Die Axiomatisierung der Mengenlehre[1]).

Von

J. v. Neumann in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Bezeichnungen.

I. Die Axiome.

1. Einleitung.
2. Diskussion der Axiome.
3. Systematisches zur Herleitung.

II. Die elementaren Operationen der Mengenlehre.

1. Hilfssätze.
2. Grunddefinitionen.
3. Einstellen-Funktionen und Elementarmengen.
4. Zusammensetzung von Funktionen.
5. Summe, Durchschnitt und Differenz von zwei Bereichen.
6. Rechenregeln.

III. Die allgemeinen Operationen der Mengenlehre.

1. Vereinigungsbereich und Durchschnitt eines Bereiches von Mengen.
2. Der Bildbereich.
3. Der Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen).
4. Der Paarbereich.
5. Der allgemeine Potenzbereich.

---

[1]) Der Gegenstand dieser Arbeit stimmt in vielen Teilen mit dem meiner Doktor-Dissertation: Der axiomatische Aufbau der allgemeinen Mengenlehre, Budapest, September 1925 (ungarisch), überein.

IV. Grundbegriffe der Wohlordnung.

1. Die unvollständige Ordnung. Abschnitte.
2. Auferlegte und übertragene Ordnung. Subsumptionsordnung.
3. Eigenschaften der auferlegten und der übertragenen Ordnung.
4. Ähnlichkeit.
5. Vollständige und Wohlordnung.
6. Abschnitte in wohlgeordneten Bereichen.

V. Theorie der Ordnungszahlen.

1. Zählung, Ordnungszahl, Zählbarkeit.
2. Eindeutigkeit der Zählung.
3. Existenz der Zählung.
4. Subsumptionsordnung von Ordnungszahlen.
5. Charakteristische Eigenschaften von Ordnungszahlen.
6. Der Bereich der Ordnungszahlen.

VI. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen. Der Wohlordnungssatz.

1. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen.
2. Vergleichbarkeit, Eindeutigkeit der Abbildung.
3. Die Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.
4. Die Wohlordnung beliebiger Bereiche.

VII. Die Äquivalenz und die Kardinalzahlen.

1. Die Äquivalenz.
2. Die Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten.
3. Die Vergleichbarkeit.

VIII. Die Endlichkeit. Die ersten Ordnungszahlen.

1. Die Endlichkeit.
2. Eigenschaften der Endlichkeit.
3. Grundoperationen mit Ordnungszahlen.
4. Die natürlichen Zahlen, ω.

IX. Induktionssätze.

1. Die transfinite Induktion.
2. Ein Spezialfall. Die finite (gewöhnliche vollständige) Induktion.

Schluß.

Bezeichnungen.

Wir geben hier eine Zusammenstellung der Zeichen, Namen und Symbole, die in dieser Arbeit benützt werden.

Zeichen.

Für I-Dinge (vgl. Kap. I, §§ 1, 2) a, b, c, d, e und $r, s, t, u, v, w, x, y, z$.
Für II-Dinge (vgl. Kap. I, §§ 1, 2) f, g, h, j, k, l, m, n und $\varphi, \psi, \chi, \xi, \zeta$.
Für Bereiche und Mengen (vgl. Kap. II, § 2) H, J, K, L, M, N.
Für Ordnungszahlen (vgl. Kap. V, § 1) P, Q, R, S, T.
Für Bereiche und Mengen von Ordnungszahlen $\mathcal{H}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$.

Namen und Symbole.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
I-Ding, II-Ding, I II-Ding	Funktion, Argument, Argument-Funktion.	
$[f, x]$	Wert der Funktion f für das Argument x.	Kap. I, §§ 1, 2.
$\langle x, y\rangle$	Paar der Argumente x, y.	
	Menge, Bereich.	
$x \varepsilon H$	x ist Element von H.	
$H \lesssim J,\ J \gtrsim H$	H ist ein Teilbereich (Teilmenge) von J.	
$\varphi \lesssim \psi,\ \psi \gtrsim \varphi$		Kap. II, § 2.
$H < J,\ J > H$	H ist ein echter Teilbereich (echte Teilmenge) von J.	
$\varphi < \psi,\ \psi > \varphi$		
$\varphi \sim \psi$		
$\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & w \end{matrix}\right\}$		
0	Nullmenge.	Kap. II, § 3.
$\{u\}$		
$\left(\frac{f \mid g}{h}\right)$	Aus f und g mit Hilfe von h zusammengesetzte Funktion.	Kap. II, § 4.
$H + J$	Summe von H und J.	
$H \cdot J$	Durchschnitt (Produkt) von H und J.	Kap. II, § 5.
$H - J$	Differenz von H und J.	
$\mathcal{B}(f)$	Basis von f.	
$\{u, v\}$		Kap. II, § 6.
Ω	Bereich aller I-Dinge (Argumente).	
$\mathcal{S}(H)$	Vereinigungsbereich (Menge) aller Elemente von H.	Kap. III, § 1.
$\mathcal{D}(H)$	Durchschnittsbereich (Menge) aller Elemente von H.	
$\vert[f, H]\vert$	Durch f vermittelter Bildbereich (Menge) von H.	Kap. III, § 2.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
$\mathcal{P}(H)$	Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen bzw. Menge usw.) von H.	Kap. III, § 3.
$\{\langle H, J\rangle\}$	Paarbereich (Menge) von H und J.	Kap. III, § 4.
H^J	H hoch J, J-te Potenz von H.	Kap. III, § 5.
$J\,\mathcal{UO}\,H$, $J\,\mathcal{VO}\,H$, $J\,\mathcal{WO}\,H$	J ist eine unvollständige, vollständige, Wohlordnung von H.	Kap. IV, §§ 1—5.
$u \dot{<} v \ldots (J)$ $u \dot{>} v \ldots (J)$ $u \parallel v \ldots (J)$	u liegt bei der Ordnung J vor, nach, unvergleichbar mit v.	
$\mathcal{UO}(H)$, $\mathcal{VO}(H)$, $\mathcal{WO}(H)$	Menge der unvollständigen, vollständigen, Wohlordnungen von H.	
$\mathcal{Abs}(x; H, J)$	Der durch das Element x in dem nach J geordneten H bestimmte Abschnitt.	Kap. IV, § 1.
$\left(\frac{H'}{H}\right) J$	Die durch J dem Teilbereiche H' auferlegte Ordnung.	Kap. IV, § 2.
$[f]\,J$	Die durch die Abbildung f übertragene Ordnung J.	
Ω^*	Bereich aller Mengen.	
Σ	Die Subsumptionsordnung.	
$H, J \approx H', J' \ldots (f)$ $H, J \approx H', J'$	Das nach J geordnete H ist dem nach J' geordneten H' ähnlich.	Kap. IV, § 4.
$f\,\boldsymbol{Z}\,H, J$	f ist eine Zählung des nach J geordneten H.	Kap. V, § 1.
$P\,\boldsymbol{OZ}\,H, J$	P ist eine Ordnungszahl des nach J geordneten H.	
$\boldsymbol{Z}\,H, J$	Das nach J geordnete H ist zählbar.	
$P\,\boldsymbol{OZ}$	P ist eine Ordnungszahl.	
Ω^{**}	Der Bereich aller Ordnungszahlen.	
$\boldsymbol{Z}(H, J)$	Die Zählung des nach J geordneten H.	Kap. V, § 2.
$\boldsymbol{OZ}(H, J)$	Die Ordnungszahl des nach J geordneten H.	
$H, J \leqslant H', J'$ $H, J \geqslant H', J'$		Kap. VI, § 2.
W	Eine Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.	Kap. VI, § 3.

