Continuierliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene.

Von

G. Bohlmann.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Januar 1896 von F. Klein.)

Die Theorie derjenigen Gruppen, deren endliche Gleichungen algebraisch in den Variabeln sind, und deren Begründung in erster Linie Picard zu danken ist, ist bereits bis zu einem hohen Grade und in großer Allgemeinheit entwickelt worden. Diese Note beschäftigt sich nur mit einem sehr speciellen Falle jener Theorie, nämlich mit dem Probleme alle endlichen continuierlichen Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene aufzustellen. Die quadratischen Transformationen sind die einfachsten nach den projectiven. Im Gegensatz zu diesen bildet aber ihre Gesamtheit keine endliche continuierliche Gruppe im Lie'schen Sinne und daher entsteht die eben gestellte Frage. Die Theorie der quadratischen Transformationen in Verbindung mit Lie's allgemeiner Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen liefert nun unmittelbar die Mittel jene Gruppen wirklich hinzuschreiben und es empfiehlt sich vielleicht um so eher dies wirklich zu thun, als gerade bei den quadratischen Transformationen die endlichen discontinuierlichen Gruppen bereits sehr ausführlich — zumal von S. Kantor und Autonne — behandelt worden sind und hiezu die — ungleich leichtere — Aufstellung der endlichen continuierlichen Gruppen als Ergänzung angesehen werden kann. Die Nummern 1. bis 3. dieser Note enthalten eine Recapitulation derjenigen Sätze aus der Theorie der quadratischen Transformationen, welche zur Bestimmung der fraglichen Gruppen benutzt wurden. Die geometrischen Sätze sind durch diejenigen analytischen Formeln begleitet, welche eine vollständige Durchrechnung der hier gegebenen Resultate ermöglichen.

Die Nummern 4.—6. geben die Bestimmung der verlangten Gruppen.

I. Quadratische Transformationen überhaupt.

Bestimmt man die Punkte einer Ebene (x) durch homogene Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$, so wird eine quadratische Transformation dieser Ebene (x) in eine neue (x') durch die Gleichungen definiert:

$$(1) \qquad \sum_{\iota,\varkappa} a_{\iota\varkappa} x_\iota x'_\varkappa = 0, \quad \sum_{\iota,\varkappa} b_{\iota\varkappa} x_\iota x'_\varkappa = 0, \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3).$$

sobald weder in der Matrix:

$$(2) \qquad \left\| \sum_\iota a_{\iota\varkappa} x_\iota, \quad \sum_\iota b_{\iota\varkappa} x_\iota \right\| \quad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

noch in der Matrix:

$$(2') \qquad \left\| \sum_\varkappa a_{\iota\varkappa} x'_\varkappa, \quad \sum_\varkappa b_{\iota\varkappa} x'_\varkappa \right\| \quad (\iota = 1, 2, 3)$$

alle Determinanten zweiter Ordnung identisch für beliebige Variable x, x' verschwinden. Nehmen wir dies ein für alle Male an, so existieren sowohl in der Ebene (x) als in der Ebene (x') Punkte, für welche nicht alle Determinanten zweiter Ordnung der Matrix (2) bezw. (2′) verschwinden und jeder solche Punkt heißt ein Nichtfundamentalpunkt der Ebene (x) bezw. (x'). Ihr contradictorisches Gegenteil bilden die Fundamentalpunkte der Ebene (x) bezw. (x').

Ist — wie weiter angenommen werden soll — die durch (1) definierte Transformation wirklich eine quadratische und artet sie nicht etwa in eine projective aus, so ist die Anzahl der Fundamentalpunkte in beiden Ebenen eine endliche und zwar entweder in beiden Ebenen gleich 3 oder in beiden Ebenen gleich 2. Hierdurch teilen sich die quadratischen Transformationen in zwei distincte Klassen: solche mit 3 und solche mit 2 Fundamentalpunkten.

