denn in diesem Falle, wo also $m = 2k$, $n = 1$ folgt aus A)

$$\Delta^{2k} f^1 = -(2k, 1) f^{2k} \ldots - (2k, 2k-1) f^2 + f^1$$

und zugleich

$$\Delta^{2k} f^1 = (2k, 1) \Delta f^{2k} \ldots + (2k, 2k-1) \Delta f^2 + f^1$$

so dass, nach Weglassung des in beiden Formeln vorkommenden Gliedes f^1 alles ungeändert wie früher bleibt. Die Substitution Δf^{2a-1} für f^{2a} führt bei derselben Behandlung auf

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = -A'_0 \Delta^s f - A'_1 \Delta^{s-1} f \ldots - A'_{s-1} \Delta f$$

wo

$$A'_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-2t-1, 2l-2t)$$

$$A'_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-2t-1, 2l-2t+1)$$

woraus

$$\Delta^{2k} f^{2r+1} = -A'_0 f^s - A'_2 f^{s-2} \ldots - A'_{s-2} f^2 + 2^{2k-2}$$

Dies mit den vorhergehenden Ausdrücken für $\Delta^{2k} f^{2r+1}$ verglichen führt also wieder zu neuen Beziehungen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen.

Jedoch bedarf diese Formel wieder einer Modification wenn $r = 0$ also $s = 2k$. Da man nemlich nun in dem Ausdruck

$$\Delta^{2k} f^1 = -(2k, 1) f^{2k} \ldots - (2k, 2k-1) f^2 + f^1$$

wieder $\Delta f^1 - \frac{1}{2}$ statt f^2 setzen muss, so ergiebt sich

$$\Delta^{2k} f^1 = -(2k, 1)\Delta f^{2k} \ldots - (2k, 2k-1)\Delta f^1 + k + f^1$$

Indem man nun diesen Ausdruck mit Hülfe der Formel B) in die Form

$$-A'_0 \Delta^{2k} f - A'_1 \Delta^{2k-1} f \ldots - A'_{2k-1} \Delta f + k + f^1$$

bringt und dies wieder in

$$\begin{aligned} &-2kA'_0 + (2k-1)A'_1 \ldots + A'_{2k-1} + \tfrac{1}{2} A'_{2k-1} + k + f^1 \\ &-A'_0 f^{2k} - A'_2 f^{2k-2} \quad \ldots \quad - A'_{2k-2} f^2 \end{aligned}$$

verwandelt, zeigt sich dass zwar $-A'_0 + A'_1 \ldots + A'_{2k-1}$ wieder Null wird, aber $-A'_1 + 2A'_2 \ldots + (2k-2)A'_{2k-2} - (2k-1)A'_{2k-1}$ ist

$$\begin{aligned} = &-(2k, 1)[(2k-1, 1) - 2(2k-1, 2) \ldots + (2k-1)(2k-1, 2k-1)] \\ &+(2k, 3)[2(2k-3, 0) - 3(2k-3, 1) \ldots - (2k-1)(2k-3, 2k-3)] \\ &\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+(2k, 2k-1)[(2k-2)(1, 0) - (2k-1)(1, 1)] \end{aligned}$$

Hier sind alle einzelnen Horizontalreihen Null nur nicht die letzte, welche vielmehr $-2k$ ist. Hierdurch ergiebt sich

$$\Delta^{2k} f^1 = -A'_0 f^{2k} - A'_2 f^{2k-2} \ldots - A'_{2k-2} f^2 + 2^{2k-2} - k + f^1$$

was mit $\Delta^{2k} f^1 = -(2k, 1) f^{2k} \ldots -(2k, 2k-1) f^2 + f^1$

verglichen zu der Relation

$$\begin{aligned} A'_0 B_k - A'_2 B_{k-1} \ldots + (-1)^{k+1} A_{2k-2} B_1 + (-1)^k 2^{2k-2} + (-1)^{k-1} k \\ = (2k, 1) B_k - (2k, 3) B_{k-1} \ldots + (-1)^{k+1} (2k, 2k-1) B_1 \end{aligned}$$

führt.

Ist $m = 2k+1$, $n = 2r$ so führen die vorhergehenden Betrachtungen unter Anwendung der Gleichung $f^{2a} = -\Delta f^{2a}$ zu

$$\Delta^{2k+1} f^{2r} = A_0 \Delta^{s+1} f + A_1 \Delta^s f \ldots + A_{2l} \Delta^{s+1-2l} f + A_{2l+1} \Delta^{s-2l} \ldots + A_s \Delta f$$

$$\text{wo} \quad A_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t+1)(s-2t, 2l-2t)$$

$$A_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t+1)(s-2t, 2l-2t+1)$$

woraus dann weiter

$$\Delta^{2k+1} f^{2r} = A_1 f^s + A_3 f^{s-2} \ldots + A_{s-1} f^2 - 2^{2k-1}$$

folgt. Dies mit dem unmittelbar aus A) folgenden Ausdruck für $\Delta^{2k+1} f^{2r}$ zusammen gestellt, giebt

$$\begin{aligned} A_1 B_{k+r} - A_3 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A_{2k+2r-1} B_1 + (-1)^{k+r} 2^{2k-1} \\ = -(2k+1, 1) B_{k+r} + (2k+1, 3) B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k-1} B_r \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Gleichung $f^{2a} = \Delta f^{2a-1}$ dagegen findet man

$$\Delta^{2k+1} f^{2r} = -A'_0 \Delta^s f - A'_1 \Delta^{s-1} f \ldots - A'_{s-1} \Delta f$$

$$\text{wo} \quad A'_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t+1)(s-2t-1, 2l-2t)$$

$$A'_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t+1)(s-2t-1, 2l-2t+1)$$

und hieraus die Relation

$$A'_0 B_{k+r} - A'_2 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A'_{2k+2r-2} B_1 + (-1)^{k+r} 2^{2k-1}$$
$$= (2k+1, 1) B_{k+r} \ldots + (-1)^k B_r$$

Ist jedoch $r = 1$ so muss wieder die oben besprochene Modification eintreten und man hat

$$A'_0 B_{k+1} - A'_2 B_k \ldots + (-1)^k A'_{2k} B_1 + (-1)^{k+1} (2^{2k-1} - \tfrac{1}{2})$$
$$= (2k+1, 1) B_{k+1} \ldots + (-1)^k B_1$$

Ist $m = 2k+1$, $n = 2r+1$ so führt die Anwendung von $f^{2a} = -\Delta f^{2a}$ zu

$$\Delta^{2k+1} f^{2r+1} = -A_0 \Delta^{s+2} f - A_1 \Delta^{s+1} f \ldots - A_{2l} \Delta^{s+2-2l} f - A_{2l+1} \Delta^{s+1-2l} f \ldots$$
$$- A_{s+1} \Delta f$$

$$\text{wo} \quad A_{2l} = -\sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t)(s+2-2t, 2l+1-2t)$$

$$A_{2l+1} = -\sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t)(s+2-2t, 2l+2-2t)$$

woraus dann weiter

$$A_0 B_{k+r+1} - A_2 B_{k+r} \ldots + (-1)^{k+r} A_{2k+2r} B_1 + (-1)^{k+r+1} 2^{2k-1}$$
$$= -B_{k+r+1} + (2k+1, 2) B_{k+r} \ldots + (-1)^{k+1} (2k+1, 2k) B_{r+1}$$

folgt.