Symbol.	Name.	Erstes Auftreten.
$H \approx H' \ldots (f)$		Kap. VII, § 1.
$H \approx H'$	H ist dem H' äquivalent.	
$P\boldsymbol{KZ}$	P ist eine Kardinalzahl (Anfangszahl, Aleph, Mächtigkeit).	Kap. VII, § 2.
$\boldsymbol{KZ}(H)$	Die Kardinalzahl (Anfangszahl usw.) von H.	
Γ	Der Bereich aller Kardinalzahlen.	
$H \lll H'$		Kap. VII, § 3.
$H \ggg H'$		
$H\boldsymbol{E}$, $H\boldsymbol{U}$	H ist endlich; H ist unendlich.	Kap. VIII, § 1.
$\overline{\boldsymbol{E}}$	Der Bereich aller endlichen Mengen.	
$P \dotplus 1$	Die auf P folgende Ordnungszahl.	Kap. VIII, § 3.
$P\boldsymbol{LZ}$	P ist eine Limeszahl.	
ω		Kap. VIII, § 4.
$P\boldsymbol{NZ}$	P ist eine natürliche Zahl (d. h. eine nicht-negative ganze rationale Zahl).	
$\mathcal{J}(f)$		Kap. IX, § 1.
$\mathcal{J}(f, P)$		
$\mathcal{J}(f, u)$		Kap. IX, § 2.

I. Die Axiome.

1. Einleitung.

In meiner Arbeit „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“ [2]) habe ich ein Axiomensystem für die allgemeine Mengenlehre angegeben, und dasselbe vom allgemeinen und prinzipiellen Standpunkte aus näher untersucht. Eine detaillierte Diskussion desselben, d. h. die tatsächliche Herleitung der allgemeinen Mengenlehre oder wenigstens ihrer hauptsächlichsten Resultate, wurde dort nicht vorgenommen. Diese Herleitung soll nun in der vorliegenden Arbeit erfolgen. Bei der Beschreibung des Axiomensystems, sowie bei allen Fragen von allgemein-prinzipiellem Charakter werden wir uns hingegen auf das notwendige Minimum beschränken; für nähere diesbezügliche Ausführungen sei auf die unter [2]) zitierte Arbeit verwiesen. (Immerhin setzt diese Arbeit nirgends die Kenntnis der unter [2]) zitierten voraus.)

Auch gewisse in meiner Arbeit [2]) nur flüchtig berührte prinzipielle Fragen (Relativität der Wohlordnung und Endlichkeit, Fehlen der Kate-

[2]) Journal für reine und angewandte Mathematik 154 (1925), S. 219–240.

gorizität), sowie die Probleme der Unabhängigkeit und Widerspruchfreiheit der Axiome fallen außerhalb des Rahmens dieses Artikels. Ich beabsichtige, auf einen Teil derselben bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Wir beginnen mit der Beschreibung des zu axiomatisierenden Systems und mit der Angabe der Axiome. Eine kurze Erläuterung des Sinnes der einzelnen Symbole und Axiome lassen wir nachfolgen (dieselbe ist in der Arbeit [2]) detaillierter durchgeführt). Es ist übrigens selbstverständlich, daß man bei axiomatischen Untersuchungen, wie die unsere, die Ausdrucksweise „Sinn eines Symbols“ oder „Sinn eines Axioms“ nicht wörtlich nehmen darf: diese Symbole und Axiome haben (im Prinzip wenigstens) keinerlei Sinn, sie vertreten nur (in mehr oder minder vollständiger Weise) gewisse Begriffsbildungen der unhaltbar gewordenen „naiven Mengenlehre“. Wenn wir von „Sinn“ sprechen, so ist damit also stets der Sinn der ersetzten Begriffe der „naiven Mengenlehre“ gemeint.

Unser Axiomensystem lautet folgendermaßen:

Wir beschäftigen uns mit zwei Systemen, dem System der I-Dinge und der II-Dinge. Die beiden Systeme sind nicht identisch, sie überdecken sich aber teilweise: diejenigen Dinge, die zugleich I-Dinge und II-Dinge sind, nennen wir I II-Dinge.

Ferner beschäftigen wir uns mit den Dingen A, B, sowie mit den beiden Zwei-Variablen-Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$.

Alle diese müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Einleitende Axiome.

I. 1. A, B sind I-Dinge.

2. $[f, x]$ hat dann und nur dann Sinn, wenn f ein II- und x ein I-Ding ist; es ist dann selbst ein I-Ding.

3. $\langle x, y\rangle$ hat dann und nur dann Sinn, wenn x und y beide I-Dinge sind, es ist dann selbst auch ein I-Ding.

4. f, g seien II-Dinge. Wenn für jedes I-Ding x $[f, x] = [g, x]$ ist, so ist $f = g$.

Arithmetische Konstruktionsaxiome.

II. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, x] = x$ ist.

2. u sei ein I-Ding. Es gibt dann ein II-Ding f, so daß stets $[f, x] = u$ ist.

3. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = x$ ist.

4. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = y$ ist.

5. Es gibt ein II-Ding f, so daß stets $[f, \langle x, y\rangle] = [x, y]$ ist. (Natürlich muß hier x ein I II-Ding sein, sonst ist die Gleichung sinnlos.)

6. f, g seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding h, so daß stets $[h, x] = \langle [f, x], [g, x] \rangle$ ist.
7. f, g seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding h, so daß stets $[h, x] = [f, [g, x]]$ ist.

Logische Konstruktionsaxiome.

III. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß $x = y$ (für I-Dinge x, y) mit $[f, \langle x, y \rangle] \neq A$ gleichbedeutend ist.

2. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß dann und nur dann $[g, x] \neq A$ ist, wenn für alle (I-Dinge) y $[f, \langle x, y \rangle] = A$ ist.
3. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß für jedes x, bei dem für ein und nur ein (I-Ding) y $[f, \langle x, y \rangle] \neq A$ ist, $[g, x]$ diesem y gleich ist.

I II-Dinge.

IV. 1. Es gibt ein II-Ding f, so daß ein I-Ding x dann und nur dann I II-Ding ist, wenn $[f, x] \neq A$ ist.

2. Ein II-Ding f ist dann und nur dann kein I II-Ding, wenn es ein II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jedem I-Ding x existiert ein I-Ding y mit $[f, y] \neq A$, $[g, y] = x$.

Unendlichkeitsaxiome.

Hier erweist es sich als praktisch, die folgenden abkürzenden Bezeichnungsweisen einzuführen: f sei ein II-Ding; für $[f, x] \neq A$ schreiben wir auch $x \varepsilon f$. f, g seien II-Dinge; wenn für alle x aus $x \varepsilon f$ $x \varepsilon g$ folgt, so schreiben wir $f \lesssim g$. Für $g \lesssim f$ schreiben wir auch $f \gtrsim g$. Wenn $f \lesssim g$ und $f \gtrsim g$ ist, so schreiben wir $f \sim g$; wenn $f \lesssim g$, aber nicht $f \gtrsim g$ ist, so schreiben wir $f < g$; wenn $f \gtrsim g$, aber nicht $f \lesssim g$ ist, so schreiben wir $f > g$.

V. 1. Es gibt ein I II-Ding f mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt I II-Dinge x mit $x \varepsilon f$. Wenn x ein I II-Ding mit $x \varepsilon f$ ist, so gibt es auch ein I II-Ding y mit $y \varepsilon f$, für welches $x < y$ ist.

2. f sei ein I II-Ding. Es gibt dann ein I II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft: Aus $x \varepsilon y$, $y \varepsilon f$ (y ist also auch ein I II-Ding) folgt $x \varepsilon g$.
3. f sei ein I II-Ding. Es gibt dann ein I II-Ding g mit der folgenden Eigenschaft: Wenn für ein I II-Ding $x \lesssim f$ ist, so gibt es ein I II-Ding y mit $x \sim y$, $y \varepsilon g$.

Das ist unser Axiomensystem. Zu seiner Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen.

2. Diskussion der Axiome.

Wir haben statt dem Begriffe der Menge hier den Begriff der Funktion zum Grundbegriffe gemacht: die beiden Begriffe sind ja leicht aufeinander zurückzuführen[3]). Die technische Durchführung gestaltet sich jedoch beim Zugrundelegen des Funktionsbegriffes wesentlich einfacher, allein aus diesem Grunde haben wir uns für denselben entschieden.