Die Transformation (1) definiert in bekannter Weise den oder die Punkte (x), welche einem gegebenen Punkte (x') 'entsprechen'. Ist (x') ein Nichtfundamentalpunkt, so 'entspricht' ihm ein und nur ein Punkt, welcher auch durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad x_\iota = \sum_\varkappa a_{\iota+1,\varkappa} x'_\varkappa \cdot \sum_\varkappa b_{\iota+2,\varkappa} x'_\varkappa - \sum_\varkappa a_{\iota+2,\varkappa} x'_\varkappa \sum_\varkappa b_{\iota+1,\varkappa} x'_\varkappa$$

definiert werden kann. Die Indices in diesen Gleichungen sind modulo 3. zu lesen. Ihre Gültigkeit bleibt auf Nichtfundamentalpunkte (x') beschränkt. Trotzdem darf man als die einer Curve m^{ter} Ordnung C_m der Ebene (x):

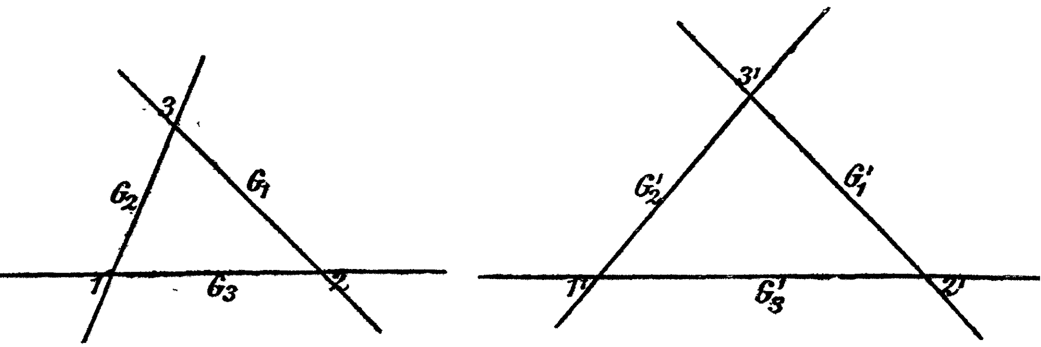
$$F(x_1 x_2 x_3)_m = 0$$

in der Ebene (x') entsprechende Curve diejenige C'_{2m} definieren, welche entsteht, wenn man aus (3) die Werte der x als Functionen der x' in F einsetzt.

Von jetzt an mögen die quadratischen Transformationen mit 3 Fundamentalpunkten und solche mit 2 getrennt betrachtet werden.

2. Quadratische Transformationen mit 3 Fundamentalpunkten.

Die Figur zeigt Fundamentalpunkte und Fundamentalgeraden in beiden Ebenen, welche sich in bekannter Weise entsprechen und in jeder Ebene ein wirkliches Dreieck bilden.



Algebraisch wird die Transformation durch die zwei Gleichungen:

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad G_1(x) \cdot G'_1(x') = G_2(x) \cdot G'_2(x') = G_3(x) \cdot G'_3(x')$$

in voller Allgemeinheit definiert, während die Gleichungen:

$$(3\,\mathrm{a}) \qquad G_i(x) = G'_{i+1}(x') \cdot G'_{i+2}(x')$$

nur für Nicht-Fundamentalpunkte (x') gelten. G_1, G_2, G_3 einerseits, sowie G'_1, G'_2, G'_3 andrerseits sind irgend drei lineare Formen mit nicht verschwindender Determinante.

