Ein Ausgleichungsproblem.

Von

Georg Bohlmann in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. December 1899 von Klein.

1. *Problemstellung.* Eine häufig vorkommende Aufgabe der Praxis besteht darin Beobachtungsdaten auszugleichen. Ein einfacher, nicht selten auftretender Fall läßt sich geometrisch in dieser Weise beschreiben:

Gegeben sind n Ordinaten:

$$y_1, y_2, \dots y_n,$$

die zu n aequidistanten Abscissen $1, 2, \dots n$ gehören. Zur Orientierung verbindet man gern ihre Endpunkte durch Sehnen und erhält so einen Polygonzug (y). Man versucht diesen durch einen „ausgeglichenen" Polygonzug (η) zu ersetzen, welcher den Abscissen $1, 2, \dots n$ die Ordinaten:

$$\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$$

zuordnet.

Man kann verschieden verfahren, um dieses praktische Bedürfnis in ein wohldefiniertes mathematisches Problem zu verwandeln. Der Ansatz dieser Note soll der folgende sein:

Wir messen 1) den Grad der Abweichung des ausgeglichenen von dem gegebenen Polygonzuge durch die Zahl:

$$A = \sum_1^n{}_\varkappa (\eta_\varkappa - y_\varkappa)^2,$$

2) die Stärke der Schwankung des ausgeglichenen Polygonzuges durch die Zahl:

$$B = \sum_1^{n-1}{}_\varkappa (\eta_{\varkappa+1} - \eta_\varkappa)^2,$$

3) fixieren wir eine positive Zahl γ^2, welche wir als Gewicht bezeichnen.

Wir ordnen nun dem Polygonzuge (y) als ausgeglichenen Polygonzug (η) denjenigen zu, für welchen:

$$A+\gamma^2 B = \sum(\eta_x - y_x)^2 + \gamma^2 \sum(\eta_{x+1}-\eta_x)^2 \tag{1}$$

ein Minimum wird.

2. *Die Differenzengleichung.* Durch Differentiation des Ansatzes ergiebt sich zunächst der:

Satz I. Damit die Ordinaten η den Ausdruck (1) zu einem Minimum machen, ist notwendig und hinreichend, daß sie der linearen Differenzengleichung 2ter Ordnung mit konstanten Koefficienten genügen:

$$\eta_x - y_x = \gamma^2 [\Delta\eta_x - \Delta\eta_{x-1}]. \tag{2}$$

Dabei bedeutet:

$$\Delta\eta_x = \eta_{x+1} - \eta_x$$

und die Anfangsbedingungen sind:

$$\Delta\eta_0 = \Delta\eta_n = 0.$$

Wir werden in der nächsten Nummer die Gleichungen (2) thatsächlich nach den η auflösen. Damit ist dann der Beweis erbracht — und dieses läßt sich anch direkt zeigen —, daß die Determinante der Gleichungen (2) nicht verschwindet. Hieraus folgt:

Satz II. Zu jedem Polygonzug (y) gehört bei gegebenem Gewichte γ^2 ein und nur ein ausgeglichener Polygonzug (η).

Ferner liest man unmittelbar aus den Gleichungen (2) noch die Sätze ab:

Satz III. Parallele zur x-Achse gehen bei der Ausgleichung in sich über und umgekehrt; geht ein Polygonzug bei der Ausgleichung in sich über, so ist er eine Parallele zur x-Achse.

Dagegen gilt:

Satz IV. Eine Gerade, die nicht parallel zur x-Achse ist, geht nicht wieder in eine Gerade über.

Ferner:

Satz V. Der Schwerpunkt bleibt erhalten, d. h. es ist:

$$\sum_{x=1}^{n} \eta_x = \sum_{x=1}^{n} y_x$$

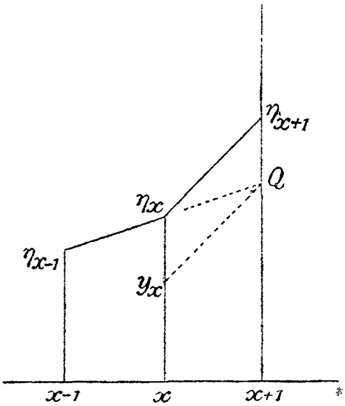
Satz VI. Der ausgeglichene Polygonzug kehrt dem gegebenen immer seine konvexe Seite zu.