Die I-Dinge sind die „Elemente" oder „Argumente", aus ihnen werden die „Mengen" und „Funktionen" gebildet. Die II-Dinge hingegen sind die „Funktionen", sie sind für I-Dinge, d. h. für „Argumente" definiert, und haben auch solche als Werte. Die Operation $[f, x]$ bildet aus der „Funktion" (d. h. II-Ding) f und dem „Argumente" (d. h. I-Ding) x den „Wert der Funktion f an der Stelle x" $[f, x]$, der seinerseits wieder „Argument" (d. h. I-Ding) ist. Die charakteristische Eigenschaft der Funktionen, durch ihren Wertverlauf eindeutig festgelegt zu sein, wird durch das „Bestimmtheitsaxiom" I. 4. ausgedrückt. (D. h. I. 4. besagt, daß jeder Wertverlauf durch *höchstens* eine Funktion dargestellt wird, ob es aber überhaupt eine solche Funktion gibt, ist dadurch noch nicht gesagt.)

Die zulässigen Wege zur Herstellung von Funktionen werden in den Gruppen II, III angegeben. Die Einteilung ist so getroffen, daß die Herstellungsarten, die einen logischen Charakter haben, in III zusammengestellt sind, und die übrigen in II. Das Axiom IV. 1. könnte aus diesem Gesichtspunkte eigentlich auch noch zu III gezählt werden[4]).

Wesentlich ist ferner die Frage, welche „Funktionen" fähig sind, Argumente anderer Funktionen zu sein (das wesentlichste „imprädikative" oder „zirkelhafte" Element der allgemeinen Mengenlehre liegt an diesem Punkte), d. h. welche II-Dinge gleichzeitig I II-Dinge sind. Alle können es nicht sein, denn dies würde, bei den Hilfsmitteln, die uns durch die Axiome der Gruppen II, III zur Herstellung von Funktionen geliefert werden, zu einer Antinomie führen, die der Russellschen entspricht[5]).

---

[3]) Eine Funktion f kann als Menge aller Paare $x, f(x)$ betrachtet werden, und eine Menge als eine Funktion, die nur zweier Werte („Element-Sein" und „Nicht-Element-Sein") fähig ist.

[4]) Das Axiom IV. 1. kann auch als Dual von IV. 2. angesehen werden: es bestimmt wann ein I-Ding auch I II-Ding ist, während IV. 2. bestimmt wann ein II-Ding I II-Ding ist. Es ist aber im Gegensatze zu IV. 2. ziemlich oberflächlich, und könnte z. B. sehr gut durch die Forderung, daß jedes I-Ding gleichzeitig I II-Ding sei, ersetzt werden. (Fraenkel z. B. tut etwas derartiges.)

[5]) Diese Antinomie kann z. B. so hergeleitet werden: Wir wählen f nach III. 1., dann ist für jedes I II-Ding (d. h. jede Argument-Funktion) $[f, \langle [x, x], A\rangle] \neq A$ oder $= A$, je nachdem $[x, x] = A$ oder $\neq A$ ist. Also ist stets $[f, \langle [x, x], A\rangle] \neq [x, x]$.

(Fortsetzung der Fußnote [5]) auf der nächsten Seite.)

Wir beantworten die Frage in einem Sinne, die wohl die sinngemäße Übertragung des Russell-Zermeloschen Idee ist, wonach die „nicht zu großen“ Mengen allein zulässig sind. Dies geschieht durch das Axiom IV. 2., welches im wesentlichen aussagt: Eine „Funktion“ f ist dann und nur dann auch „Argument“ (d. h. ein II-Ding f auch I II-Ding), wenn es nicht für zu viele x solche Werte $[f, x]$ hat, die $\neq A$ sind. Oder genau formuliert: Wenn diejenigen x, für die $[f, x] \neq A$ ist, nicht auf alle x überhaupt abgebildet werden können. (Diese Präzisierung des Begriffes „zu groß“ bzw. „zu viele“ ist freilich etwas willkürlich und über die Russell-Zermelosche Idee hinausgehend, sie kann nur an ihren Konsequenzen geprüft werden.)

Das Axiom IV. 2. enthält übrigens das „Aussonderungsaxiom“ von Zermelo und Fraenkel[6]), das „Ersetzungsaxiom“ von Fraenkel[7]), und den Wohlordnungssatz (d. h. das „Multiplikationsaxiom“ von Zermelo und Fraenkel[6])). Diese Umstände werden wir noch an den betreffenden Orten unserer Herleitung der Mengenlehre entsprechend hervorheben[8]).

Die Gruppe V (Unendlichkeitsaxiome) umfaßt schließlich alle Axiome, die zur Herstellung der unendlichen Mächtigkeiten (außer dem „Ersetzungsaxiom“, vgl. Fußnote [7])) notwendig sind. Sie entsprechen den Axiomen von der „unendlichen Menge“, der „Vereinigungsmenge“ und der „Potenz-

---

Wir können nun $[f, \langle[x, x], A\rangle]$ mit Hilfe der Axiome II. 1.—7. auf die Form $[g, x]$ bringen (vgl. Kap. II, § 1, Hilfssatz 1, der hier ohne weiteres angewandt werden kann); damit haben wir ein II-Ding (Funktion) g gewonnen, bei dem für jedes I II-Ding (jede Argument-Funktion) $[g, x] \neq [x, x]$ ist.

Wäre nun jedes II-Ding gleichzeitig auch I-Ding (jede Funktion auch Argument), so würde hieraus die Unmöglichkeit $[g, g] \neq [g, g]$ folgen.

Unsere Funktion g entspricht der Russellschen „Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten“.

[6]) Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Annalen **65** (1908), S. 261—281. Fraenkel, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 250—273.

[7]) Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. Math. Annalen **86** (1922), S. 230—237. Das Ersetzungsaxiom lautet in der ursprünglichen Fassung von Fraenkel folgendermaßen: „Wenn wir jedes Element x einer Menge H durch ein ξ ersetzen (ξ abhängig von x), so bilden auch die ξ eine Menge.“ In der bei [6]) zitierten Arbeit von Fraenkel wird dieses Axiom übrigens vermieden, aber zunächst kein anderes damit adäquates aufgestellt. Irgendein Axiom von diesem Charakter ist jedenfalls notwendig, um die ganze Reihe der Mächtigkeiten und die Theorie der Ordnungszahlen aufstellen zu können.

[8]) Dem „Aussonderungsaxiom“ entspricht das Schlußresultat im Kap. II, § 2; dem „Ersetzungsaxiom“ der Satz 10b (Kap. III, § 2); und das Auswahlprinzip (d. h. das „Multiplikationsaxiom“) wird im Satz 56 und im Satz 57 (Kap. VI, § 3) ausgesprochen.

menge“ bei Zermelo und Fraenkel[9]). Die Existenz von II-Dingen mit den dort verlangten Eigenschaften folgt immer aus den Axiomen der Gruppen I bis IV[10]), die wesentliche Forderung ist hier stets, daß es I II-Dinge sein sollen.

Es ist hier am Platze, zu erklären, was wir unter „Menge“ verstehen (genauer: wodurch wir die Mengen der „naiven Mengenlehre“ ersetzen wollen), da bisher bloß die „Funktion“ erklärt wurde. Wir nennen eine Funktion (d. h. ein II-Ding) f einen „Bereich“, wenn er nur der zwei Werte A, B fähig ist (d. h. wenn stets $[f, x] = A$ oder $[f, x] = B$ ist). Seine „Elemente“ sind diejenigen „Argumente“, für die sein „Wert“ $= B$ ist. Und wir nennen einen „Bereich“ eine „Menge“, wenn er gleichzeitig „Argument“ (d. h. I II-Ding) ist. Hier liegt der wesentliche Unterschied unseres Axiomensystems vom Zermelo-Fraenkelschen: Dort sind die „zu großen“ Mengen einfach verboten, unherstellbar; bei uns können sie (als „Bereiche“) gebildet werden, nur sind sie unfähig, Elemente anderer „Mengen“ oder „Bereiche“ zu sein. Dies ist zumindest formal bequemer, und zur Vermeidung der Antinomien (insbesondere der Russellschen) reicht es bereits aus.

Wie man sieht, ist übrigens die Wahl von B gleichgültig, wir mußten diesen „zweiten Wert der Bereich-artigen Funktionen“ (der „erste Wert“ ist ja jedenfalls A) nur ein- für allemal festlegen, er geht aber nicht mehr in die Axiome ein[11]).