Dagegen führt die Anwendung von $f^{2a} = \Delta f^{2a-1}$ zu

$$\Delta^{2k+1} f^{2r+1} = A'_0 \Delta^{s+2} f + A'_1 \Delta^{s+1} f \ldots + A'_{s+1} \Delta f$$

$$\text{wo} \quad A'_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t)(s+1-2t, 2l-2t)$$

$$A'_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t)(s+1-2t, 2l+1-2t)$$

und hieraus folgt, da $A'_0 = 1$

$$A'_2 B_{k+r} - A'_4 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A'_{2k+2r} B_1 + (-1)^{k+r} 2^{2k-1}$$
$$= (2k+1, 2) B_{k+r} - (2k+1, 4) B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+1} (2k+1, 2k) B_{r+1}$$

Ist jedoch $r = 0$ so muss man im ersten Theile dieser Gleichung noch das Glied $(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}$ hinzufügen, so dass man

$$A'_2 B_k - A'_4 B_{k-1} \ldots + (-1)^{k-1} A'_{2k} B_1 + (-1)^k \left(2^{2k-1} - \frac{2k+1}{2}\right)$$
$$= (2k+1,2) B_k - (2k+1,4) B_{k-1} \ldots + (-1)^{k+1} (2k+1,2k) B_1$$

hat. In diesem Falle nemlich fände man unmittelbar aus A) den Ausdruck

$$\Delta^{2k+1} f^1 = f^{2k+2} \ldots + (2k+1,2k) f^2 - (2k+1,2k+1) f^1$$

welcher wegen $f^2 = \Delta f^1 - \frac{1}{2}$ in

$$\Delta^{2k+1} f^1 = \Delta f^{2k+1} \ldots + (2k+1,2k) \Delta f^1 - (2k+1,2k+1) f^1 - \frac{2k+1}{2}$$

übergeht.

5.

Eine zweite ähnliche Reihe Relationen erhält man, wenn man von den Ausdrücken ausgeht, welche oben (§. 3.) durch $\mathfrak{F}^m$ bezeichnet worden sind. Da nemlich $\mathfrak{F} = -1$, $\mathfrak{F}^1 = 1$, $\mathfrak{F}^{2m} = 2(2^m - 1) f^{2m}$; $\mathfrak{F}^{2m+1} = 0$, so ist, sobald nicht $m = 0$, $\mathfrak{F}^{2m} = \Delta \mathfrak{F}^{2m-1} = -\Delta \mathfrak{F}^{2m}$ oder $\mathfrak{F}^{2m} = -2(2^m - 1) \Delta f^{2m}$.

Geht man daher von den Gleichungen A^1) und B^1) aus so findet man, wenn man $m = 2k$, $n = 2r$ und, wie früher, $2k + 2r = s$ setzt, indem man die Gleichung $\mathfrak{F}^{2m} = -2(2^m - 1) \Delta f^{2m}$ benutzt, aus A^1)

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = -2(2^s - 1) \Delta f^s - (2k,2)\, 2(2^{s-2} - 1) \Delta f^{s-2} \ldots - 2(2^{2r} - 1) \Delta f^{2r}$$

Entwickelt man hier wieder die Werthe von Δf^s Δf^{s-2} u. s. w. nach Formel B) so findet man

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = -A_0 \Delta^{s+1} f - A_1 \Delta^s f \ldots - A_{2l} \Delta^{s+1-2l} f - A_{2l+1} \Delta^{s-2l} f \ldots - A_s \Delta f$$

wo
$$A^{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k,2t)\, 2(2^{s-2t} - 1)(s-2t, 2l-2t)$$

$$A_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k,2t)\, 2(2^{s-2t} - 1)(s-2t, 2l+1-2t)$$

Indem man nun wieder $\Delta^{s+1} f = -(s+1)$, $\Delta^s f = s + f^s$ u. s. w. setzt, beweist man, dass dieser Ausdruck sich auf

$$-A_1 f^s - A_3 f^{s-2} \ldots - A_{s-1} f^2 + \tfrac{1}{2} A_s$$

reducirt. Vergleicht man dies mit dem unmittelbar aus A¹) folgenden Ausdruck

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = 2(2^s-1) f^s + (2k, 2)\, 2(2^{s-2}-1) f^{s-2} \ldots + (2k, 2k)\, 2(2^{2r}-1) f^{2r}$$

so findet man

$$A_1 B_{k+r} - A_3 B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k+r-1} A_{s-1} B_1 + (-1)^{k+r} A_{\frac{s}{2}}$$
$$= -2(2^s-1) B_{k+r} + (2k, 2)\, 2(2^{s-2}-1) B_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k-1}\, 2(2^r-1) B_r$$

Geht man dagegen von der ursprünglichen Form der Gleichung A¹) aus, nach welcher

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = \mathfrak{F}^s + (2k, 2) \mathfrak{F}^{s-2} \ldots + (2k, 2k) \mathfrak{F}^{2r}$$

und setzt $-\Delta \mathfrak{F}^{2a}$ statt $\mathfrak{F}^{2a}$ so findet man

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = -\Delta \mathfrak{F}^s - (2k, 2) \Delta \mathfrak{F}^{s-2} \ldots - (2k, 2k) \Delta \mathfrak{F}^{2r}$$

Nun folgt aus der Gleichung B¹), wenn man $m = 1$ setzt,

C¹) $$\Delta \mathfrak{F}^n = \Delta^{n+1} \mathfrak{F} + (n, 1) \Delta^n \mathfrak{F} + (n, 2) \Delta^{n-1} \mathfrak{F} \ldots + (n, n) \Delta \mathfrak{F}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man also jede der Grössen $\Delta \mathfrak{F}^s$, $\Delta \mathfrak{F}^{s-2}$ ... entwickeln und erhält

$$\Delta^{2k} \mathfrak{F}^{2r} = -A_0 \Delta^{s+1} \mathfrak{F} - A_1 \Delta^s \mathfrak{F} \ldots - A_{2l} \Delta^{s-2l+1} \mathfrak{F} - A_{2l+1} \Delta^{s-2l} \mathfrak{F} \ldots - A_s \Delta \mathfrak{F}$$

wo $$A_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)(s-2t, 2l-2t)$$

$$A^{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)(s-2t, 2l+1-2t)$$

Berücksichtigt man nun die oben (§. 3.) bewiesenen Gleichungen $\Delta \mathfrak{F} = 2$; $\Delta^{2m+1} \mathfrak{F} = 1$; $\Delta^{2m} \mathfrak{F} = -2(2^m-1) f^{2m} - 1$

so findet man hiernach

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^{2r} = 2[A_1(2^s-1)f^s + A_3(2^{s-2}-1)f^{s-2}\ldots + A_{s-1}(2^2-1)f^2 - 2^{2k-2}]$$

woraus sich mithin wieder neue Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen ergeben.