Satz VII. Die Schwankung wird bei der Ausgleichung verkleinert, es ist:

$$\sum(\Delta\eta_x)^2 < \sum(\Delta y_x)^2.$$

Der letzte Satz folgt unmittelbar daraus, daß die η den Ausdruck (1) zu einem Minimum machen. Ueberträgt man die Gleichung (2) ins Geometrische, so entsteht für $\gamma^2 = 1$ der:

Satz VIII. Kennt man zwei aufeinanderfolgende η, so findet man alle übrigen durch eine graphische Konstruktion. Um z. B. η_{x+1} aus η_{x-1} und η_x zu finden, verbinde man die Endpunkte von η_{x-1} und η_x durch eine Gerade, welche die Ordinate durch $x+1$ in Q schneidet. Hierauf verbinde man den Endpunkt von y_x mit Q und ziehe durch den Endpunkt von η_x zu dieser Geraden eine Parallele. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Ordinate durch $x+1$ liefert den Endpunkt der Ordinate η_{x+1}.



Die nebenstehende Figur erläutert das Verfahren. Wir fügen noch hinzu:

Zusatz I. Es genügt η_1 oder η_n, oder $\Delta\eta_1$ oder $\Delta\eta_{n-1}$ allein zu kennen um alle übrigen Ordinaten η durch das graphische Verfahren zu finden.

Zusatz II[1]. Fängt man statt mit dem richtigen η_1 mit einem beliebigen (falschen) Werte $\bar{\eta}_1$ an und gelangt man durch die graphische Methode mit Hülfe der gegebenen Werte y zu dem Endwerte $\Delta\bar{\eta}_n$ für $\Delta\eta_n$ und findet man ebenso aus einem zweiten beliebigen Anfangswerte $\bar{\bar{\eta}}_1$ den Endwert $\Delta\bar{\bar{\eta}}_n$ statt $\Delta\eta_n$, so kann man den richtigen Wert η_1 aus der Proportion:

$$\Delta\bar{\eta}_n : \Delta\bar{\bar{\eta}}_n = (\bar{\eta}_1 - \eta_1) : \bar{\bar{\eta}}_1 - \eta_1)$$

geometrisch konstruieren.

3. *Auflösung der Differenzengleichung.* Nach den bekannten Methoden der Auflösung von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koefficienten findet man aus den Gleichungen (2) die li-

1) Diese Bemerkung stammt von Herrn F. Klein.

neare Substitution T, welche die $\Delta\eta$ durch die Δy ausdrückt und die lineare Substitution S, welche die η durch die y ausdrückt. Die erstere wird durch die Gleichungen vermittelt:

$$(3)\quad \Delta\eta_x = \frac{\operatorname{sih}(n-x)\alpha\sum_1^{x-1}{}_t\,\Delta y_t\cdot\operatorname{sih}t\alpha+\operatorname{sih}x\alpha\sum_x^{n-1}{}_t\,\Delta y_t\cdot\operatorname{sih}(n-t)\alpha}{\gamma^2\operatorname{sih}\alpha\operatorname{sih}n\alpha},\ x=1\ldots n-1$$

wo α die positive Zahl ist, die der Gleichung

$$\operatorname{coh}\alpha = 1+\frac{1}{2\gamma^2}$$

genügt. *sih* und *coh* bedeuten die hyperbolischen Sinus und Cosinus.

Unter den Gleichungen (3) sind die erste und letzte besonders einfach. Sie lauten:

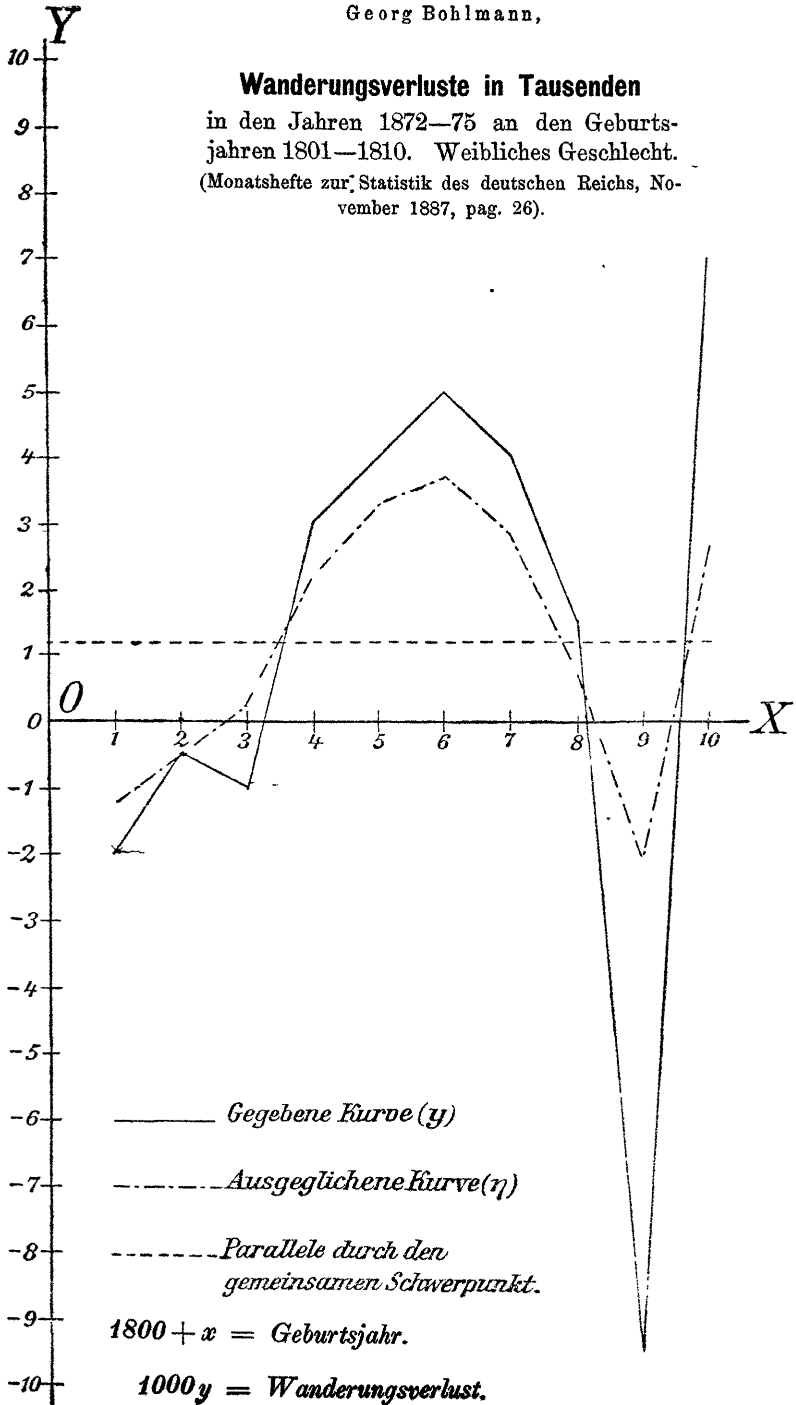
$$\gamma^2\operatorname{sih}n\alpha\cdot\Delta\eta_1 \quad = \Delta y_1\cdot\operatorname{sih}(n-1)\alpha+\cdots\cdots+\Delta y_{n-1}\cdot\operatorname{sih}1\alpha$$
$$\gamma^2\operatorname{sih}n\alpha\cdot\Delta\eta_{n-1} = \Delta y_1\operatorname{sih}1\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots+\Delta y_{n-1}\operatorname{sih}(n-1)\alpha$$

Da die $\sin x\alpha$ mit wachsendem x stark zunehmen, so sind die hier vorkommenden Reihen (wenn nicht γ sehr groß gewählt wird) rasch konvergent und zur numerischen Rechnung geeignet. Es ist jedoch erforderlich, wenn man das graphische Verfahren der vorigen Nummer anwenden will, den Anfangswert $\Delta\eta_1$ oder $\Delta\eta_{n-1}$ sehr genau zu berechnen, da bei jener Methode sich die Fehler sehr stark summieren.