Schließlich müssen wir noch die Operation $\langle x, y \rangle$ erklären. Es ist der Begriff des „Paares“ (von „Argumenten“, d. h. I II-Dingen), der unbedingt notwendig ist, um mit Hilfe unseres Funktionsbegriffes, der offenbar ein-variablig ist, auch mehr-variablige Funktionen beherrschen zu können. Seine wesentlichste Eigenschaft ist, daß aus $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ $x = x', y = y'$ folgt. Dies kommt unter unseren Axiomen in dieser Form nicht vor, weil es aus den Axiomen II. 3. und II. 4. ohne weiteres folgt.

3. Systematisches zur Herleitung.

Wir wollen nun noch eine kurze Skizze der Anordnung geben, in der wir im folgenden die Hauptresultate der Mengenlehre aus unseren Axiomen herleiten werden.

---

[9]) Vgl. die bei [6]) zitierten Arbeiten.

[10]) Es genügt ja dann ein f zu finden, für welches stets $[f, x] \neq A$ ist. Wir können also f nach II. 2. mit einem $u \neq A$ wählen, z. B. mit $u = B$.

[11]) Auch die Existenz eines I-Dinges, das $\neq A$ ist, folgt aus den Axiomen: Wir wählen f nach III. 1., dann ist $[f, \langle A, A \rangle] \neq A$. — Wenn wir B aus den Axiomen nicht ausschlössen, so ließe sich das Axiom V. 3. (von der „Potenzmenge“) etwas einfacher formulieren.

In den Kapiteln II und III leiten wir zunächst die grundlegenden Operationen der Mengenlehre her, die in der „naiven Mengenlehre" sich ganz von selbst verstehen. Wir müssen uns in diesen Kapiteln sozusagen die notwendige Bewegungsfreiheit verschaffen.

Die wesentlichen Überlegungen, nämlich die Herleitung der Theorien von der Endlichkeit, Äquivalenz, Ähnlichkeit und Wohlordnung geschieht in den Kapiteln IV — VIII. Hierbei kehren wir die soeben angeführte, allgemein übliche Reihenfolge der Behandlung um: Wir beginnen mit der Ähnlichkeit (IV), dann folgt einiges über die Wohlordnung im allgemeinen (IV), die Theorie der Ordnungszahlen (V), der Wohlordnungssatz (VI), und zum Schlusse kommt erst die Äquivalenz (VII) und die Endlichkeit (VIII). Dies stößt zwar den historischen Gang der Entwicklung um, ist aber vom systematischen Standpunkte weit angenehmer: erst durch den Besitz des Ordnungszahlen-Begriffes und des Wohlordnungssatzes wird man in die Lage versetzt, die Probleme der Äquivalenz und der Endlichkeit schnell und vollständig zu erledigen.

Es ist eine Eigenheit unserer Axiome (insbesondere des Axioms VI. 2.), daß wir dabei zwei klassische Gedankenreihen der „naiven Mengenlehre" nicht benützen müssen noch können: nämlich den Bernsteinschen „Äquivalenzsatz" und die Zermelosche Herleitung des „Wohlordnungssatzes" aus dem „Auswahlprinzip [12]). Wie diese Sätze hier bewiesen werden, werden wir an den entsprechenden Stellen der Herleitung hervorheben [13]).

Die Aufstellung der Theorie der Ordnungszahlen wird auf einem Wege durchgeführt, der von dem in der naiven Mengenlehre üblichen wesentlich abweicht: Steht uns doch der dort reichlich benutzte Begriff des „Definierens durch Abstraktion" nicht zur Verfügung. Die in Frage kommende Theorie habe ich bereits in meiner Arbeit „Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen" [14]) entwickelt, allerdings in der Ausdrucksweise der „naiven Mengenlehre". Auch die Einführung der Mächtigkeiten bedingt ähnliche Vorsichtsmaßregeln.

---

[12]) Der „Äquivalenzsatz" wurde zuerst von F. Bernstein bewiesen, zuerst veröffentlicht in E. Borel's Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 103 ff. Sowohl Zermelo wie Fraenkel haben ihn in ihren Formalismus übertragen. Die Herleitung des „Wohlordnungssatzes" aus dem „Auswahlprinzip" stammt von Zermelo, und zwar wurde sie in seinen zwei folgenden Arbeiten durchgeführt: Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Annalen **59** (1906), S. 514—516. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Math. Annalen **65** (1908), S. 107—128. Besonders interessant ist der zweite Beweis Zermelos, der von der Theorie der Wohlordnung unabhängig ist.

[13]) Zum Äquivalenzsatz" vgl. Satz 68 und Satz 69 (Kap. VII, § 3) und Fußnote [31]), zum „Wohlordnungssatz" Satz 54 und Satz 55 (Kap. VI, §§ 3, 4).

[14]) J. v. Neumann, Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen, Acta universitatis Franc. Jos., Szeged, **1** (1923), S. 199—208.

Im letzten Kapitel (IX) folgt schließlich ein Beweis der eindeutigen Möglichkeit der „Definition durch transfinite bzw. finite (d. h. gewöhnliche vollständige) Induktion". Diese beiden Prinzipien wurden in der „naiven Mengenlehre" vielfach als keines Beweises bedürftige evidente Wahrheiten angesehen. In einer axiomatischen Mengenlehre ist beides jedenfalls unzulässig; und wenn auch der inhaltliche evidente Charakter der „finiten Induktion" zuzugeben ist, so ist dafür die „transfinite Induktion" höchst fraglich. (Der anschaulich-empirische Charakter der der „finiten Induktion" zugrunde liegenden natürlichen Zahlen, d. h. der nicht-negativen ganzen rationalen Zahlen, ist ja unanfechtbar; mit den der „transfiniten Induktion" zugrunde liegenden Ordnungszahlen verhält es sich wohl anders. Wenn auch die sich unmittelbar an ω anschließende Partie

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 3\omega, \ldots, 4\omega, \ldots, \ldots,$$
$$\omega^2, \ldots, 2\omega^2, \ldots, 3\omega^2, \ldots, \ldots, \omega^3, \ldots, 2\omega^3, \ldots, 3\omega^3, \ldots, \ldots, \omega^4, \ldots,$$
$$\omega^5, \ldots, \omega^6, \ldots, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{(\omega^\omega)}, \ldots, \varepsilon, \ldots$$

noch einen gewissen anschaulichen Sinn hat, so wird doch der *volle* Verlauf der Ordnungszahlen-Reihe kaum anders als eine rein formalistische Begriffsbildung gedeutet werden können [15]). Der Beweis dieser Definitionsprinzipien mag auch darum nicht uninteressant sein, weil er im Rahmen einer axiomatischen Mengenlehre wohl noch nie geführt wurde.

II. Die elementaren Operationen der Mengenlehre.

1. Hilfssätze.

Wir beweisen zuerst drei Hilfssätze, die notwendig sind, um uns die wünschenswerte Freiheit im Umgehen mit den Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ zu verschaffen. Sie lauten folgendermaßen:

Hilfssatz 1. $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Ausdruck, der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und irgendwelchen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ durch Anwendung der Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ zusammengesetzt ist. Dabei durchlaufen die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die I-Dinge, während die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ I-Dinge oder II-Dinge sind.

Der Ausdruck $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ braucht nicht für jedes System von I-Dingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Sinn zu haben (z. B. hat $[\langle x_1, x_2\rangle, x_2]$ dann und nur dann Sinn, wenn $\langle x_1, x_2\rangle$ ein I II-Ding ist), wenn er aber Sinn hat,

---

[15]) Ich hoffe, auf diese Eigentümlichkeit der Ordnungszahlen-Reihe, die auch mit der Frage der „Kategorizität" der Mengenlehre zusammenhängt, noch in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können. Bezüglich verwandter Fragen vgl. die §§ II 3, 5 meiner bei [1]) zitierten Arbeit. Über die Ordnungszahlen-Reihe vgl. auch Kap. IX, § 1 dieser Arbeit.

soll er ein I-Ding sein. (Hierdurch wird der eine Fall ausgeschlossen, daß $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich c_p ist, wobei die Konstante c_p ein II-Ding ist, aber kein I II-Ding.)

Es gibt dann ein II-Ding f (f ist natürlich von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig, aber von $c_1, c_2, \ldots, c_m$ abhängig), so daß für alle Systeme von von I-Dingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einen Sinn hat, stets

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle]$$

ist. (Für $n = 1$ verstehen wir unter $\langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle$ einfach x_1.)