Wieder andere Relationen findet man, wenn man die Substitution $\Delta\mathfrak{F}^{2a-1} = \mathfrak{F}^{2a}$ benutzt. Dies giebt zunächst

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^{2r} = \Delta\mathfrak{F}^{s-1} + (2k, 2)\Delta\mathfrak{F}^{s-3}\ldots\ldots + (2k, 2k)\Delta\mathfrak{F}^{2r-1}$$

Mit Hülfe der Gleichung C[1]) findet man hieraus weiter

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^{2r} = A_0\Delta^s\mathfrak{F} + A_1\Delta^{s-1}\mathfrak{F}\ldots + A_{2l}\Delta^{s-2l}\mathfrak{F} + A_{2l+1}\Delta^{s-2l-1}\mathfrak{F}\ldots + A_{s-1}\Delta\mathfrak{F}$$

wo
$$A_{2l} = \sum_{t=0}^{t=l}(2k, 2t)(s-1-2t, 2l-2t)$$
$$A_{2l+1} = \sum_{t=0}^{t=l}(2k, 2t)(s-1-2t, 2l+1-2t)$$

und die weitere Entwickelung giebt

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^{2r} = -2[A_0(2^s-1)f^s + A_2(2^{s-2}-1)f^{s-2}\ldots + A_{s-2}(2^2-1)f^2 - 2^{2k-2}]$$

In dem besonderen Falle wenn $r = 1$ muss wieder eine Modification eintreten. Da nemlich dann aus A[1])

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}^{2k+2} + (2k, 2)\mathfrak{F}^{2k} + \ldots + (2k, 2k)\mathfrak{F}^2$$

folgt, so muss man, da $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}^1 + \Delta\mathfrak{F}^1$, auch statt $\mathfrak{F}^2$ nicht $\Delta\mathfrak{F}^1$ sondern $\Delta\mathfrak{F}^1 + 1$ substituiren. Hierdurch erhält man

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^2 = A_0\Delta^{2k+2}\mathfrak{F} + A_1\Delta^{2k+1}\mathfrak{F}\ldots + A_{2k+1}\Delta\mathfrak{F} + 1$$

und die Endformel wird

$$\Delta^{2k}\mathfrak{F}^2 = -2[A_0(2^{2k+2}-1)f^{2k+2}\ldots + A_{2k}(2^2-1)f^2 - 2^{2k-2}] + 1$$

Alles Vorhergehende bezieht sich auf die Voraussetzung, dass m und n gerade Zahlen sind. Die drei anderen möglichen Fälle, welche oben ausführlich behandelt worden sind, würden auch hier wieder zu neuen Beziehungen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen führen. Doch will ich hierbei nicht nochmals in das Einzelne eingehen.

6.

Setzt man $\frac{2}{e^x+e^{-x}} = \varphi x$ so ist $\varphi 0 = 1$, $\varphi^{2k} 0 = (-1)^k E_k$ wo E_k den k^{ten} Secantencoefficienten oder, wie es im Folgenden ausgedrückt wird, die k^{te} Euler'sche Zahl bedeutet, dagegen $\varphi^{2k+1} = 0$ auch wenn $k = 0$. Statt $\varphi^r 0$ soll im Folgenden nur φ^r geschrieben werden.

Setzt man $u_r = \varphi^r$ so findet man aus der Formel A) in §. 2

$$\Delta^m \varphi = \varphi^m - (m,1)\varphi^{m-1} + (m,2)\varphi^{m-2} \ldots + (-1)^m \varphi$$

also, wenn man $2m$ statt m setzt

$$\Delta^{2m} \varphi = \varphi^{2m} + (2m,2)\varphi^{2m-2} + (2m,4)\varphi^{2m-4} \ldots + \varphi$$

Aus $\frac{2}{e^x+e^{-x}} = \varphi x$ folgt aber

$$\left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)\left(\varphi + \varphi^1 . x + \varphi^2 . \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right) = 1$$

und hieraus, wie schon Euler bemerkt hat (Instit. calc. diff. §. 226.)

$$\varphi^{2m} + (2m,2)\varphi^{2m-2} + (2m,4)\varphi^{2m-4} + \ldots + \varphi = 0$$

oder

$$E_m - (2m,2)E_{m-1} + (2m,4)E_{m-2} \ldots + (-1)^{m-1}(2m,2m-2)E_1 + (-1)^m = 0$$

Demnach hat man

$$\Delta^{2m}\varphi = 0$$

wobei jedoch zu beachten, dass, wenn $m = 0$, man nicht $\Delta^0 \varphi = 0$ sondern $= \varphi$ also $= 1$ hat.

Setzt man aber $2m+1$ statt m so findet man

$$\Delta^{2m+1}\varphi = -(2m+1,1)\varphi^{2m} - (2m+1,3)\varphi^{2m-2} \ldots - (2m+1,2m-1)\varphi^2 - \varphi$$

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung hat man aber

$$\varphi x . e^{-x} = \frac{2}{e^{2x}-1} \cdot \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{2}{e^{2x}-1}\left(1 - \frac{2}{e^{2x}+1}\right) = \frac{f2x - f4x}{x}$$

d. h. $(\varphi + \varphi^2 . \frac{x^2}{1.2} \ldots + \frac{\varphi^{2m} . x^{2m}}{1..2m} + \ldots)(1 - x + \frac{x^2}{1.2} \ldots + \frac{x^{2m}}{1..2m} \ldots)$

$$= 2f^1 + \ldots + (2^{2m} - 2^{4m}) \frac{f^{2m}}{1....2m} x^{2m-1} \ldots .$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von x^{2m-1} auf beiden Seiten, so findet man

$$\frac{2^{2m}(1-2^{2m})}{1...2m} f^{2m} = -\frac{\varphi^{2m-2}}{1..2m-2} - \frac{\varphi^{2m-4}}{1..2m-4} . \frac{1}{1.2.3} \ldots - \frac{1}{1..2m-1}$$

oder

$$\frac{2^{2m-1}(2^{2m}-1)}{m} f^{2m} = (2m-1, 1)\varphi^{2m-2} + (2m-1, 3)\varphi^{2m-4} \ldots + 1$$

d. h. $2^{2m-1}(2^{2m}-1)\frac{B_m}{m} = (2m-1, 1) E_{m-1} - (2m-1, 3) E_{m-2} \ldots + (-1)^{m-1}$