Von einer C_m sagt man, sie geht durch den Fundamentalpunkt i gerade k_i mal, wenn ihre linke Seite sich schreiben läßt:

$$F(x_1 x_2 x_3)_m = \varphi_{k_i}(G_{i+1}, G_{i+2}) \cdot G_i^{m-k_i} + \cdots + \varphi_m(G_{i+1}, G_{i+2})$$

und wenn φ_{k_i} nicht identisch Null ist. Enthält die C_m keine Fundamentalgeraden, so ist auch φ_m nicht identisch Null. Mit Hülfe der Bemerkung in No. 1 über das Entsprechen von Curven erhält man nun die der C_m entsprechende C'_{2m} einfach durch Substitution der x an Stelle der x' mit Hülfe der Gleichungen (3a) und gelangt so in bekannter Weise zu dem bekannten Satze:

Einer C_m, welche keine Fundamentalgeraden enthält und durch den Fundamentalpunkt i gerade k_i mal hindurchgeht, entspricht eine C'_{2m}, welche die Gerade G'_i gerade k_i mal und außerdem noch eine $C'_{m'}$ enthält, die ihrerseits keine Fundamentalgerade mehr enthält und durch den Fundamentalpunkt i' gerade k'_i mal hindurchgeht. Dabei ist:

$$(4) \qquad m' = 2m - k_1 - k_2 - k_3, \quad k'_i = m - k_{i+1} - k_{i+2}.$$

Wir schlagen die Bezeichnungsweise vor:

'Die $C'_{m'}$ ist das Bild der C_m'

und bemerken, daß dieselbe nur für Curven definiert ist, welche keine Fundamentalgerade enthalten. Der Begriff des Bildes ist umkehrbar; d. h.:

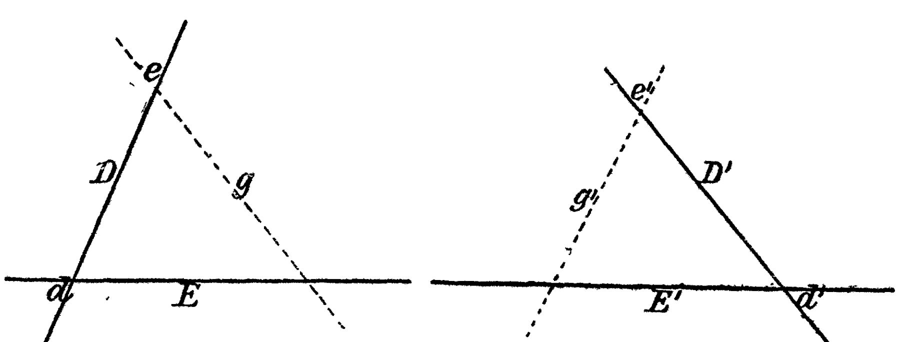
'Ist die $C'_{m'}$ das Bild der C_m, so ist auch die C_m das Bild der $C'_{m'}$,

Wir heben weiter hervor: Enthält eine C_m keine Fundamentalgerade, aber eine C_n, so enthält das Bild $C'_{m'}$ der C_m das Bild $C'_{n'}$ der C_n.

Hieraus ist abzunehmen, daß das Bild einer reduciblen C_m ohne Fundamentalgeraden eine ebensolche $C'_{m'}$ ist. Also ist auch das Bild einer *irreduciblen* Curve wieder eine *irreducible* Curve.

3. Quadratische Transformationen mit 2 Fundamentalpunkten.

Hier sind die Fundamentalfiguren, welche sogleich erläutert werden sollen, diese:



Analytisch wird eine quadratische Transformation mit 2 Fundamentalpunkten definiert durch zwei Gleichungen:

$$(1b) \quad g(x) \cdot D'(x') = g'(x') \cdot D(x), \quad D(x) D'(x') = E(x) E'(x'),$$

in welchen $D(x)$, $E(x)$, $g(x)$ einerseits, sowie $D'(x')$, $E'(x')$, $g'(x')$ andrerseits drei lineare Formen der x bezw. x' mit nicht verschwindender Determinante bedeuten. In der Ebene (x) bestimmen $D(x) = 0$, $E(x) = 0$, $g(x) = 0$ drei ein wirkliches Dreieck bildende Gerade D, E, g, von denen die beiden ersten Fundamentalgerade und zwar D die Doppelfundamentalgerade, E die einfache Fundamentalgerade heißt. g heiße Hülfsgerade. D und E schneiden sich im Doppelfundamentalpunkte d, E und g im einfachen Fundamentalpunkte e. Accente ergeben die analogen Definitionen für die Ebene (x').