Hat man z. B. $n = 100$ Werte y_x auszugleichen, so thut man gut etwa von 10 zu 10 Werten die $\Delta\eta_x$ direkt aus Formel (3) zu berechnen und nur dazwischen das rekurrierende Verfahren des Satzes VIII anzuwenden. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, aus der Differenz zwischen dem direkt berechneten und dem rekurrierend gefundenen Werte des End-η einer Periode die Korrektionen für alle einzelnen η zu ermitteln. Ist nämlich ε der Fehler von η_1, so ist der Fehler ε_x, der durch rekurrierende Bestimmung aus dem ungenauen η_1 für η_x entspringt, gleich:

$$\varepsilon_x = \frac{\sin x\alpha-\operatorname{sih}(x-1)\alpha}{\operatorname{sih}\alpha}\cdot\varepsilon$$

Mit Hülfe dieser Korrektionen ist die numerische Rechnung auch für große Werke von n sehr sicher und ohne zu großen Zeitaufwand ausführbar. In der Figur auf der folgenden Seite ist ein der Bevölkerungsstatistik entnommenes Beispiel mit dem Gewicht $\gamma^2 = 1$ wiedergegeben. Die Berechnung der 10 Ordinaten hat 2 Stunden in Anspruch genommen.



Wanderungsverluste in Tausenden
in den Jahren 1872—75 an den Geburtsjahren 1801—1810. Weibliches Geschlecht.
(Monatshefte zur Statistik des deutschen Reichs, November 1887, pag. 26).

Was nun die Substitution S anlangt, welche die η selbst durch die y ausdrückt, so sei:

$$(4) \qquad \eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k. \qquad (i = 1 \ldots . n)$$

Alsdann kann man das Schema der a_{ik} am einfachsten so beschreiben:

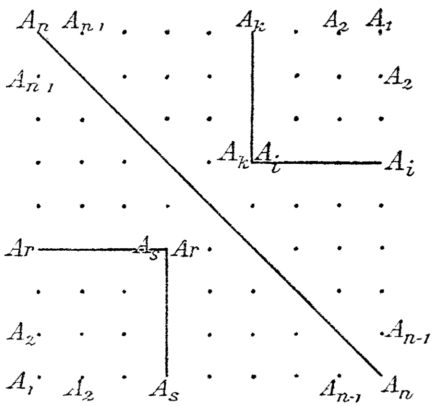
Sei A_x der Nenner des x^{ten} Näherungswertes in der Kettenbruchentwickelung:

$$\frac{1}{1}\dot{+}\frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha}\dot{+}\frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha}\dot{+}\frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha}\dot{+}\ldots,$$

wo der Punkt über dem Pluszeichen bedeuten soll, daß es eigentlich in den Nenner des vorhergehenden Bruches gehört, so wird:

$$A_x = \frac{\operatorname{sih} x\alpha - \operatorname{sih}(x-1)\alpha}{\operatorname{sih}\alpha}$$

eine Reihe von wachsenden, positiven Zahlen. Man bilde nun den Rand eines Quadrates von n^2 Elementen durch die Zahlen A in dieser Weise:



Um auch das Innere des Schemas auszufüllen, markiere man die Diagonale $A_n \ldots A_n$. Jedes Element, das rechts von ihr steht, wird durch Multiplikation derjenigen beiden A des Randes erhalten, die in derselben Horizontale auf der letzten Vertikale bezw. in derselben Vertikale in der ersten Horizontale stehen, wie dies durch $A_k A_i = A_i \cdot A_k$ angedeutet ist. Aehnlich verfährt man bei der Bildung der Elemente $A_r A_s$ links von der Diagonale, wie dies in dem Schema angedeutet ist. Auf der Diagonale selbst führen beide Verfahren zu dem gleichen Ziel. Dividiert man nun alle Elemente des so ausgefüllten Schemas durch die Summe aller A:

$$A = \sum A_\varkappa = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha},$$

so erhält man das Schema der a_{ik}.

Aus der beschriebenen Beschaffenheit der Substitutionen S und T resultieren die Sätze:

Satz IX. Sowohl in der Substitution S als in der Substitution T sind alle Koefficienten positiv. Speziell in der Substitution S ist noch die Summe aller Koefficienten einer Horizontale oder Vertikale gleich 1. Ueberdies ist das System der a_{ik} symmetrisch. In einer Reihe desselben nehmen die Koefficienten immer bis zur Diagonale zu, von da aus wieder ab. Auf der Diagonale selbst liegt das Minimum der Koeffizienten in der Mitte, das Maximum an den Enden.

Hieraus folgt aber:

Satz X. Die η sind Mittelwerte der y, bei der Bildung von η_k fallen y_k und die in der nächsten Umgebung von y_k liegenden y am stärksten, die übrigen um so weniger ins Gewicht, je weiter sie von y_k abstehen. Das Maximum der η ist kleiner als das Maximum der y, das Minimum der η größer als das Minimum der y.