Vergleicht man diesen bekannten Ausdruck*) mit dem oben gefundenen Werthe von $\Delta^{2m+1}\varphi$ so findet man

$$\Delta^{2m+1}\varphi = -\frac{2^{2m+1}(2^{2m+2}-1)}{m+1} f^{2m+2} = (-1)^{m+1} 2^{2m+1}(2^{2m+2}-1)\frac{B_{m+1}}{m+1}$$

oder

$$\Delta^{2m-1}\varphi = -\frac{2^{2m-1}(2^{2m}-1) f^{2m}}{m}$$

also wenn man $2m = s$ setzt,

$$\Delta^{s-1}\varphi = -\frac{2^s(2^s-1)f^s}{s} = (-1)^{\frac{s-2}{2}} . \frac{2^s(2^s-1)}{s} B_{\frac{s}{2}}$$

Setzt man φ^n statt f^n so folgt nun aus den Formeln A) und B)

A'') $\Delta^m \varphi^n = \varphi^{m+n} - (m, 1)\varphi^{m+n-1} + (m, 2)\varphi^{m+n-2} \ldots + (-1)^m (m, m)\varphi^n$

B'') $\Delta^m \varphi^n = \Delta^{m+n}\varphi + (n, 1)\Delta^{m+n-1}\varphi + (n, 2)\Delta^{m+n-2}\varphi \ldots + (n, n)\Delta^m\varphi$

Es sind hier wieder vier Fälle zu unterscheiden:

Sind m und n gerade und zwar $m = 2k$; $n = 2r$ so hat man wenn

*) Mathem. Abhandlungen von Dr. H. J. Scherk p. 5; auch »Ueber Bernoullische Zahlen« Inauguraldissertation von G. F. Meyer, Göttingen 1859 p. 43.

man, wie früher, $2k+2r=s$ setzt, und die Gleichung $\Delta^{2m}\varphi=0$ berücksichtigt,

a) $$\Delta^{2k}\varphi^{2r}=\varphi^s+(2k,2)\varphi^{s-2}\ldots+(2k,2k)\varphi^{2r}$$

a') $$\Delta^{2k}\varphi^{2r}=(2r,1)\Delta^{s-1}\varphi+(2r,3)\Delta^{s-3}\varphi\ldots+(2r,2r-1)\Delta^{2k+1}\varphi$$

also

$$\varphi^s+(2k,2)\varphi^{s-2}\ldots+\varphi^{2r}=-\frac{(2r,1)2^s(2^s-1)f^s}{s}-\frac{(2r,3)2^{s-2}(2^{s-2}-1)f^{s-2}}{s-2}\ldots$$
$$-(2r,2r-1)2^{2k+2}\frac{(2^{2k+2}-1)f^{2k+2}}{2k+2}$$

Vermöge der Gleichungen $\varphi^{2k}=(-1)^kE_k$ und $f^{2k}=(-1)^{k-1}B_k$ erhält man also hieraus die folgende Relation zwischen den Euler'schen und Bernoulli'schen Zahlen

23) $$E_{k+r}-(2k,2)E_{k+r-1}\ldots+(-1)^kE_r=(2r,1)2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)\frac{B_{k+r}}{k+r}-$$
$$(2r,3)2^{2k+2r-3}(2^{2k+2r-2}-1)\frac{B_{k+r-1}}{k+r-1}\ldots+(-1)^{r+1}(2r,2r-1)2^{2k+1}(2^{2k+2}-1)\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

In dem besonderen Falle wenn $r=1$ giebt dies

23') $$2^{2k+2}(2^{2k+2}-1)\frac{B_{k+1}}{k+1}=E_{k+1}-(2k,2)E_k\ldots+(-1)^kE_1$$

ein Ausdruck einer Bernoulli'schen Zahl durch Euler'sche Zahlen welcher, soviel ich weiss, noch nicht bekannt ist. Da die Euler'schen Zahlen ganze Zahlen sind, so folgt hieraus, dass sobald k eine gerade Zahl und mithin $k+1$ kein Faktor von 2^{2k+2} ist, der Zähler von B_{k+1} durch $k+1$ theilbar sein muss, sobald $k+1$ keinen gemeinschaftlichen Faktor mit $2^{2k+2}-1$ hat. Der Satz gilt also namentlich, wenn $k+1$ eine Primzahl ist, die Zahl 3 ausgenommen, weil dann immer $k+1$ gegen $2^{2k+2}-1$ Primzahl ist; man hat das bis jetzt nur mit Hülfe des Staudt'schen Theorems bewiesen.

Setzt man aber $k=0$ und berücksichtigt dass nun, da $\Delta^m\varphi=\Delta^0\varphi=1$, aus B'') folgt

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = (2r,1)\Delta^{s-1}\varphi \ldots + (2r, 2r-1)\Delta\varphi + 1$$

so erhält man die Relation

$$E_r = (2r,1)\,2^{2r-1}(2^{2r}-1)B_{\frac{r}{r}} \ldots + (-1)^{r+1}(2r, 2r-1)\,2\,(2^2-1)B_1 + (-1)^r$$

die schon Scherk gefunden hat*).

Ist m gerade $= 2k$ und n ungerade $= 2r+1$ so folgt aus A'') und B'')

b) $\quad \Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = -(2k,1)\varphi^s - (2k,3)\varphi^{s-2} \ldots - (2k, 2k-1)\varphi^{2r+2}$

b') $\quad \Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = \Delta^{s+1}\varphi + (2r+1, 2)\Delta^{s-1}\varphi \ldots + (2r+1, 2r)\Delta^{2k+1}\varphi$

und demnach

24) $\quad (2k,1)E_{k+r} - (2k,3)E_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k-1}(2k, 2k-1)E_{r+1}$

$$= \frac{2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1)B_{k+r+1}}{k+r+1} - \frac{(2r+1,2)\,2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)B_{k+r}}{k+r} \ldots$$

$$+ (-1)^r(2r+1, 2r)\,2^{2k+1}\frac{(2^{2k+2}-1)B_{k+1}}{k+1}$$

Setzt man $r = 0$ so geht dieser Ausdruck in

24') $\quad \dfrac{2^{2k+1}(2^{2k+2}-1)B_{k+1}}{k+1} = (2k,1)E_k - (2k,3)E_{k-1} \ldots + (-1)^{k-1}(2k, 2k-1)E_1$

über. Dies ist also neben 23') eine zweite Formel, durch welche eine Bernoulli'sche Zahl vermittelst Euler'scher Zahlen ausgedrückt wird, ohne dass die Formel ein von diesen Zahlen unabhängiges Glied enthält.