Um die Verwandlungen einer C_m zu bestimmen, setzen wir voraus: Es sei eine C_m gegeben mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie enthält weder eine Fundamental-, noch eine Hülfsgerade.
2. Sie geht e mal durch den einfachen Fundamentalpunkt e.
3. Sie geht d mal durch den doppelten Fundamentalpunkt d, sodaß ihre linke Seite die Gestalt hat:

$$F(x_1 x_2 x_3)_m = \varphi_d(D, E) \cdot g^{m-d} + \cdots + \varphi_m(D, E),$$

wo weder φ_d noch φ_m identisch verschwinden.

Wir setzen nun endlich noch voraus, daß die Formen:

$$\varphi_d(D, E), \quad \varphi_{d+1}(D, E) \cdot E, \cdots \varphi_m(D, E) \cdot E^{m-d}$$

wohl E^{ε}, aber nicht mehr $E_{\varepsilon+1}$ als allen gemeinsamen Teiler besitzen. Diese vierte Annahme wollen wir kurz so formulieren:

4. Das Verhalten der C_m zur Geraden E im Punkte d ist durch die Zahl ε charakterisiert.

Unter diesen 4 Bedingungen gilt der Satz:

'Der C_m entspricht eine C'_{2m}, welche die Hülfsgerade g' gar nicht, die Doppelfundamentalgerade D' genau $d+\varepsilon$ mal, die einfache Fundamentalgerade E' genau e mal und außerdem noch eine $C''_{m'}$ enthält. Letztere ist von der Ordnung m', enthält keine Fundamentalgerade mehr, geht durch den Doppelfundamentalpunkt d' genau d', durch den einfachen Fundamentalpunkt e' genau e' mal und ihr Verhalten zur Geraden D' ist durch die Zahl ε' charakterisiert. Dabei ist:

$$(5) \quad m' = 2m - d - e - \varepsilon, \quad d' = m - e - \varepsilon, \quad e' = m - d - \varepsilon, \quad \varepsilon' = m - d - e$$

zu setzen'.

Wie im vorigen Paragraphen, so werde auch hier die $C'_{m'}$ als das Bild der C_m bezeichnet. Dann gelten auch hier die analogen Betrachtungen und im besonderen der Satz, daß die C_m und die $C''_{m'}$ gleichzeitig reducibel oder irreducibel sind.

Als specieller Fall dieser allgemeinen Sätze werde der hervorgehoben, daß das Bild eines von D und E verschiedenen Strahles, welcher durch d geht, wieder ein von D' und E' verschiedener Strahl ist, der durch d' geht.

4. Continuierliche Gruppen von quadratischen Transformationen überhaupt.

Es seien:

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 x_3)_2 \tag{6}$$

die Gleichungen einer quadratischen Transformation T, welche einer continuierlichen Gruppe G von quadratischen Transformationen angehört. Es seien:

$$x_i'' = f_i'(x_1' x_2' x_3')_2 \tag{7}$$

die Gleichungen einer zweiten quadratischen Transformation T' derselben Gruppe G. Die Transformation T' definiert ein Entsprechen der Punkte einer Ebene (x'') und der einer Ebene (x') in der oben ausgeführten Weise. Die Fundamentalpunkte dieser Transformation T' in (x'') seien typisch durch (p''), die in der Ebene (x') typisch durch (p') bezeichnet. Ebenso bewirkt die Transformation T ein Entsprechen von der Ebene (x') und einer neuen (x). Ihre Fundamentalpunkte in (x') seien (q'), die in (x) seien (q).