Satz XI. Sind alle y von gleichem Zeichen, so sind auch alle η von demselben Zeichen. Wenn alle y beständig zunehmen (abnehmen), so gilt Gleiches von den η.

4. *Einführung multiplikativer Verbindungen.* An Stelle der y und η kann man lineare Funktionen von diesen:

$$Y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + y_n,$$
$$H = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \eta_{n-1} + \eta_n$$

einführen, die sich multiplikativ verhalten, so daß bei Ausführung der Substitution S, H bis auf einen konstanten, von der Wahl der y unabhängigen Faktor in Y übergeht. Sei

$$H - Y = \varrho \cdot H, \tag{5}$$

so müssen die $\lambda_\varkappa$ der linearen homogenen Differenzengleichung 2ter Ordnung genügen:

$$\lambda_{\varkappa+1} - \left(2 + \frac{\varrho}{\gamma^2}\right)\cdot\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa-1} = 0, \qquad \varkappa = 1 \ldots n$$

wo $\lambda_0 = \lambda_1$, $\lambda_{n+1} = \lambda_n = 1$ zu setzen ist. Daher muß die Determinante verschwinden:

$$D_n(\omega) = -(\omega - 2)\cdot F_{n-1}(\omega).$$

Dabei ist $\omega = \frac{\varrho}{\gamma^2}+2$ gesetzt und $F_n(\omega)$ ist der Nenner des n^{ten} Näherungswertes in der Kettenbruchentwickelung:

$$F(\omega) = \frac{-1}{-\omega} \dot{+} \frac{-1}{-\omega} \dot{+} \cdots.$$

Uebrigens wird

$$F_{n-1}(\omega) = \frac{(-1)^{n-1}\sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

wenn man

$$\omega = 2\cos\varphi$$

setzt. Hieraus folgt:

Satz XII. Die Gleichung $D_n(\omega) = 0$ hat n reelle, von einander verschiedene Wurzeln, die sämtlich zwischen -2 und $+2$ liegen:

$$\omega = 2\cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0,\ 1 \ldots n-1$$

Satz XIII. Den n Werten

$$\varrho = -4\gamma^2\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

entsprechen n multiplikative Verbindungen Y_k, die sich aus

(6) $\sin\varphi_k\cdot Y_k = \varDelta y_{n-1}\cdot\sin 1\,\varphi_k + \varDelta y_{n-2}\cdot\sin 2\,\varphi_k + \cdots + \varDelta y_1\cdot\sin(n-1)\varphi_k$

ergeben, wenn man $\varphi_k = \frac{k\pi}{n}$ setzt und k von 0 bis $n-1$ wandern läßt.

Setzt man analog:

$$\sin\varphi_k\,.\,H_k = \varDelta\eta_{n-1}\,.\,\sin 1\,\varphi_k + \varDelta\eta_{n-2}\sin 2\,\varphi_k + \cdots + \varDelta\eta_1\,.\,\sin(n-1)\,\varphi_k,$$

so hängt H_k mit dem entsprechendem Y_k durch die Gleichung zusammen:

$$H_k = \frac{Y_k}{1+4\gamma^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi_k}, \quad k = 0\cdots n-1$$

und im Besonderen ist:

$$H_0 = \eta_1+\cdots+\eta_n = Y_0 = y_1+y_2+\cdots+y_n$$

in Uebereinstimmung mit Satz V.

Aus der Darstellung der H durch die Y ergiebt sich:

Satz XIV. Die Schwankung des ausgeglichenen Polygonzuges ist

$$\sum_{x=1}^{n-1}(\varDelta\eta_x)^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\varphi_k H_k^2 = \frac{2}{n}\sum\frac{\sin^2\varphi_k Y_k^2}{(1+4\gamma^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi_k)^2}$$

Sie hängt mit der Schwankung des Polygonzuges (y) zusammen durch die Gleichung:

$$\sum (\varDelta \eta_x)^2 = \frac{\sum (\varDelta y_x)^2}{(1+4\gamma^2 \sin^2 \vartheta)^2}$$

wo ϑ *einen Mittelwert der* $\frac{1}{2}\varphi_k$, *also eine Zahl zwischen 0 und* $\frac{\pi}{2}$ *ausschließlich der Grenzen bedeutet.*

Dieser Satz bedeutet eine Verschärfung des Satzes VII.