Bemerkung. Bei diesem Hilfssatze sind wohl zwei erläuternde Bemerkungen angebracht.

Erstens über seinen Sinn. In unserem System ist die Normalform eines ein-variabligen Funktionen-Verlaufes der Ausdruck $[f, x]$ (f konstant, x variabel), dies folgt aus der Deutung der II-Dinge f als „Funktionen“. Zur Normalform des mehr-variabligen Funktionen-Verlaufes wollen wir nun $[f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle, \ldots\rangle, x_n\rangle]$ machen (f konstant, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel); und dies wird uns durch diesen Hilfssatz ermöglicht, welcher garantiert, daß alle Ausdrücke mit Konstanten und Variablen auf diese Normalform gebracht werden können.

Zweitens über seine prinzipielle Zulässigkeit. Wir benützen den allgemeinen Begriff der natürlichen Zahl, sowie den Begriff eines „durch sukzessives Anwenden gewisser Operationen entstandenen Ausdrucks“, d. h. im wesentlichen die Definition durch finite Induktion. Dies ist aber bei der Begründung der axiomatischen Mengenlehre jedenfalls zu vermeiden, denn alle diese Begriffe können und sollen doch auf axiomatisch-mengentheoretischer Grundlage hergeleitet werden[16]. (Vgl. Kap. VIII, § 4 und Kap. IX, § 2.) Wie ist das mit dem Aufstellen unseres Hilfssatzes 1 zu vereinen?

Die Antwort ist einfach: Wir werden den Hilfssatz 1 niemals als allgemeinen Satz ansehen (als welcher er offenbar unzulässig wäre), sondern nur auf konkrete Spezialfälle anwenden. Ein in concreto gegebener Ausdruck der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $c_1, c_2, \ldots, c_m$ hat mit dem Prinzip der finiten Induktion nichts zu tun, unser weiter unten zu führender induktiver Beweis des Hilfssatzes 1 wird dann zu einer endlich durchführbaren Konstruktion. Wollten wir von der allgemeinen Formulierung des Hilfssatzes 1 absehen (was prinzipiell konsequent wäre), so müßten wir bei jeder später vorkommenden Reduktion eines Ausdruckes auf die Normalform dieselbe Konstruktion detailliert ausführen. Es ist technisch bequemer, die Methode

[16]) Fraenkel (vgl. seine bei [6]) zititierte Arbeit) nimmt einen anderen Standpunkt ein: er benützt das Prinzip der (anschaulichen) vollständigen Induktion (natürlich nur der finiten!) beim axiomatischen Behandeln der Mengenlehre.

dieser Konstruktionen hier allgemein anzugeben und sich später einfach darauf zu berufen. Lediglich deshalb sprechen wir diesen Hilfssatz hier allgemein aus, und stellen sofort fest, daß wir ihn nicht als einen exakten, allgemeinen Satz unserer Theorie ansehen, sondern vielmehr etwa als die Skizze einer allgemeinen Beweismethode.

(Die Bemerkung liegt nahe, daß die vorangehenden Ausführungen eigentlich keine Einschränkung des Geltungsbereiches von Hilfssatz 1 involvieren, sondern nur eine Umschreibung des Beriffes eines „allgemeinen Satzes" sind; also daß diese Ausführungen zwecklos sind. Es sei erlaubt, demgegenüber darauf hinzuweisen, daß ein auf eine unendliche Anzahl von Spezialfällen bezogener „allgemeiner Satz" etwas mehr ist, als die Summe seiner Spezialfälle; daß hier jedenfalls noch ein neues transzendentes Moment hinzukommt, wie es die moderne Kritik der Grundlagen der Logik und Mathematik gezeigt hat.)

Beweis. Wir können bei jedem Ausdrucke $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Anzahl der in ihm vorkommenden Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$ feststellen, und nennen dieselbe seinen Grad. Der Grad ist $= 0, 1, 2, \ldots$. Wir werden unsere Behauptung für alle $\mathfrak{A}$-s vom Grade 0 beweisen; und dann daraus, daß sie für alle $\mathfrak{A}$-s von Graden $< k$ zutrifft $(k = 1, 2, \ldots)$, ihre Gültigkeit für die $\mathfrak{A}$-s vom Grade k herleiten.

Zuerst zeigen wir aber, daß es genügt, wenn wir uns mit dem Falle $n = 1$ beschäftigen. Ist nämlich $n > 1$, so wählen wir f nach II. 3. und g nach II. 4., dann ist:

$$\begin{aligned}
x_1 &= [f, [f, [\ldots [f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle] \ldots]]],\\
x_2 &= [g, [f, [\ldots [f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle] \ldots]]],\\
x_3 &= [g, [\ldots [f, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle] \ldots]],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \qquad\qquad [g, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle].
\end{aligned}$$

Wenn wir dies in $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einsetzen, so wird:

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{A}^*(\langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle),$$

und wenn der Satz für $n = 1$ schon bewiesen ist,

$$= [f^*, \langle\langle \ldots \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle \ldots\rangle, x_n\rangle].$$

Es sei also $n = 1$. Wenn $\mathfrak{A}(x)$ den Grad 0 hat, so ist $\mathfrak{A}(x) = c_p$ (c_p ist dann I-Ding) oder $\mathfrak{A}(x) = x$. Wir wählen also f nach II. 2. $(u = c_p)$ oder nach II. 1., und sind damit am Ziele.

Wenn $\mathfrak{A}(x)$ den Grad k hat $(k = 1, 2, \ldots)$ und für alle $\mathfrak{B}(x)$ mit Graden $< k$ schon alles bewiesen ist, so schließen wir so:

$\mathfrak{A}(x)$ hat eine der drei folgenden Formen:

$$[f, \mathfrak{B}(x)], \quad \langle \mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x) \rangle, \quad [\mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x)],$$

wo $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$ ebensolche Ausdrücke sind und f ein II-Ding (aber kein I II-Ding, denn dann haben wir wieder $[\mathfrak{C}(x), \mathfrak{B}(x)]$) ist. $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$ haben offenbar Grade $\leqq k-1 < k$, also ist

$$\mathfrak{B}(x) = [g, x], \qquad \mathfrak{C}(x) = [h, x],$$

also

$$\mathfrak{A}(x) = [f, [g, x]], \ \langle [h, x], [g, x] \rangle, \ [[h, x], [g, x]].$$

Der erste Ausdruck ist mit Hilfe von II. 7. sofort auf die gewünschte Form $[j, x]$ zu bringen, der zweite mit Hilfe von II. 6.; beim dritten schließlich müssen wir sukzessiv II. 5., 6. und 7. anwenden.

Damit ist die Behauptung restlos bewiesen.

Hilfssatz 2a. φ sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding ψ, so daß $[\varphi, x] \neq A$ mit $[\psi, x] = A$ gleichbedeutend ist und folglich $[\varphi, x] = A$ mit $[\psi, x] \neq A$.

Hilfssatz 2b. φ, ψ seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding χ, so daß dann und nur dann $[\chi, x] \neq A$ ist, wenn $[\varphi, x] \neq A$ oder $[\psi, x] \neq A$ ist.

Hilfssatz 2c. φ, ψ seien II-Dinge. Es gibt ein II-Ding χ, so daß dann und nur dann $[\chi, x] \neq A$ ist, wenn zugleich $[\varphi, x] \neq A$ und $[\psi, x] \neq A$ ist.

Beweis. (Für 2a.) Wir wählen f nach III. 1., dann wird $[\varphi, x] \neq A$ mit $[f, \langle A, [\varphi, x] \rangle] = A$ gleichbedeutend, und wenn wir $[f, \langle A, [\varphi, x] \rangle]$ auf die Form $[\psi, x]$ bringen, mit $[\psi, x] = A$.

(Für 2b.) $[\varphi, x] \neq A$ oder $[\psi, x] \neq A$ bedeutet $\langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle \neq \langle AA \rangle$ (denn $\langle u, v \rangle = \langle u', v' \rangle$ bedeutet wegen II. 3. und II. 4. $u = u'$, $v = v'$), also $[f \langle \langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle] = A$, d.h. $[f, \langle [f, \langle \langle [\varphi, x], [\psi, x] \rangle, \langle A, A \rangle \rangle], A \rangle] \neq A$. Und wenn wir die linke Seite auf die Normalform $[\chi, x]$ bringen, so wird hieraus $[\chi, x] \neq A$.