Setzt man dagegen $k = 1$ und zugleich $r-1$ statt r so erhält man

24'') $\quad E_r = 2^{2r}(2^{2r+2}-1)B_{\frac{r+1}{r+1}} - (2r-1, 2)\,2^{2r-2}(2^{2r}-1)B_{\frac{r}{r}} \ldots$

$$+ (-1)^{r-1}(2r-1, 2r-2)\,2^2(2^4-1)B_{\frac{2}{2}}$$

also eine Euler'sche Zahl durch eine Formel ausgedrückt, welche die

---

*) A. a. O. p. 5 Form. 2.

Bernoulli'schen Zahlen bis zur zweiten und kein von diesen Zahlen unabhängiges Glied enthält.

Setzt man aber $k=0$ und zugleich $r-1$ statt r so führt dies zu folgender neuen Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen

$$2^{2r-1}(2^{2r}-1)B_{\frac{r}{r}}-(2r-1,2)\,2^{2r-3}.(2^{2r-2}-1)B_{\frac{r-1}{r-1}}\ldots$$
$$+(-1)^{r-1}2.(2^2-1)B_1+(-1)^r=0$$

Ist $m=2k+1$ und $n=2r$ so ist

$$\text{c)}\quad \Delta^{2k+1}\varphi^{2r}=-(2k+1,1)\,\varphi^{s}-(2k+1,3)\varphi^{s-2}\ldots-(2k+1,2k+1)\varphi^{2r}$$
$$=\Delta^{s+1}\varphi+(2r,2)\Delta^{s-1}\varphi\ldots+(2r,2r)\Delta^{2k+1}\varphi$$

demnach

$$25)\quad (2k+1,1)E_{k+r}-(2k+1,3)E_{k+r-1}\ldots+(-1)^kE_r=$$
$$2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1)B_{\frac{k+r+1}{k+r+1}}-(2r,2)\,2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)B_{\frac{k+r}{k+r}}$$
$$\ldots+(-1)^r2^{2k+1}(2^{2k+2}-1)B_{\frac{k+1}{k+1}}$$

Hieraus folgt, wenn man $k=0$ setzt

$$25')\; E_r=2^{2r+1}(2^{2r+2}-1)B_{\frac{r+1}{r+1}}-(2r,2)2^{2r-1}(2^{2r}-1)B_{\frac{r}{r}}\ldots+(-1)^r2(2^2-1)B_1{}^{*)}$$

eine ähnliche Formel wie 24'') nur dass hier noch die erste Bernoulli'sche Zahl vorkommt.

Ist $m=2k+1$, $n=2r+1$ so hat man

$$\Delta^{2k+1}\varphi^{2r+1}=\varphi^{s+2}+(2k+1,2)\varphi^{s}\ldots+(2k+1,2k)\varphi^{2r+2}$$
$$=(2r+1,1)\Delta^{2k+2r+1}\varphi+(2r+1,3)\Delta^{2k+2r-1}\varphi\ldots+\Delta^{2k+1}\varphi$$

also

---

*) Diese Gleichung kann man auch unmittelbar aus $\varphi^{2r}=-\Delta\varphi^{2r}$ finden wenn man $\Delta\varphi^{2r}$ nach Formel B'') entwickelt.

26) $E_{k+r+1} - (2k+1,2)E_{k+r} \ldots + (-1)^k (2k+1,2k) E_{r+1} =$

$$(2r+1,1)\, 2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1) B_{\frac{k+r+1}{k+r+1}} \ldots + (-1)^r\, 2^{2k+1}(2^{2k+2}-1) B_{\frac{k+1}{k+1}}$$

Setzt man $r = 0$ so folgt

$$2^{2k+1}(2^{2k+2}-1) B_{\frac{k+1}{k+1}} = E_{k+1} - (2k+1,2) E_k \ldots + (-1)^k (2k+1,2k) E_1$$

wie schon Scherk gefunden hat*). Vergleicht man diese Formel mit 23′) oder mit 24′) so findet man eine neue Relation zwischen den Euler'schen Zahlen, nemlich

$$E_{k+1} - [(2k+1,2)+(2k,1)] E_k \ldots + (-1)^k [(2k+1,2k)+(2k,2k-1)] E_1 = 0$$

Setzt man dagegen $k = 0$ und zugleich $r-1$ statt r so ergiebt sich

$$E_r = (2r-1,1)\, 2^{2r-1}(2^{2r}-1) B_{\frac{r}{r}} - (2r-1,3)\, 2^{2r-3}(2^{2r-2}-1) B_{\frac{r-1}{r-1}} \ldots$$
$$+ (-1)^{r-1}\, 2(2^2-1) B_1$$

der Vergleich dieses Werthes von E_r mit 25′) giebt die neue Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen

$$2^{2r+1}(2^{2r+2}-1) B_{\frac{r+1}{r+1}} - 2^{2r-1}(2^{2r}-1)\, [(2r-1,1)+(2r,2)] B_{\frac{r}{r}} \ldots$$
$$+ (-1)^r\, 2^2 (2^2-1) B_1 = 0$$

In den vorhergehenden Formeln war es nicht nöthig wie früher (§. 3.) eine der Zahlen m und n als die grössere zubetrachten, man kann daher in den Formeln A″) und B″) so wie in den daraus abgeleiteten Relationen diese Zahlen vertauschen. So folgt aus 23) wenn man m und n, also auch k und r, vertauscht,

---

*) A. a. O. p. 5 Form 5.

$$E_{k+r} - (2r,2)E_{k+r-1} \ldots + (-1)^r E_k = (2k,1)\,2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)\frac{B_{k+r}}{k+r} \ldots$$
$$+ (-1)^{k+1}(2k,2k-1)\,2^{r+1}(2^{r+2}-1)\frac{B_{r+1}}{r+1}$$

Ebenso fände man aus 24)

$$(2r+1,1)E_{k+r} - (2r+1,3)E_{k+r-1} \ldots + (-1)^r E_k =$$
$$2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1)\frac{B_{k+r+1}}{k+r+1} - (2k,2)\,2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)\frac{B_{k+r}}{k+r} \ldots$$
$$+ (-1)^k(2k,2k-1)\,2^{2r+1}(2^{2r+2}-1)\frac{B_{r+1}}{r+1}$$

übereinstimmend mit 25) u. s. w.

§. 7.

Aehnliche Betrachtungen, wie sie in §. 4. angestellt worden sind, führen, auf die Funktionen φ angewandt, zu verwickelteren, neuen Beziehungen, sowohl zwischen den Bernoulli'schen Zahlen als zwischen diesen und den Euler'schen. Insofern nemlich wieder $\varphi^{2m} = -\Delta\varphi^{2m} = \Delta\varphi^{2m-1}$ und zwar auch wenn $m = 1$ da $\varphi^1 = 0$, so kann man mit Hülfe dieser Ausdrücke die Formeln A'') und B'') umbilden, wobei wieder vier Fälle zu unterscheiden sind.