Aus der Darstellung der H durch die Y folgt ferner:

Satz XV. Denkt man sich die Substitution S wiederholt, indem man den Polygonzug (η) *seinerseits wieder nach demselben Verfahren ausgleicht, und denkt man sich diese Operation unbegrenzt oft fortgesetzt, so ergeben die Substitutionen:*

$$1,\ S,\ S^2, \cdots\cdots,$$

angewandt auf den ursprünglichen Polygonzug (y), eine unendliche Reihe von Polygonzügen:

$$(y),\ (\eta),\ (\overline{\eta}),\ \cdots\cdot$$

deren Grenzlage ein Polygonzug $(\overset{\infty}{\eta})$ *ist, der durch eine Parallele durch den Schwerpunkt des ursprünglichen Polygonzuges (y) gebildet wird; d. h. es werden die Ordinaten an der Grenze:*

$$\overset{\infty}{\eta}_x = \frac{y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n}{n} \quad (x = 1 \ldots\ldots n).$$

5. *Beziehung zu den trigonometrischen Reihen.* Setzt man y_x und η_x in trigonometrische Reihen der Form:

$$y_x = A_0 + A_1 \varDelta \sin 1\varphi_{x-1} + A_2 \varDelta \sin 2\varphi_{x-1} + \cdots + A_{n-} \ \varDelta \sin (n-1)\varphi_{x-1} \tag{7}$$

$$\eta_x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \varDelta \sin 1\varphi_{x-1} + \mathrm{A}_2 \varDelta \sin 2\varphi_{x-1} + \cdots\cdot \mathrm{A}_{n-1} \varDelta \sin (n-1)\varphi_{x-1}, \tag{7'}$$

wo φ_{x-1} wie früher $\frac{(x-1)\pi}{n}$ bedeutet und

$$\varDelta \sin k\varphi_{x-1} = \sin k\varphi_x - \sin k\varphi_{x-1}$$

gesetzt ist, so ist eine solche Entwickelung immer möglich. Die einzelnen Glieder der Reihe würden durch Anwendung unseres Verfahrens so ausgeglichen werden, daß geradezu $A_k \varDelta \sin k\varphi_{x-1}$ in $\mathrm{A}_k \varDelta \sin k\varphi_{x-1}$ übergeht, wobei sich:

$$\mathrm{A}_k = \frac{A_k}{1 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \tag{8}$$

ergiebt. A_0 bliebe ungeändert gleich A_0. Dies folgt unmittelbar aus der Differenzengleichung (2). Von der Funktion y_x, die durch die ganze trigonometrische Reihe (7) dargestellt ist, geht man daher zu der ausgeglichenen Funktion η_x in der Darstellung (7') einfach dadurch über, daß man an Stelle der A die A der Gleichungen (8) für $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$ setzt.

Da die A sich umgekehrt als lineare Funktionen der y darstellen laßen, indem man die Gleichungen (7) nach ihnen auflöst und die A dieselben Funktionen der η werden, und da nach (8) die A sich multiplikativ verhalten, so müßen sie bis auf konstante, d h. von der Wahl der y unabhängige, Faktoren mit den Y der vorigen Nummer identisch sein. In der That entstehen die Gleichungen (7) einfach aus den Gleichungen (6), wenn man diese nach den y auflöst und man findet auf diese Weise:

$$A_k = \frac{(-1)^k}{n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \varphi_k \cdot Y_k, \quad \mathsf{A}_k = \frac{(-1)^k}{n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \varphi_k \cdot H_k, \quad k = 1 \ldots n-1$$

$$A_0 = Y_0, \qquad \mathsf{A}_0 = H_0$$

6. *Uebertragung des Problems auf kontinuierliche Veränderliche.* Ueberträgt man das Problem auf kontinuierliche Veränderliche, so wird die in der vorigen Nummer behandelte Beziehung zu den trigonometrischen Reihen weit deutlicher, dafür geht die Einfachheit der graphischen Konstruktion (vergl. Satz VIII) verloren. Im Uebrigen wird alles analog dem Falle der diskontinuierlichen Veränderlichen. Man macht wieder den Ansatz (1), nur daß dieses Mal

$$A = \int_a^b (\eta - y)^2 dx, \qquad B = \int_a^b \eta'^2 dx$$

zu setzen ist, wenn die gegebene Kurve $y = f(x)$ in demIntervalle von $x = a$ bis $x = b$ durch eine ausgeglichene mit den Ordinaten η ersetzt werden soll. η' bedeutet natürlich $\frac{d\eta}{dx}$. An Stelle der Differenzengleichung (2) tritt die Differentialgleichung:

$$\eta - y = \gamma^2 \cdot \eta'',$$

mit den Anfangsbedingungen, daß die Kurve parallel der x-Achse ansetzt und endet:

$$(\eta')_a = (\eta')_b = 0.$$

An Stelle der Gleichungen (3) und (4) treten:

$$\gamma \operatorname{sih} \frac{b-a}{\gamma} \cdot \eta' =$$
$$\operatorname{sih} \frac{b-x}{\gamma} \int_a^x \frac{dy}{dt} \operatorname{sih} \frac{t-a}{\gamma}\, dt + \operatorname{sih} \frac{x-a}{\gamma} \int_x^b \frac{dy}{dt} \operatorname{sih} \frac{b-t}{\gamma}\, dt$$

und:

$$\gamma \cdot \operatorname{sih} \frac{b-a}{\gamma} \cdot \eta =$$
$$\operatorname{coh} \frac{b-x}{\gamma} \int_a^x y \operatorname{coh} \frac{t-a}{\gamma}\, dt + \operatorname{coh} \frac{x-a}{\gamma} \int_x^b y \cdot \operatorname{coh} \frac{b-t}{\gamma}\, dt. \tag{9}$$

Ist nun $y = f(x)$ in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ in eine trigonometrische Reihe entwickelbar, so kann man die Reihe aufstellen:

$$y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{x-a}{b-a} \pi + A_2 \cos 2 \frac{x-a}{b-a} \pi + \cdots$$

Alsdann ist auch η in eine trigonometrische Reihe entwickelbar:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cos \frac{x-a}{b-a} \pi + \mathrm{A}_2 \cos 2 \frac{x-a}{b-a} \pi + \cdots$$

und es wird:

$$\mathrm{A}_k = A_k \cdot \frac{(b-a)^2}{k^2 \pi^2 \gamma^2 + (b-a)^2}, \quad k = 0, 1 \ldots \infty \tag{10}$$

Mit Hülfe des Michelson'schen Apparats [1]) ließe sich daher die Ausgleichung einer Kurve nach unserem Ansatz sehr leicht bewerkstelligen. Erst bestimmt man aus der gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Koefficienten A, sodann stellt man in dem Apparat an Stelle der A_k die aus den letzten Gleichungen zu berechnenden A_k ein, alsdann zeichnet der Apparat die Kurve für η.

Betrachtet man z. B. die Weierstraß'sche Funktion [2]):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cos(\alpha^n x \pi),$$

wo β einen positiven echten Bruch, α eine ungerade ganze Zahl bedeutet, für die $\alpha\beta$ größer als $1 + \frac{3}{2}\pi$ ist, so ist bekanntlich y eine durchaus stetige Funktion, die an keiner Stelle differenzierbar ist. Wendet man auf sie unser Ausgleichungsverfahren in einem Inter-

1) A. A. Michelson and J. W. Stratton, A new Harmonic Analyzer. — The American Journal of Science, New Haven, Conn. 1898.

2) Der Vorschlag, das Verfahren auf diese Funktion anzuwenden rührt von Herrn Zermelo her.

valle an, das von den ganzen Zahlen $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist, so ergiebt sich aus der Formel (9) oder (10) eine ausgeglichene Kurve, deren Gleichung:

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \cos(\alpha^n x \pi)}{1 + \alpha^{2n} \gamma^2 \pi^2}$$

ganz unabhängig von den Endpunkten (a, b) des Intervalles ist, durch welches man die Ausgleichung begrenzte. Die entstandene Funktion ist — wie klein auch das Gewicht γ^2 sein mag — für alle Werte x bis zur zweiten Ableitung einschließlich stetig und man erhält diese Ableitungen aus der Reihe für η durch gliedweise Differentiation. Dagegen existiert der dritte Differentialquotient an keiner Stelle x mehr.

Die Uebertragung des Ansatzes auf mehr Veränderliche führt auf Randwertaufgaben [1]). Ich behalte mir vor bei späterer Gelegenheit dies weiter auszuführen.

1) Die Existenz des Minimums und damit die Lösbarkeit der zugehörigen Randwertaufgabe folgt hier sehr einfach aus den von Herrn Hilbert auf der Naturforscherversammlung in Munchen 1899 vorgetragenen Methoden.