Führt man erst die Transformation T', dann T aus, so entsteht eine Transformation 4ten Grades T'', welche die Gestalt hat:

$$x_i'' = f_i'(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)).$$

Damit nun T' und T derselben Gruppe G angehören ist notwendig und hinreichend, daß ihr auch T'' angehört, also muß aus den rechten Seiten ein gemeinsamer Teiler 2ten Grades heraustreten:

$$f_i'(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)) = F(x_1 x_2 x_3)_2 \cdot f_i''(x_1 x_2 x_3)_2.$$

Versteht man demnach unter u_i unbestimmte Coefficienten, so muß vermöge (6)

$$\textstyle\sum_i u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = F \cdot \sum_i u_i f_i''(x_1 x_2 x_3)$$

werden und zwar für beliebige Variable u, x. Da weder die f_i' für beliebige Variable x' noch die f_i'' für beliebige Variable x einen allen 3 Formen f_i' bezw. f_i'' gemeinsamen von den x' bezw. x abhangenden Teiler besitzen können, so giebt es Werte u, für welche sowohl die linke Seite, gleich Null gesetzt, einen irreduciblen Kegelschnitt der Ebene (x'), als auch auf der rechten Seite der zweite Factor, gleich Null gesetzt, einen irreduciblen Kegelschnitt der Ebene (x) darstellt. Solche Werte u mögen 'allgemeine Werte' heißen und angenommen werden, daß für die u ein solches allgemeines Wertsystem gewählt ist. Dann ist:

$$\sum u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = 0$$

ein irreducibler Kegelschnitt C_2' eines Netzes von ∞^2 Kegelschnitten, welches durch die Punkte (p') hindurchgeht und die Frage ist einfach die, wie derselbe zu den Fundamentalpunkten (q') der Transformation T liegen muß, damit er wieder in einen irreduciblen Kegelschnitt:

$$\sum u_i f_i''(x_1 x_2 x_3) = 0$$

'abgebildet' wird, der seinerseits wieder einem Netze von ∞^2 Kegelschnitten C_2 durch die Punkte (q) angehört.

Wir denken uns jetzt T' als eine feste Transformation der Gruppe, sodaß auch die Punkte (p') festliegen. Hingegen wählen wir als Transformation T die allgemeine Transformation T_a der Gruppe G:

$$x_i' = f_i(x_1 x_2 x_3;\ a_1 \cdots a_r),$$

indem wir die Parameter a als unabhängige Variable betrachten.

5. Continuierliche Gruppen mit drei Fundamentalpunkten.

Es seien für eine feste Wahl der a, für welche T_a drei Fundamentalpunkte besitzt, die Fundamentalpunkte von T_a in (x') die Punkte (q_1'), (q_2'), (q_3') und die Fundamentalpunkte von T_a in (x) die Punkte (q_1), (q_2), (q_3). Die irreducible C_2':

$$\sum u_i f_i'(x_1' x_2' x_3') = 0$$

gehe k_i' mal durch den Fundamentalpunkt (q_i'). Das Bild der C_2', welches T_a in der Ebene (x) hervorruft, ist nach dem Vorigen eine irreducible C_m vom Grade:

$$m = 4 - k_1' - k_2' - k_3'.$$

Soll also $m = 2$ sein, so folgt:

$$k_1' + k_2' + k_3' = 2.$$

Also ist, da $k_i' < 2$ sein muß, die einzige Möglichkeit die, daß zwei der Zahlen k' gleich 1 sind, während die dritte verschwindet. Wir können etwa annehmen:

$$k_1' = 0,\ k_2' = 1,\ k_3' = 1.$$

Jeder irreducible Kegelschnitt C_2' des Netzes geht also 1 mal durch (q_2'), 1 mal durch (q_3') nicht durch (q_1') und sein Bild bei Anwendung der Transformation T_a ist in (x) ein irreducibler Kegelschnitt C_2, welcher 1 mal durch q_2, 1 mal durch q_3, nicht durch (q_1) geht. Nun geht aber jeder der ∞^2 Kegelschnitte des Netzes:

$$\sum u_i f_i' (x_1' x_2' x_3') = 0$$

auch durch die Punkte (p), deren Anzahl mindestens 2 ist. Also fallen zwei der Punkte (p') (und nicht mehr) mit (q_2') und (q_3') zusammen; zwei der Punkte (q') haben also eine feste, d. h. von den Parametern a der Transformation T_a unabhängige Lage; (q_2') falle in den festen Punkt (b), (q_3') in den festen Punkt (c) hinein. Die Fundamentalpunkte (q_2), (q_3) der inversen Transformation $T_{a'} = T_a^{-1}$ fallen ebenfalls nach (b) und (c). Bringen wir mithin die Ebene (x) mit der Ebene (x') zur Deckung, so daß Punkte mit gleichen Coordinaten zusammenfallen, so wird die Schar aller ∞^3 Kegelschnitte, welche durch die zwei festen Punkte (b), (c) gehen, in sich übergeführt.

Legen wir die zwei Punkte (b), (c) in die Kreispunkte der Ebene, so entsteht eine Gruppe von Transformationen, welche die Schar aller ∞^3 Kreise der Ebene in sich überführen: d. i. die Gruppe der Kreisverwandschaft oder eine ihrer Untergruppen. Die endlichen Gleichungen der Gruppe erhalten ihre einfachste Gestalt durch Uebergang zu Cartesischen Coordinaten und Einführung von Minimalcoordinaten (x, y). Dann wird:

$$x' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}, \quad y' = \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{\gamma_2 y + \delta_2} \tag{8}$$

bei willkürlichen Parametern $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die wohlbekannte 6 gliedrige Gruppe der Kreisverwandschaften. Unsere gesuchten Gruppen G sind also, soweit ihre allgemeine Transformation 3 Fundamentalpunkte besitzt, vermöge einer projectiven Variabelnänderung mit dieser 6 gliedrigen Gruppe oder einer ihrer wohlbekannten Untergruppen ähnlich.

6. Continuierliche Gruppen mit 2 Fundamentalpunkten.

Es sei jetzt die allgemeine Transformation T_a der Gruppe G nur mit 2 Fundamentalpunkten behaftet; d' ihr Doppelfundamentalpunkt, e' ihr einfacher Fundamentalpunkt in (x') und es gelte die analoge Bezeichnung in (x). Ist eine irreducible C_2' in der in No. 3 genannten Weise durch die Zahlen d', e', ε' charakterisiert, so ist ihr Bild eine irreducible C_m, wo

$$m = 4 - d' - e' - \varepsilon'$$

ist. Soll also $m = 2$ sein, so folgt:

$$d' + e' + \varepsilon' = 2$$

und wieder kann keine der Zahlen d', e', ε' größer als 1 sein. Da nach No. 3 auch d' nicht Null sein kann, so ist es gleich 1 und es bleiben die zwei Fälle:

a) $d' = 1$, $e' = 1$, $\varepsilon' = 0$; b) $d' = 1$, $e' = 0$, $\varepsilon' = 1$.

Der Fall a) ist ganz so zu behandeln, wie der in No. 5. Man erkennt wie dort, daß d' und e' eine feste, von der Wahl der Parameter a unabhängige Lage haben und schließt hieraus, daß die vorliegende Gruppe eine Untergruppe der allgemeinen Gruppe in No. 5 ist. In der That lehrt die Rechnung, daß in den Gleichungen (8) einfach $\gamma_1 = 0$ und also x' eine ganze, lineare Function von x wird.

