Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 3. Marz 1900.

In der Theorie der algebraischen Zahlen ist die Frage von Interesse, ob in einem beliebigen Galois'schen Körper stets eine Einheit existirt, welche unter ihren conjugirten Zahlen ein vollständiges System unabhängiger Einheiten des Körpers darbietet. Durch die folgenden Betrachtungen wird diese Frage in bejahendem Sinne entschieden.

1. Ich benutze dabei hauptsächlich den nachstehenden Satz über das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante:

Hülfssatz. *Sind in einer m-reihigen Determinante*

$$A = |\, a_{hk} \,| \qquad (h, k = 1, 2, \dots m)$$

von m^2 reellen Größen alle Glieder a_{hk} außerhalb der Hauptdiagonale (also für $h \gtrless k$) < 0 und sind ferner die Summen

$$a_{h1} + a_{h2} + \cdots + a_{hm} = s_h \qquad (h = 1, 2, \dots m)$$

der Glieder in den einzelnen Horizontalreihen durchweg > 0, so ist die Determinante stets > 0.

Beweis. Für $m = 1$ ist der Satz selbstverständlich. Um ihn für einen bestimmten Werth $m > 1$ zu erweisen, nehmen wir an, daß er für alle kleineren Werthe des m bereits sicher gestellt sei. Wir setzen $a_{hh} = s_h + \alpha_{hh}$ $(h = 1, 2, \dots m)$ und entwickeln die Determinante A nach den m Größen $s_1, s_2, \dots s_m$. Das von $s_1, s_2, \dots s_m$ freie Glied dieser Entwickelung wird eine m-reihige Determinante A^*, bei welcher in jeder Horizontalreihe die Summe aller Glieder Null ist und welche daher den Werth Null hat. Weiter wird der

Coefficient eines Products $s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_l}$, wenn $l \geqq 1$ und $< m$ ist, eine Determinante von $m - l$, also weniger als m Reihen, in welcher alle Glieder außerhalb der Hauptdiagonale negativ sind und in jeder Horizontalreihe die Summe der Glieder größer als die Summe der Glieder der entsprechenden Horizontalreihe von A^*, also gewiß > 0 ist. Auf Grund der von uns gemachten Voraussetzung erweist sich daher jeder dieser Coefficienten > 0. Außerdem erscheint in jener Entwickelung noch das Glied $s_1 s_2 \dots s_m$. Nach dieser Zusammensetzung der Determinante A aus lauter positiven Termen ist sie offenber > 0.

2. Es sei jetzt θ eine algebraische Zahl n^{ten} Grades und unter den n verschiedenen conjugirten algebraischen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$, von denen θ ein Werth ist, seien r reelle und $\frac{1}{2}(n-r)$ Paare von conjugirt imaginären Zahlen vorhanden. Von dem Falle $n = 2$, $r = 0$ wollen wir absehen. Wir setzen $r + \frac{1}{2}(n-r) = m+1$, und wir wollen annehmen, daß in der Reihe der $m+1$ ersten Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{m+1}$ die sämmtlichen reellen jener Zahlen und ferner je eine Zahl aus jedem der Paare conjugirt imaginärer Zahlen sich befinden; zudem möge die Zahl θ selbst unter diesen $m+1$ Zahlen vorhanden sein. Ist ε eine Einheit in dem algebraischen Körper von θ, so wollen wir mit $l_h(\varepsilon)$ für $h = 1, 2, \dots m+1$ den reellen Theil des Logarithmus der zu ε conjugirten Zahl im Körper von θ_h oder das Doppelte dieses reellen Theils verstehen, je nachdem die Zahl θ_h reell oder imaginär ist. Da die Norm einer Einheit gleich ± 1 ist, gilt dann stets:

$$1) \qquad l_1(\varepsilon) + l_2(\varepsilon) + \dots + l_{m+1}(\varepsilon) = 0.$$

Wie Dirichlet gezeigt hat. kann man in dem Körper von θ stets eine Einheit derart bestimmen, daß von ihren conjugirten Zahlen in den Körpern von $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{m+1}$ alle bis auf eine Zahl in einem beliebig angenommenen dieser Körper absolute Beträge < 1 haben. Es sei in solcher Weise $\varepsilon^{(h)}$ für $h = 1, 2, \dots m$ eine Einheit, für welche $l_1(\varepsilon^{(h)}), \dots l_{h-1}(\varepsilon^{(h)}),\ l_{h+1}(\varepsilon^{(h)}), \dots l_{m+1}(\varepsilon^{(h)})$, also sämmtliche Werthe $l_k(\varepsilon^{(h)})$ für $k \gtrless h$ negativ ausfallen. Dann ist mit Rücksicht auf 1):

$$l_1(\varepsilon^{(h)}) + \dots + l_h(\varepsilon^{(h)}) + \dots + l_m(\varepsilon^{(h)}) > 0.$$

Die Determinante

$$|\, l_k(\varepsilon^{(h)}) \,| \qquad (h, k = 1, 2, \dots m)$$

trägt danach diesen Charakter, daß in ihr jeder Coefficient außerhalb der Hauptdiagonale negativ ist und die Summe der Glieder in jeder Horizontalreihe positiv ist. Dem Hülfssatze in 1. zufolge ist daher diese Determinante > 0. Somit bilden die hier charakterisirten Einheiten $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(m)}$ ein vollständiges System von unabhängigen Einheiten im Körper von θ.