(Für 2c.) Dies folgt direkt aus 2a und 2b.

Hilfssatz 3. φ sei ein II-Ding. Wenn wir in $[\varphi, \langle x, y \rangle]$ φ und x als Konstante und y als Variable ansehen, so können wir diesen Ausdruck auf die Normalform $[\xi, y]$ bringen. Wegen I. 4. wird es nur ein II-Ding ξ geben, für welches stets $[\varphi, \langle x, y \rangle] = [\xi, y]$ (ξ abhängig vom φ und x!) ist.

Es gibt nun zwei II-Dinge ψ und χ (abhängig von φ!), so daß $[\psi, x] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß das II-Ding ξ auch ein I II-Ding ist, und daß in diesem Falle immer $\xi = [\chi, x]$ ist.

Beweis. Daß ein I-Ding ξ ein I II-Ding ist, können wir nach IV. 1. so schreiben: $[f, \xi] \neq A$. — $[\varphi, \langle x, y\rangle] = [\xi, y]$ drückt sich so aus: $[g, \langle[\varphi, \langle x, y\rangle], [\xi, y]\rangle] \neq A$. Wenn wir dies auf die Normalform bringen, so wird: $[h, \langle\langle x, \xi\rangle, y\rangle] \neq A$ oder $[j, \langle\langle x, \xi\rangle, y\rangle] = A$. Daß dies für alle y der Fall ist, bedeutet nach III. 2.: $[k, \langle x, \xi\rangle] \neq A$. — Da wir auch $[f, \xi] \neq A$ auf die Normalform $[l, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ bringen können, so können wir sagen: ein I II-Ding ξ, für welches stets $[\varphi, \langle x, y\rangle] = [\xi, y]$ ist, existiert dann und nur dann, wenn $[k, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ und $[l, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ zugleich erfüllbar ist, d. h. wenn $[m, \langle x, \xi\rangle] \neq A$ erfüllbar ist. Dies bedeutet nach III. 2. $[n, x] = A$, d. h. $[\psi, x] \neq A$. Und wenn es ein solches ξ gibt, so gibt es wegen I. 4. nur ein einziges, also brauchen wir χ nur nach III. 3. zu wählen, und es wird $[\chi, x] = \xi$. —

Damit haben wir alle Hilfssätze hergeleitet, deren wir zur Inangriffnahme unserer Aufgaben benötigen. Wir wollen nun noch die wesentlichsten Definitionen und Begriffsbildungen zusammenstellen, die wir in Kap. I bereits entwickelt haben.

2. Grunddefinitionen.

Diese Definitionen sind die folgenden:

φ sei ein II-Ding. Wir nennen es einen Bereich, wenn für alle x $[\varphi, x] = A$ oder $[\varphi, x] = B$ ist. Wenn ein Bereich sogar I II-Ding ist, so nennen wir ihn eine Menge.

φ sei ein II-Ding, x ein I-Ding. Für $[\varphi, x] \neq A$ schreiben wir auch $x \varepsilon \varphi$.

φ, ψ seien II-Dinge. Wenn aus $x \varepsilon \varphi$ $x \varepsilon \psi$ folgt, so schreiben wir $\varphi \lesssim \psi$. Für $\psi \lesssim \varphi$ schreiben wir auch $\varphi \gtrsim \psi$.

Wenn $\varphi \lesssim \psi$ und $\varphi \gtrsim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi \sim \psi$; wenn $\varphi \lesssim \psi$ aber nicht $\varphi \gtrsim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi < \psi$; wenn $\varphi \gtrsim \psi$ aber nicht $\varphi \lesssim \psi$ ist, so schreiben wir $\varphi > \psi$.

Wenn H ein Bereich (oder sogar eine Menge) ist, so sagen wir für $x \varepsilon H$ auch: x ist Element von H, x gehört zu H, H enthält x.

Wenn H, J Bereiche (oder sogar Mengen) sind, so sagen wir für $H \lesssim J$ oder $J \gtrsim H$ auch: H ist ein Teilbereich (bzw. Teilmenge) von J; und für $H < J$ oder $J > H$ sagen wir auch: H ist echter Teilbereich (bzw. echte Teilmenge) von J.

Man sieht sofort, daß den Relationen $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$, $\sim$ die folgenden elementaren Eigenschaften zukommen:

Aus $\varphi \lesssim \psi$, $\psi \lesssim \chi$ folgt $\varphi \lesssim \chi$. Aus $\varphi \gtrsim \psi$, $\psi \gtrsim \chi$ folgt $\varphi \gtrsim \chi$. Aus $\varphi < \psi$, $\psi < \chi$ folgt $\varphi < \chi$. Aus $\varphi > \psi$, $\psi > \chi$ folgt $\varphi > \chi$.

Es ist $\varphi \sim \varphi$. Aus $\varphi \sim \psi$ folgt $\psi \sim \varphi$. Aus $\varphi \sim \psi$, $\psi \sim \chi$ folgt $\varphi \sim \chi$. Aus $\varphi \sim \varphi'$, $\psi \sim \psi'$ und $\varphi \,\dagger\, \psi$ ($\dagger$ irgendeine Relation $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$) folgt $\varphi' \dagger \psi'$, und umgekehrt.

Ferner schließt man aus I. 4. ohne weiteres, daß für Bereiche H, J $H \sim J$ mit $H = J$ gleichbedeutend ist. Schließlich bemerken wir noch die folgende höchstwichtige Konsequenz von IV. 2.:

Wenn φ, ψ II-Dinge sind und $\varphi \lesssim \psi$ ist, so folgt daraus, daß ψ ein I II-Ding ist, auch daß φ ein I II-Ding ist.

Die Gültigkeit dieser Behauptung sieht man sofort an der Form von IV. 2. Sie entspricht dem „Aussonderungsaxiom" von Zermelo und Fraenkel (vgl. Fußnote [6])).

3. Einstellen-Funktionen und Elementarmengen.

Wir gehen nun daran, die einfachsten Funktionen und Mengen auf Grund unserer Axiome herzustellen.

Satz 1a. *u, v, w seien I-Dinge. Es gibt ein und nur ein II-Ding φ, für welches $[\varphi, u] = v$ ist, und für $x \neq u$ stets $[\varphi, x] = w$ ist. Dieses φ bezeichnen wir mit* $\left\{\begin{matrix} u, - \\ v, w \end{matrix}\right\}$.

Satz 1b. *Wenn $w = A$ ist, so ist $\left\{\begin{matrix} u, - \\ v, A \end{matrix}\right\}$ ein 1 II-Ding, und es gibt ein (von u und v unabhängiges!) φ, so daß stets $[\varphi, \langle u, v\rangle] = \left\{\begin{matrix} u, - \\ v, A \end{matrix}\right\}$ ist.*

Beweis. (Für 1a.) Aus I. 4. folgt, daß es höchstens ein solches φ gibt, es genügt also die Existenz zu beweisen.

$x = u$, $y = v$ können wir so schreiben: $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$, oder ($f$ nach III. 1.): $[f, \langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle] \neq A$. $x \neq u$, $y = w$ können wir so schreiben: $[f, \langle x, u\rangle] = A$, $y = w$, oder: $\langle [f, \langle x, u\rangle], y\rangle = \langle A, w\rangle$, oder: $[f, \langle\langle [f, \langle x, u\rangle], y\rangle, \langle A, w\rangle\rangle] \neq A$.

Daß entweder $x = u$, $y = v$ oder $x \neq u$, $y = w$ der Fall ist, lautet folglich so:

$$\langle [f, \langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle], [f, \langle\langle [f, \langle x, u\rangle], y\rangle, \langle A, w\rangle\rangle]\rangle \neq \langle A, A\rangle$$

oder wenn wir auf die Normalform bringen:

$$[g, \langle\langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq \langle A, A\rangle$$

oder auch

$$[f, \langle [g, \langle\langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle], \langle A, A\rangle\rangle] = A,$$

$$[f, \langle [f, \langle [g, \langle\langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle], \langle A, A\rangle\rangle], A\rangle] \neq A,$$

und wieder auf die Normalform gebracht:

$$[h, \langle\langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A.$$

Zu jedem u, v, w, x ist dies für ein einziges y der Fall, nämlich bei $x = u$ für $y = v$, und bei $x \neq u$ für $y = w$. Wenn wir also j nach III. 3. wählen, so wird:

$$[j, \langle\langle\langle u, v\rangle, w\rangle, x\rangle] = \begin{cases} v, & \text{für } x = u, \\ w, & \text{für } x \neq u. \end{cases}$$

Es genügt nun auf die Normalform $[\varphi, x]$ zu bringen (φ hängt von u, v, w ab!), um das gewünschte II-Ding φ zu haben.

