Les suites de Farey et le problème des nombres premiers.

Von

J. Franel in Zürich.

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 21. November 1924.

L'hypothèse relative aux racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ énoncée par Riemann dans son célèbre mémoire sur les nombres premiers n'a été ni confirmée, ni infirmée. Sa démonstration présente les plus grandes difficultés et semble être réservée à un avenir encore lointain. En attendant nous nous proposons, dans cette note, de montrer que le contenu de l'hypothèse en question est exprimé complètement par une propriété des suites de Farey où n'interviennent que des nombres rationnels.

La suite de Farey du n^e ordre est constituée par les fractions irréductibles positives dont le dénominateur est au plus égal à n.

Soient

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots$$

ces fractions rangées par ordre de grandeur croissante,

$$A(n) = A = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)$$

le nombre de ces fractions $\leqq 1$, et plus généralement $g(x, n)$ le nombre des termes de notre suite $\leqq x$, x désignant une quantité positive quelconque.

Le nombre des fractions irréductibles positives $\leqq x$ de dénominateur r a pour expression

$$\sum \mu\left(\frac{r}{d}\right)[dx],$$

où la somme s'étend aux diviseurs du nombre r. On en conclut

$$g(x, n) = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{d} \mu\left(\frac{r}{d}\right)[dx] = \sum_{a=1}^{a=n} [ax] M\left[\frac{n}{a}\right],$$

en faisant

$$M(n) = \sum_{r=1}^{r=n} \mu(r).$$

Introduisons la fonction périodique

$$f(x) = [x] - x + \tfrac{1}{2};$$

il viendra, si l'on observe que

$$A = \sum_a a\, M\left[\frac{n}{a}\right], \quad 1 = \sum_a M\left[\frac{n}{a}\right],$$

$$g(x, n) = \sum_a f(ax)\, M\left[\frac{n}{a}\right] - \tfrac{1}{2} + Ax$$

ou

$$g(x, n) = \delta(x, n) - \tfrac{1}{2} + Ax,$$

si l'on fait

$$\delta(x, n) = \sum_a f(ax)\, M\left[\frac{n}{a}\right].$$

J'entends par ϱ_0 le nombre 0. Dans l'intervalle $\varrho_i \ldots \varrho_{i+1}$,

$$\delta(x, n) = i + \tfrac{1}{2} - Ax$$

ou

$$\delta(x, n) = \delta_i - A(x - \varrho_i),$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\delta_i = i + \tfrac{1}{2} - A\varrho_i,$$

en désignant ainsi par δ_i la limite de $\delta(x, n)$ quand x tend vers ϱ_i par des valeurs décroissantes.

On a évidemment

$$(1) \qquad \delta_i + \delta_{A-i} = 1,$$

$$(2) \qquad \delta_i + \delta_{A-i-1} = A(\varrho_{i+1} - \varrho_i),$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$\sum_{i=0}^{A-1} \delta_i = \frac{A}{2}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I(n) = \int_0^1 \delta^2(x, n)\, dx.$$

On s'assure aisément[1]) que

$$\int_0^1 f(ax) f(bx)\, dx = \frac{(a, b)^2}{12\, a \cdot b}.$$

1) En utilisant le développement de $f(x)$ en série trigonométrique.

Dans cette formule, a et b désignent deux nombres entiers positifs et (a, b) leur plus grand commun diviseur.

Il en résulte

$$I(n) = \frac{1}{12} \sum_{b=1}^{b=n} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(a,b)^2}{a \cdot b} M\left[\frac{n}{a}\right] M\left[\frac{n}{b}\right].$$

Faisons

$$C(n) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{a} M\left[\frac{n}{a}\right]$$

et

$$H(n) = \sum{}' \frac{1}{a \cdot b} M\left[\frac{n}{a}\right] M\left[\frac{n}{b}\right],$$

la sommation dans cette dernière équation s'étendant aux couples de nombres entiers positifs a et $b \leqq n$, et premiers entre eux.

On aura

$$C^2(n) = \sum_r \frac{1}{r^2} H\left[\frac{n}{r}\right],$$

d'où

$$H(n) = \sum_r \frac{\mu(r)}{r^2} C^2\left[\frac{n}{r}\right],$$

puis

$$I(n) = \frac{1}{12} \sum_r H\left[\frac{n}{r}\right],$$

(3) $$I(n) = \frac{1}{12} \sum_r \sigma(r) C^2\left[\frac{n}{r}\right],$$

où

$$\sigma(r) = \sum_d \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

La somme s'étend aux diviseurs de r et le produit aux facteurs premiers contenus dans r.

Les quantités $\sigma(r)$ sont donc des grandeurs positives $\leqq 1$. Quant à $C(n)$, c'est la somme des n premiers coefficients dans le développement de la fonction $\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)}$ en série de Dirichlet:

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s},$$

$$C(n) = \sum_{r=1}^{r=n} c(r).$$

D'autre part, on a

$$I(n) = \sum_{i=0}^{A-1} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} \delta^2(x, n)\, dx = \sum_i \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} (\delta_i - A(x - \varrho_i))^2\, dx,$$

d'où, en tenant compte de l'équation (2),

$$I(n) = \sum_{i=0}^{A-1}\left(\frac{\delta_i^3 + \delta_{A-i-1}^3}{3A}\right) = \frac{2}{3A}\sum_i \delta_i^3.$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation (1), $\delta_i - \frac{1}{2}$ change simplement de signe quand on y remplace i par $A - i$. de sorte que

$$\sum_i (\delta_i - \tfrac{1}{2})^3 = 0,$$

d'où résulte, puisque $\sum_i \delta_i = \frac{A}{2}$,

$$I(n) = \frac{1}{A}\sum_i \delta_i^2 - \tfrac{1}{6},$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\sum_i\left(\delta_i - \frac{1}{2}\right)^2 = A\left(I(n) - \frac{1}{12}\right)$$

ou

$$\sum_i\left(\frac{i}{A} - \varrho_i\right)^2 = \frac{1}{A}\left(I(n) - \frac{1}{12}\right).$$

Maintenant si l'hypothèse de Riemann est fondée, $M(n)$, comme l'a démontré M. Littlewood [1]), est de l'ordre $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ (ε quantité positive aussi petite qu'on le veut); il en est de même évidemment de $C(n)$. Par conséquent $I(n)$, en vertu de la formule (3), est de l'ordre $n^{1+\varepsilon}$.

Réciproquement, si $I(n)$ est de l'ordre $n^{1+\varepsilon}$, on aura, à plus forte raison,

$$C^2(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right),$$
$$C(n) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

La série

$$\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{c(n)}{n^s}$$

converge pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et l'hypothèse de Riemann est confirmée.

L'affirmation de l'illustre géomètre revient donc à celle-ci:

$$I(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$$

ou, ce qui revient au même, à cette autre:

$$\sum_i\left(\frac{i}{A} - \varrho_i\right)^2 = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right).$$

C'est ce que nous voulions établir.

1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 154 (1912), p. 263—266.