Aus B'') folgt

C'') $$\Delta\varphi^n = \Delta^{n+1}\varphi + (n,1)\Delta^n\varphi + (n,2)\Delta^{n-1}\varphi \ldots + (n,n)\Delta\varphi$$

und zwar, je nachdem n gerade oder ungerade:

$$\Delta\varphi^n = \Delta^{n+1}\varphi + (n,2)\Delta^{n-1}\varphi \ldots$$
$$\Delta\varphi^n = (n,1)\Delta^n\varphi \ldots$$

Ist $m = 2k$, $n = 2r$ so folgt aus A'') wie schon oben §. 6. gezeigt worden ist

a) $$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = \varphi^s + (2k,2)\varphi^{s-2} + (2k,4)\varphi^{s-4} \ldots + \varphi^{2r}$$

also auch

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = -\Delta\varphi^s - (2k,2)\Delta\varphi^{s-2} \ldots - \Delta\varphi^{2r}$$

und mithin nach C''), wenn man die Gleichung $\Delta^{2m}\varphi = 0$ berücksichtigt (§. 6),

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = -A_0\,\Delta^{s+1}\varphi - A_1\,\Delta^{s-1}\varphi \ldots - A_l\Delta^{s-2l+1}\varphi - \ldots - A'_{\frac{s}{2}}\Delta\varphi$$

wo

$$A_l = \sum_{t=0}^{t=l}[(2k,2t)(s-2t,2l-2t)]$$

Nun ist anderer Seits (§. 6.)

a') $\quad \Delta^{2k}\varphi^{2r} = (2r,1)\Delta^{s-1}\varphi + (2r,3)\Delta^{s-3}\varphi \ldots + (2r,2r-1)\Delta^{2k+1}\varphi$

Setzt man also statt $\Delta^{s+1}\varphi$, $\Delta^{s-1}\varphi$ u. s. w. ihre Werthe in Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückt, so findet man die Relation

$$2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1)B_{\frac{k+r+1}{k+r+1}} - A_1\,.\,2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)B_{\frac{k+r}{k+r}}\ldots$$
$$+(-1)^{k+r}A_{k+r}\,.\,2(2^2-1)B_1$$
$$=(2r,1)2^{2k+2r-1}(2^{2k+2r}-1)B_{\frac{k+r}{k+r}} - (2r,3)2^{2k+2r-3}(2^{2k+2r-2}-1)B_{\frac{k+r-1}{k+r-1}}\ldots$$
$$+(-1)^{r+1}(2r,2r-1)2^{2k+1}(2^{2k+2}-1)B_{\frac{k+1}{k+1}}$$

wobei zu bemerken dass $A_{k+r} = 2^{2k-1}$.

Berücksichtigt man die Gleichung 23) so hat man also auch eine neue Relation zwischen Euler'schen und Bernoulli'schen Zahlen.

Aehnliches gilt von den noch zu erörternden übrigen Formeln.

Ist $r=0$ und also $A_l = \sum\limits_{0,l}^{t}[(2k,2t)(2k-2t,2l-2t)]$ so hat man

$$2^{2k+1}(2^{2k+2}-1)B_{\frac{k+1}{k+1}} - A_1\,.\,2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_{\frac{k}{k}}\ldots + (-1)^k A_k.2(2^2-1)B_1 = 0$$

Unter Anwendung der Gleichung $\varphi^{2m} = \Delta\varphi^{2m-1}$ folgt aus A'')

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = \Delta\varphi^{2k+2r-1} + (2k,2)\Delta\varphi^{2k+2r-3}\ldots + \Delta\varphi^{2r-1}$$

und hieraus nach C'')

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r} = A'_0\,\Delta^{s-1}\varphi + A'_1\,\Delta^{s-3}\varphi \ldots + A'_l\Delta^{s-2l-1}\ldots + A'_{\frac{s-2}{2}}\Delta\varphi$$

wo

$$A'_l = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t)(s-2t-1, 2l-2t+1)$$

woraus also wieder eine neue Relation folgt.

Ist $m = 2k$, $n = 2r+1$ so folgt aus b) vermittelst $\varphi^{2m} = -\Delta\varphi^{2m}$

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = (2k, 1)\Delta\varphi^{s} + (2k, 3)\Delta\varphi^{s-2} \ldots + (2k, 2k-1)\Delta\varphi^{2r+2}$$

und vermittelst C'')

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = A_0\Delta^{s+1}\varphi + A_1\Delta^{s-1}\varphi \ldots + A_l\Delta^{s-2l+1}\varphi \ldots + A_{\frac{s}{2}}\Delta\varphi$$

wo

$$A_l = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-2t, 2l-2t)$$

Verglichen mit 24) giebt dies eine neue Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und zugleich

$$(2k, 1)E_{k+r} - (2k, 3)E_{k+r-1} \ldots + (-1)^{k-1}(2k, 2k-1)E_{r+1} =$$
$$A_0 . 2^{2k+2r+1}(2^{2k+2r+2}-1)\frac{B_{k+r+1}}{k+r+1} \ldots + (-1)^{k+r-1}2^2(2^4-1)B_2$$
$$+ (-1)^{k+r}2^{2k-1}$$

Setzt man aber von $\Delta\varphi^{2m-1} = \varphi^{2m}$ ausgehend

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = -(2k, 1)\Delta\varphi^{2k+2r-1} - (2k, 3)\Delta\varphi^{2k+2r-3} \ldots - (2k, 2k-1)\Delta\varphi^{2r+1}$$

so folgt aus C'')

$$\Delta^{2k}\varphi^{2r+1} = -A'_0\Delta^{s-1}\varphi - A'_1\Delta^{s-3}\varphi \ldots - A_l\Delta^{s-1-2l}\varphi \ldots - A_{\frac{s-2}{2}}\Delta\varphi$$

wo

$$A_l = \sum_{t=0}^{t=l} (2k, 2t+1)(s-1-2t, 2l+1-2t)$$

woraus sich also wieder eine neue Relation ableiten lässt.

Ist $m = 2k+1$, $n = 2r$ so folgt aus §. 6. (Form. c) vermittelst $\varphi^{2m} = -\Delta\varphi^{2m}$

$$\Delta^{2k+1}\varphi^{2r} = (2k+1, 1)\Delta\varphi^{s} + (2k+1, 3)\Delta\varphi^{s-2} \ldots + \Delta\varphi^{n}$$

und aus C'')

$$\Delta^{2k+1}\varphi^{2r} = A_0 \Delta^{s+1}\varphi + \ldots + A_l \Delta^{s+1-2l}\varphi \ldots + A_{\frac{s}{2}} \Delta\varphi$$

wo

$$A_l = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t+1)(s+1-2t, 2l+1-2t)$$

Ist $m = 2k+1$, $n = 2r+1$ so findet man

$$\Delta^{2k+1}\varphi^{2r+1} = -\Delta\varphi^{s+2} - (2k+1, 2)\Delta\varphi^{s} \ldots - (2k+1, 2k)\Delta\varphi^{2r+2}$$

und

$$\Delta^{2k+1}\varphi^{2r+1} = -A_0 \Delta^{s+3}\varphi - A_1 \Delta^{s+1}\varphi \ldots - A_l \Delta^{s-2l+3}\varphi \ldots - A_{\frac{s+2}{2}} \Delta\varphi$$

wo

$$A_l = \sum_{t=0}^{t=l} (2k+1, 2t)(s+2-2t, 2l-2t)$$

Hieraus ergeben sich also weitere Relationen. Andere erhält man, wenn man wieder die Substitution $\varphi^{2m} = \Delta\varphi^{2m-1}$ anwendet, was ich nicht weiter verfolgen will, da die Entwickelung nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeit hat.