Etwas Neues liefert dagegen der Fall b). Man bemerke zunächst, daß ein irreducibler Kegelschnitt C_2', der durch d' geht und E' berührt, aber nicht durch e' geht, wieder zum Bilde hat einen irreduciblen Kegelschnitt C_2, der durch d geht und E berührt, aber nicht durch e geht und schließe hieraus wieder wie in No. 5, daß sowohl der Doppelfundamentalpunkt d' als die einfache Fundamentalgerade E' eine von den Werten a der Parameter der Transformation T_a unabhängige Lage haben und ferner, daß d' mit d, und E' mit E zusammenfällt, wenn beide Ebenen (x') und (x) in der alten Weise zur Deckung gebracht werden. Es sei

$$l(x) = 0$$

die Gleichung der Geraden E, ferner der Schnittpunkt von:

$$m(x) = 0, \quad l(x) = 0$$

der Doppelfundamentalpunkt d. Endlich $n(x)$ eine dritte lineare Form der x, welche mit den beiden anderen ein System von Formen bildet, dessen Determinante nicht verschwindet und deren Coefficienten von den Parametern a unabhängig sind. Dann schließt man aus dem eben Gesagten und den Gleichungen (1b) einer quadratischen Transformation mit 2 Fundamentalpunkten, daß die Gleichungen unserer Gruppe die Gestalt haben:

$$
\begin{aligned}
l(x') &= \{\gamma_4 l(x) + \gamma_3 m(x)\}^2 \\
m(x') &= \{\gamma_4 l(x) + \gamma_3 m(x)\}\ \{\gamma_2 \cdot l(x) + \gamma_1 m(x)\} \\
n(x') &= \alpha_0 l(x) n(x) + \beta_0 l(x)^2 + \beta_1 l(x) m(x) + \beta_2 m(x)^2,
\end{aligned} \tag{9}
$$

wo die griechischen Buchstaben Functionen der Parameter a sind. Schon wenn diese willkürliche Variable sind, stellen die Gleichungen (9) eine continuierliche Gruppe dar. Also ist jede der jetzt gesuchten Gruppen eine Untergruppe von dieser.

Die Gleichungen erhalten ihre einfachste Gestalt, wenn vermöge:

$$
x = \frac{m(x_1 x_2 x_3)}{l(x_1 x_2 x_3)}, \quad y = \frac{n(x_1 x_2 x_3)}{l(x_1 x_2 x_3)} \tag{10}
$$

rechtwinklige Coordinaten eingeführt werden.

Wir fassen alles in dem Resultate zusammen:

Es giebt 2 Arten continuierlicher Gruppen von quadratischen Transformationen-Ebene. Die endlichen Gleichungen der einen sind:

$$
x' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}, \quad y' = \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{\gamma_2 y + \delta_2}. \tag{8}
$$

Sie können als die 6gliedrige Gruppe aller Kreisverwandschaften gedeutet werden und lassen 2 Scharen von ∞^1 Curven — die beiden Scharen von Minimalgeraden — invariant. Die endlichen Gleichungen der anderen Art sind:

$$
x' = \frac{\gamma_1 x + \gamma_2}{\gamma_3 x + \gamma_4}, \quad y' = \frac{\alpha_0 \cdot y + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)}{(\gamma_3 x + \gamma_4)^2}. \tag{11}
$$

Sie stellen eine 7gliedrige Gruppe dar, welche eine Schar von ∞^1 Curven — die Schar aller Parallelen zur y Achse — invariant läßt. Die Untergruppen jeder von diesen Gruppen lassen sich nach Lie's Theorien sofort hinschreiben. Jede endliche continuierliche Gruppe von quadratischen Transformationen der Ebene ist vermöge einer projectiven Coordinatentransformation mit einer dieser 2 Gruppen oder einer ihrer Untergruppen ähnlich.

Hierzu möge noch bemerkt werden, daß die infinitesimalen Transformationen der ersten Gruppe diese sind:

$$\boxed{p, \; xp, \; x^2 p, \; q, \; yq, \; y^2 q}$$

Hingegen sind die der zweiten:

$$\boxed{q, \; xq, \; x^2 q, \; yq; \; p, \; xp; \; x^2 p + 2xyq}$$

Beide Gruppen sind auch Typen in Lie's allgemeiner Tafel aller endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene.

Göttingen, Januar 1896.