Bei der Methode, welche Dirichlet zur Herstellung eines vollständigen Systems von unabhängigen Einheiten in einem Zahlkörper gegeben hat, werden die Einheiten des Systems successive bestimmt, wobei zur Ermittlung einer weiteren Einheit, so lange das System noch nicht vollständig ist, gewisse Determinanten aus den Logarithmen der früher bestimmten Einheiten und ihrer conjugirten Zahlen bekannt sein müssen. Nach dem hier Auseinandergesetzten ist es dagegen stets möglich, Einheiten in der erforderlichen Anzahl gesondert, jede für sich, zu bestimmen mit dem Erfolge, daß sie zusammen ein vollständiges System unabhängiger Einheiten ergeben.

3. Es sei jetzt der Körper von θ ein Galois'scher Körper, sodaß sich jede der Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ als eine rationale Function mit rationalen Coefficienten von jeder anderen dieser Zahlen darstellen läßt. Es sei in solcher Weise

$$\theta_h = R_h(\theta),\ \theta = S_h(\theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

wo R_h, S_h Zeichen für rationale Function mit rationalen Coefficienten sind, so gilt $S_h(R_h(\theta)) = \theta$ und infolgedessen auch allgemein $S_h(R_h(\theta_k)) = \theta_k$ für jeden Index $k = 1, 2, \ldots n$. Je nachdem θ reell oder imaginär ist, sind auch die conjugirten Zahlen alle reell oder alle imaginär, und hat man also $m+1 = n$ oder $= \frac{1}{2}n$.

Wir bestimmen im Körper von θ eine Einheit $\varepsilon = f(\theta)$, wo $f(\theta)$ eine rationale Function mit rationalen Coefficienten von θ bedeute, so daß von den $m+1$ conjugirten Zahlen $f(\theta_1), f(\theta_2), \ldots f(\theta_{m+1})$ alle mit Ausnahme der einen Zahl $f(\theta)$ absolute Beträge < 1 haben. Sodann sei ε_h für $h = 1, 2, \ldots m+1$ die conjugirte Zahl zu ε in dem Körper von θ_h, also $\varepsilon_h = f(\theta_h) = f(R_h(\theta))$; dabei ist ε_h jedesmal selbst eine Zahl im Körper von θ und sind deren conjugirte Zahlen in den Körpern von $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{m+1}$ bezüglich

$$2) \qquad f(R_h(\theta_1)),\ f(R_h(\theta_2)), \ldots f(R_h(\theta_{m+1})).$$

Nun hat man bei beliebigen Werthen h, k aus der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ stets $R_h(\theta_k) = R_h(R_k(\theta)) = \theta_g$, wo g einen der Indices $1, 2, \ldots n$ bedeutet. Dabei kann nicht für zwei verschiedene Indices k bei demselben Index h hier derselbe Werth θ_g und können auch nicht conjugirt imaginäre Werthe θ_g resultiren, da aus dieser Relation umgekehrt $\theta_k = S_h(\theta_g)$ folgt und unter den Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{m+1}$ keine zwei gleich oder conjugirt imaginär sind. Danach sind die absoluten Beträge der Größen in 2) abgesehen von der Reihenfolge identisch mit den Beträgen der Größen $f(\theta_1), f(\theta_2), \ldots f(\theta_{m+1})$, es ist also einer jener Beträge > 1 und die m anderen sind sämmtlich < 1, und zwar ist für denjenigen Index k der Betrag $|f(R_h(\theta_k))| > 1$, für den $R_h(\theta_k)$ gleich θ bezüglich gleich der conjugirt imaginären Zahl, also θ_k gleich $S_h(\theta)$ bezüglich gleich der conjugirt imaginären Zahl ist. Für verschiedene Werthe h der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ wird der hier in Betracht kommende Index k aus der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ jedesmal ein anderer sein. Nach den Auseinandersetzungen in 2. bilden nunmehr irgend m der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m+1}$ ein vollständiges System von unabhängigen Einheiten in dem Galois'schen Körper von θ. Auf diese Weise resultirt der Satz:

In einem Galois'schen Körper kann man stets eine solche Einheit angeben, daß eine jede Einheit dieses Körpers ein Product aus einer Einheitswurzel und aus Potenzen dieser Einheit und ihrer conjugirten Einheiten mit rationalen Exponenten ist.

Da ein jeder algebraischer Körper ein Unterkörper eines Galois'schen Körpers ist und seine Einheiten dann zugleich als Einheiten des Galois'schen Körpers auftreten, ist hierdurch zugleich ein bemerkenswerther Satz über die Einheiten in einem beliebigen algebraischen Körper gewonnen.

Zürich, den 23. Februar 1900.