(Für 1 b.) Wenn $w = A$ ist, so kann nur für $x = u$ $\left[\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}, x\right] \neq A$ sein. $\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}$ ist aber nach IV. 2. sicher ein I II-Ding, wenn es kein II-Ding f gibt, für welches zu jedem x ein y mit $\left[\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}, y\right] \neq A$, $[f, y] = x$ existiert; d. h. wenn bei keinem f für jedes I-Ding x $[f, u] = x$ ist. Das ist aber sicher der Fall, wenn es zwei verschiedene I-Dinge gibt, und solche gibt es: z. B. A und B.

Es bleibt noch übrig, $\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}$ auf die Form $[\varphi, \langle u, v\rangle]$ zu bringen. Wir sahen, daß

$$\left[\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}, x\right] = [j, \langle\langle\langle u, v\rangle, A\rangle, x\rangle] = [k\langle\langle u, v\rangle, x\rangle]$$

ist, und da $\begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}$ ein I II-Ding ist, so brauchen wir φ nur nach dem Hilfssatz 3 zu wählen, damit $[\varphi, \langle u, v\rangle] = \begin{Bmatrix} u, & - \\ v, & A \end{Bmatrix}$ sei.

Satz 2 a. *Es gibt eine und nur eine Menge, die gar keine Elemente hat. Wir bezeichnen sie mit* 0.

Satz 2 b. *u sei ein I-Ding. Es gibt eine und nur eine Menge, die das einzige Element u hat. Wir bezeichnen sie mit $\{u\}$. Es gibt ein (von u unabhängiges) II-Ding φ, so daß stets $\{u\} = [\varphi, u]$.*

Beweis. (Für 2a.) $\begin{Bmatrix} A, & - \\ A, & A \end{Bmatrix}$ ist I II-Ding und hat stets den Wert A, also ist es eine Menge ohne Elemente. Daß es die einzige ist, folgt aus I. 4.

(Für 2b.) $\begin{Bmatrix} u, & - \\ B, & A \end{Bmatrix}$ ist I II-Ding und hat für u den Wert B, sonst den Wert A, also ist es eine Menge mit dem einzigen Elemente u. Daß es die einzige ist, folgt aus I. 4. Und schließlich ist nach Satz 1 b

$$\{u\} = [f, \langle u, B\rangle] = [\varphi, u].$$

4. Zusammensetzung von Funktionen.

Im nun folgenden Satz 3 werden wir ein Konstruktionsprinzip angeben, welches für die Herstellung von Funktionen und Bereichen grundlegend ist.

Satz 3a. *φ, ψ, χ seien II-Dinge. Es gibt ein und nur ein II-Ding ζ, für welches für alle x*

$$[\zeta, x] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] = A \end{cases}$$

ist. Wir bezeichnen dieses ζ mit $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$.

Satz 3b. *μ sei eine der Zahlen 1, 2, 3; $f_1, \ldots, f_\mu$ irgendwelche μ unter dem φ, ψ, χ; und $g_1, \ldots, g_{3-\mu}$ die übrigen. Es gibt ein bloß von $g_1, \ldots, g_{3-\mu}$ abhängiges (und von den $f_1, \ldots, f_\mu$ unabhängiges) II-Ding ζ, so daß für alle $f_1, \ldots, f_\mu$, für die sowohl diese, als auch $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ I II-Dinge sind,*

$$[\xi; v] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$$

ist, wobei $v = f_1$ bzw. $= \langle f_1, f_2 \rangle$ bzw. $= \langle\langle f_1, f_2 \rangle, f_3 \rangle$ ist (je nachdem $\mu = 1, 2, 3$ ist).

Beweis. (Für 3a.) Daß es höchstens ein solches ζ gibt, folgt aus I. 4., wir brauchen also bloß die Existenz zu beweisen.

$[\varphi, x] = y$, $[\chi, x] \neq A$ können wir auch so schreiben (f nach III. 1.):

$$[f, \langle A, [\chi, x] \rangle] = A, \quad [\varphi, x] = y,$$

d. h.

$$\langle [f, \langle A, [\chi, x] \rangle], [\varphi, x] \rangle = \langle A, y \rangle,$$

$$[f \langle\langle [f, \langle A, [\chi, x] \rangle], [\varphi, x] \rangle, \langle A, y \rangle\rangle] \neq A,$$

oder auf die Normalform gebracht: $[g, \langle x, y \rangle] \neq A$ (g hängt von φ und χ ab).

Ebenso verfahren wir mit $[\psi, x] = y$, $[\chi, x] = A$:

$$\langle [\psi, x], [\chi, x] \rangle = \langle y, A \rangle,$$

$$[f, \langle\langle [\psi, x], [\chi, x] \rangle, \langle y, A \rangle\rangle] \neq A,$$

$$[h, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(h hängt von ψ und χ ab). Daß entweder $[\chi, x] \neq A$, $[\varphi, x] = y$ oder $[\chi, x] = A$, $[\psi, x] = y$ ist, bedeutet also:

$$\langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle \neq \langle A, A \rangle,$$

$$[f, \langle\langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle, \langle A, A \rangle\rangle] = A,$$

$$[f, \langle [f, \langle\langle [g, \langle x, y \rangle], [h, \langle x, y \rangle] \rangle, \langle A, A \rangle\rangle], A \rangle] \neq A,$$

d. h. $[j, \langle x, y \rangle] \neq A$ (j hängt von φ, ψ und χ ab).

Für jedes x erfüllt genau ein y diese Bedingung: Für $[\chi, x] \neq A$ ist es $y = [\varphi, x]$, für $[\chi, x] = A$ ist es $y = [\psi, x]$. Wir können also III. 3. anwenden, und es wird

$$[\zeta, x] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] = A. \end{cases}$$

Damit haben wir das gewünschte II-Ding hergestellt.

(Für 3b.) Wir beweisen die Behauptung für den (willkürlich herausgegriffenen) Spezialfall $\mu = 2$, $f_1 = \varphi$, $f_2 = \chi$, $g_1 = \psi$; in jedem der übrigen sechs Spezialfälle ist der Beweis ganz analog zu führen.

Wir schlagen genau denselben Weg ein wie bei der Herleitung von $[j, \langle x, y\rangle] \neq A$ im obigen Beweise von 3a; nur bringen wir immer an Stelle der Normalform nach x und y auf die Normalform nach φ, χ, x und y. So erhalten wir statt

$$[g, \langle x, y\rangle] \neq A, \quad [h, \langle x, y\rangle] \neq A, \quad [j, \langle x, y\rangle] \neq A$$

sukzessiv

$$[g^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A, \ [h^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A, \ [j^*, \langle\langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle, y\rangle] \neq A$$

(g^*, h^*, j^* hängen nur von ψ ab), und kehren dann wieder mit Hilfe von III. 3. um, wobei statt $[\zeta, x]$ analog $[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle]$ entsteht (k^* hängt auch nur von ψ ab).

Wir haben nun

$$[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle] = \begin{cases} [\varphi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] \neq A, \\ [\psi, x], & \text{für} \quad [\chi, x] = A, \end{cases}$$

d. h.

$$[k^*, \langle\langle \varphi, \chi\rangle, x\rangle] = \left[\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right), x\right].$$

Wenn also $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ auch ein I II-Ding ist, so können wir den Hilfssatz 3 anwenden und erhalten dann

$$[\xi, \langle \varphi, \chi\rangle] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$$

(ξ nur von ψ abhängig), wie behauptet wurde.

5. Summe, Durchschnitt und Differenz von Bereichen.

Der Satz 3 liefert uns das Mittel, an die Konstruktion der im Titel dieses Paragraphen genannten mengentheoretischen Operationen heranzutreten.