§. 8.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, zu welchen die im Vorhergehenden gefundenen Formeln Veranlassung geben.

Wenn man in Formel 23) für k die Einheit setzt, so hat man

$$E_{r+1} - E_r = (2r, 1)\, 2^{2r+1}(2^{2r+2} - 1) B_{\frac{r+1}{r+1}} - (2r, 3)\, 2^{2r-1}(2^{2r} - 1) B_{\frac{r}{r}} \ldots$$
$$+ (-1)^{r+1}(2r, 2r-1)\, 2^{3}(2^{4} - 1) B_{\frac{2}{2}}$$

Da nun bekanntlich jede Euler'sche Zahl E_r mit 1 oder 5 endigt, je nachdem r ungerade oder gerade ist, also $E_{r+1} - E_r$ im ersten Falle mit 4, im zweiten mit 6 endigt, so erhält man den Satz, welcher wohl nicht auf so einfachem Wege direkt zu beweisen ist, dass die Reihe

$$(2r, 1)\, 2^{2r+1}(2^{2r+2}-1)\frac{B_{r+1}}{r+1} \ldots + (-1)^{r+1}(2r, 2r-1)\, 2^3(2^4-1)\frac{B_2}{2}$$

eine ganze Zahl ist, die mit 4 oder 6 endigt, je nachdem r ungerade oder gerade.

Einen ähnlichen Satz erhält man aus 24) wenn man $k = 2$ setzt. Man hat nemlich dann

$$4(E_{r+2} - E_{r+1}) = 2^{2r+5}(2^{2r+6}-1)\frac{B_{r+3}}{r+3} - (2r+1, 2)\, 2^{2r+3}(2^{2r+4}-1)\frac{B_{r+2}}{r+2}$$
$$\ldots . + (-1)^r (2r+1, 2r)\, 2^5(2^6-1)\frac{B_3}{3}$$

Da nun $4\,(E_{r+2} - E_{r+1})$ mit 6 oder 4 endigt, je nachdem r ungerade oder gerade ist, so folgt hieraus, dass die Reihe

$$2^{2r+5}(2^{2r+6}-1)\frac{B_{r+3}}{r+3} - (2r+1, 2)\, 2^{2r+3}(2^{2r+4}-1)\frac{B_{r+2}}{r+2} \ldots$$
$$+ (-1)^r (2r+1, 2r)\, 2^5(2^6-1)\frac{B_3}{3}$$

eine ganze Zahl ist, welche mit 6 oder 4 endigt, je nachdem r ungerade oder gerade.

Von dem Staudt'schen Satze ausgehend, dass

$$\text{E)} \qquad (-1)^n B_n = A_n + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\alpha} \ldots + \tfrac{1}{\lambda}$$

wo B_n die $n$te Bernoulli'sche Zahl, A_n eine ganze Zahl und $\alpha \ldots \lambda$ die so beschaffenen Primzahlen sind, dass $\frac{\alpha-1}{2} \ldots \frac{\lambda-1}{2}$ Faktoren von n sind, hat Herr Hermite mit Hülfe der bekannten, oben mit I) bezeichneten. Formel eine Relation zwischen den Grössen $A_1\, A_2 \ldots A_n$ gefunden*). Mit Hülfe derselben Principien habe ich dann, von der ebenfalls bekannten, oben mit 9*) bezeichneten, Formel ausgehend, eine zweite solche Rela-

*) Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. Bd. 81 p. 93.

tion gefunden*). Andere Relationen dieser Art ergeben sich nun leicht mit Hülfe einiger der neuen im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln.

Aus Formel 8*) nemlich, statt deren man auch

$$B_1 - (2n,2)B_2 \ldots + (-1)^n (2n,2n-4) B_{n-1} + (-1)^{n+1} [(2n,2n-2)-1] B_n = 0$$

schreiben kann, folgt, wenn man für jede Bernoulli'sche Zahl, nach E) ihren Werth setzt,

$$\text{F)} \quad \begin{aligned} & A_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \\ & + (2n,2)(A_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + [(2n,2n-2)-1](A_n + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Nun ist hier allgemein A_s mit $(2n, 2s-2)$ multiplicirt, wenn nicht $s=n$ in welchem Falle A_n mit $(2n,2n-2)-1$ multiplicirt ist. Bezeichnet man nun die Summe der Glieder dieses Ausdruckes, welche den Faktor $\frac{1}{p}$ enthalten, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet, durch Sp, so kommen in dieser Summe alle die Glieder vor, bei welchen das daneben vorkommende A_s so beschaffen ist, dass $\frac{p-1}{2}$ ein Faktor von s ist, also wenn $s=\frac{p-1}{2}$, $s=p-1$ u. s. w. allgemein $s=k.\frac{p-1}{2}$ wo für k alle ganzen positiven Zahlen zu nehmen sind, so weit dass $k.\frac{p-1}{2}$ nicht grösser als n wird. Nun gehört zu $A_{k.\frac{p-1}{2}}$ der Binomialcoefficient

$$(2n, k(p-1)-2) = (2n, kp-k-2) \text{ oder } [2n, k(p-1)-3] = (2n, kp-k-3)$$

je nachdem $k.\frac{p-1}{2}$ nicht $=n$ oder $=n$ ist. In nachdem also $\frac{p-1}{2}$ kein Faktor oder ein Faktor von n ist, hat man

$$S'_p = \frac{1}{p}[(2n,p-3) + (2n,2p-4) + \ldots]$$

oder

$$Sp = \frac{1}{p}[(2n,p-3) + (2n,2p-4) \ldots - 1]$$

---

*) Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. Bd. 84 p. 267.

Man kann nun zeigen dass Sp in jedem Falle eine ganze Zahl ist. Da nemlich $(2n, p-3) + (2n, 2p-4) \dots = (2n+1, p-2) - (2n, p-2) + (2n+1, 2p-3) - (2n, 2p-3) \dots$ ist, und, wie ich an der erwähnten Stelle gezeigt habe, $(2n+1, p-2) + (2n+1, 2p-3) \dots$ in der That durch p theilbar ist, so ist nur noch zu zeigen, dass, je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist,

$$(2n, p-2) + (2n, 2p-3) \dots$$

oder

$$(2n, p-2) + (2n, 2p-3) \dots + 1$$

durch p theilbar ist. Nun ist $(2n, p-2) + (2n, 2p-3) + \dots =$

$(2n+1, p-1) + (2n+1, 2p-2) \dots - (2n, p-1) - (2n, 2p-2) - \dots$

Da nun schon Herr Hermite in der oben erwähnten Untersuchung gezeigt hat, dass $(2n+1, p-1) + (2n+1, 2p-2) \dots$ durch p theilbar ist, so ist nur noch zu zeigen, dass je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist,

$$(2n, p-1) + (2n, 2p-2) \dots \equiv 0 \text{ oder } \equiv 1$$

nach dem Modul p ist, was, mit Anwendung des von Herrn Hermite gebrauchten Verfahrens, sehr leicht auszuführen ist. Bezeichnet nemlich w die verschiedenen Wurzeln der Congruenz $x^{p-1} - 1 \equiv 0$, (mod. p), so ist

$$\sum (1+w)^{2n} = (p-1)[1 + (2n, p-1) + (2n, 2p-2) + \dots]$$

Ferner ist $1 + \sum (1+w)^{2n} \equiv 0$ oder $\equiv -1$ (nach dem Modul p) je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist. Im ersten Falle, in welchem also $2n, 2n$ nicht in der Summe

$$1 + (2n, p-1) + (2n, 2p-2) \dots$$

vorkommt, ist $\sum (1+w)^{2n} \equiv -1 - (2n, p-1) - (2n, 2p-2) \dots$ und zugleich $\sum (1+w)^{2n} \equiv -1$ mithin

$$(2n, p-1) + (2n, 2p-2) + \dots \equiv 0$$

Im zweiten Falle ist $\sum(1+w)^{2n} \equiv -1-(2n,p-1)-(2n,2p-2)\ldots$ und zugleich $\sum(1+w)^{2n} \equiv -2$ mithin

$$(2n,p-1)+(2n,2p-2)\ldots\ldots\equiv 1$$

und es ist hiermit zugleich bewiesen, dass

$(2n,p-2)+(2n,2p-3)\ldots\equiv 0$ oder $\equiv 1$ ist, je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist. Demnach ist also $S'p$ eine ganze Zahl und wenn man mit $\sum S'p$ die Summe aller Ausdrücke bezeichnet, die man erhält, wenn man in $S'p$ alle ungeraden Primzahlen setzt, welche nicht grösser als $2n+1$ sind, so findet man aus F) mit Berücksichtigung dass

$$1+(2n,2)+(2n,4)\ldots+(2n,2n-2) = 2^{2n-1}-1$$

$$a)\quad A_1+(2n-2)A_2\ldots+[(2n,2n-2)-1]A_n = -2^{2n-2}+1-\sum S'p$$

Aus 11* ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}-(2n,1)B_1+(2n,3)B_2\ldots+(-1)^n[(2n,2n-1)+1]B_n = 0$$

und demnach

$$\text{G)}\qquad \begin{aligned} &(2n,1)(A_1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}) \\ &+(2n,3)(A_2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) \\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+[(2n,2n-1)+1](A_n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots)+\tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Summe der Glieder dieses Ausdruckes, welche den Faktor $\frac{1}{p}$ enthalten durch s'_p so hat man

$$s'_p = \frac{1}{p}[(2n,p-2)+(2n,2p-3)+\ldots]$$

oder

$$s'_p = \frac{1}{p}[(2n,p-2)+(2n,2p-3)\ldots+(2n,2n-1)+1]$$

je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist. Es ist nun schon oben bewiesen, dass je nachdem der erste oder zweite Fall statt hat,

$$(2n,p-2)+(2n,2p-3)+\ldots$$

oder

$$(2n,p-2)+(2n,2p-3)\ldots+1$$

durch p theilbar ist. Jedenfalls ist also s'_p eine ganze Zahl. Man hat mithin, indem man das Summenzeichen in demselben Sinne wie oben braucht,

$$\beta)\quad (2n,1)A_1+(2n,3)A_2\ldots+[(2n,2n-1)+1]A_n=-2^{2n-2}-1-\Sigma s'_p$$

Indem man α) und β) zusammenaddirt folgt

$$(2n+1,1)A_1+(2n+1,3)A_2+\ldots+(2n+1,2n-1)A_n=-2^{2n-1}-\Sigma S'_p-\Sigma s'_p$$

Vergleicht man dies mit dem Ausdrucke

$$(2n+1,1)A_1+\ldots+(2n+1,2n-1)A_n=-2^{2n-1}-\Sigma s_p$$

wo $s_p=\frac{1}{p}[(2n+1,p-2)+(2n+1,2p-3)\ldots.]$

welchen ich an der erwähnten Stelle gefunden habe, so ergiebt sich die bemerkenswerthe Beziehung

$$\Sigma s_p=\Sigma S'p+\Sigma s'p$$

Eine andere Beziehung zwischen den Grössen A) ergiebt sich aus der Gleichung 10* statt deren man

$$B_1-(2n-1,2)B_2\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1,2n-2+2)B_n=0$$

schreiben kann. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}&A_1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\\&+(2n-1,2)(A_2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})\\&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\&[(2n-1,2n-2)+2](A_n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots.)\\&=0\end{aligned}$$

Addirt man hier die mit $\frac{1}{p}$ multiplicirten Glieder und bezeichnet die Summe durch σ'_p so ist

$$\sigma'_p=\frac{1}{p}[(2n-1,p-3)+(2n-1,2p-4)+\ldots]$$

oder

$$\sigma'_p=\frac{1}{p}[(2n-1,p-3)+(2n-1,2p-4)\ldots+2]$$

je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist. Aus dem Obigen folgt aber, dass jedenfalls σ'_p eine ganze Zahl ist. Denn es ist

$$(2n-1,p-3)+(2n-1,2p-4)\ldots=(2n,p-2)+(2n,2p-3)\ldots-(2n-1,p-2)$$
$$-(2n-1,2p-3)\ldots.$$

Nun ist, je nachdem $\frac{p-1}{2}$ kein oder ein Faktor von n ist

$$(2n,p-2)+(2n,2p-3)\ldots\equiv 0 \text{ oder } \equiv -1$$

und $$(2n-1,p-2)+(2n-1,2p-3)\ldots\equiv 0 \text{ oder } \equiv 1$$

also $$(2n-1,p-3)+(2n-1,2p-4)\ldots\equiv 0 \text{ oder } \equiv -2$$

Mithin

$$A_1+(2n-1,2)A_2+\ldots+[(2n-1,2n-2)+2]A_n=-2^{2n-3}-1-\Sigma\sigma_p$$