Satz 4a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß $x \varepsilon H$ oder $x \varepsilon J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H + J$ und nennen es die Summe von H und J.*

Satz 4b. *Wenn H, J beide Mengen sind, so ist auch $H+J$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$[\varphi, \langle H, J\rangle] = H+J$$

ist.

Beweis. (Für 4a.) Daß es höchstens einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.; es genügt also die Existenz zu beweisen. Es ist aber klar, daß das II-Ding $\left(\frac{H\,|\,J}{H}\right)$ alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

(Für 4b.) Wir müssen zeigen: Wenn H, J Mengen, d. h. I II-Dinge sind, so ist auch $H+J$ Menge, d. h. I II-Ding. Die zweite Behauptung folgt dann hierauf sofort mit Hilfe von Satz 3b: Es ist dann

$$H+J = \left(\frac{H\,|\,J}{H}\right) = [f, \langle\langle H, J\rangle, H\rangle] = [\varphi, \langle H, J\rangle].$$

Also seien H, J I II-Dinge, es gilt (nach IV. 2.) zu zeigen, daß für kein II-Ding g zu jedem x ein y mit $[H+J, y] \neq A$ $[g, y] = x$ existieren kann. $[H+J, y] \neq A$ bedeutet $y \,\varepsilon\, H$ oder $y \,\varepsilon\, J$, es gilt also zu zeigen: Es gibt ein (I-Ding) x, welches von allen $[g, y]$ mit $y \,\varepsilon\, H$ oder $y \,\varepsilon\, J$ verschieden ist.

Wir wählen h, j nach II. 3. bzw. II. 4. und setzen:

$$[h, [g, x]] = [k, x], \quad [j, [g, x]] = [l, x].$$

Da H, J beide I II-Dinge sind, so gibt es (nach IV. 2.) ein I-Ding r, so daß für kein $y \,\varepsilon\, H$ $[k, y] = r$ ist; und ein I-Ding s, so daß für kein $y \,\varepsilon\, J$ $[l, y] = s$ ist.

Hieraus folgt aber: Es kann für kein $y \,\varepsilon\, H$ $[g, y] = \langle r, s\rangle$ sein, denn dann wäre

$$[k, y] = [h, [g, y]] = [h, \langle r, s\rangle] = r$$

entgegen der Annahme; ebensowenig dann für ein $y \,\varepsilon\, J$ $[g, y] = \langle r, s\rangle$ sein, da daß

$$[l, y] = [j, [g, x]] = [j, \langle r, s\rangle] = s$$

zur Folge hätte. Also haben wir in $x = \langle r, s\rangle$ das gewünschte x gefunden.

Satz 5a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \,\varepsilon\, K$ damit gleichbedeutend ist, daß zugleich $x \,\varepsilon\, H$ und $x \,\varepsilon\, J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H \cdot J$ und nennen es den Durchschnitt von H und J.*

Satz 5b. *Wenn H oder J eine Menge ist, so ist $H \cdot J$ auch eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ bzw. ψ bzw. χ, welches von H bzw. von J bzw. von H und J unabhängig ist, so daß immer wenn H bzw. J bzw. H und J Menge ist,*

$$H \cdot J = [\varphi, H] \text{ bzw. } = [\psi, J] \text{ bzw. } = [\chi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 5a.) Die Eindeutigkeit folgt wieder aus I. 4., die Existenz des geforderten Bereiches ist klar, denn das II-Ding $\left(\frac{J\,|\,H}{H}\right)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(Für 5b.) Wieder genügt es den Mengencharakter von $H \cdot J$ zu beweisen, alles übrige folgt durch Anwendung des Satzes 3b.

Diesen sieht man so ein: Es ist offenbar $H \cdot J \lesssim H$ und $H \cdot J \lesssim J$, also ist $H \cdot J$ immer Menge, d. h. I II-Ding, wenn H oder J es ist.

Satz 6a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß $x \varepsilon H$ ist, aber nicht $x \varepsilon J$ ist. Dieses K bezeichnen wir mit $H - J$, und nennen es die Differenz von H und J.*

Satz 6b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $H - J$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ bzw. ψ, welches von H bzw. von H und J unabhängig ist, so daß wenn H bzw. H und J Menge ist,*

$$H - J = [\varphi, H] \text{ bzw. } = [\psi, \langle H, J \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 6a.) Die Eindeutigkeit folgt auch hier aus I. 4., die Existenz des geforderten Bereiches ist klar, denn das II-Ding $\left(\frac{0\,|\,H}{J}\right)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

(Für 6b.) Auch hier genügt es den Mengencharakter von $H - J$ zu beweisen, da daraus alles übrige durch Anwendung des Satzes 3b folgt.

Diesen sieht man so ein: Es ist offenbar $H - J \lesssim H$, also ist $H - J$ Menge, d. h. I II-Ding, wenn H es ist. — Wir führen nun noch eine Konstruktion durch, die wir im folgenden ebenfalls ziemlich häufig gebrauchen werden.

Satz 7a. *φ sei ein II-Ding. Es gibt einen und nur einen Bereich H, für den $x \varepsilon H$ mit $x \varepsilon \varphi$ gleichbedeutend ist, d. h. $H \sim \varphi$ ist. Dieses H bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\varphi)$ und nennen es die Basis von H.*

Satz 7b. *Wenn φ ein I II-Ding ist, so ist $\mathfrak{B}(\varphi)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding ψ, welches von φ unabhängig ist, so daß wenn φ ein I II-Ding ist,*

$$[\psi, \varphi] = \mathfrak{B}(\varphi)$$

ist.

Beweis. (Für 7a.) Die Eindeutigkeit folgt wieder aus I. 4., die Existenz sehen wir so ein: Wir wählen f nach II. 2., mit $u = B$; dann hat $\left(\frac{f\,|\,0}{\varphi}\right)$ offenbar alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 7b.) Wieder genügt es mit Rücksicht auf Satz 3b den Mengencharakter zu beweisen; dieser aber ist evident: Wegen $\mathfrak{B}(\varphi) \sim \varphi$ ist $\mathfrak{B}(\varphi)$ jedenfalls Menge, d. h. I II-Ding, wenn φ es ist.

6. Rechenregeln.

Auf Grund der Sätze 2 und 4 können leicht alle angeführten Elementarmengen von Zermelo-Fraenkel, d. h. die Mengen mit ein oder zwei Elementen, gebildet werden. Wir definieren:

$$\{u, v\} = \{u\} + \{v\}.$$

$\{u, v\}$ ist nach 2b und 4b eine Menge, und seine Elemente sind u und v. Aus 2b und 4b folgt weiter:

$$\{u, v\} = \{u\} + \{v\} = [f, \langle\{u\}, \{v\}\rangle] = [f, \langle[g, u], [g, v]\rangle] = [h, \langle u, v\rangle].$$

Da $\{u, u\}$ und $\{u\}$ dieselben Elemente haben, und $\{u, v\}$ und $\{v, u\}$ gleichfalls, so ist

$$\{u, u\} = \{u\}, \qquad \{u, v\} = \{v, u\}.$$

Wir bilden noch einen Bereich, den wir im Verlaufe der Untersuchungen brauchen werden, d. i. „der Bereich aller I-Dinge", d. h. einen Bereich, der alle I-Dinge enthält. Nach I. 4. gibt es höchstens einen solchen Bereich, und daß es einen solchen gibt, sehen wir so ein: Wir wählen f nach II. 2., wobei $u = B$ ist, dann hat f die gewünschten Eigenschaften. Diesen Bereich nennen wir Ω. Ω ist übrigens keine Menge, d. h. kein I II-Ding. Dies folgt sofort aus IV. 2., denn wenn wir f nach II. 2. wählen, so ist für jedes I-Ding x $[f, x] = x$, $[\Omega, x] \neq A$.[17])

Wir geben nun der Vollständigkeit halber die Rechenregeln für 0, Ω, $+$, $\cdot$, $-$ und $\mathfrak{B}$ an, ohne die trivialen Beweise.

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0, \quad \Omega + \Omega = \Omega \cdot \Omega = \Omega, \quad \Omega - \Omega = 0,$$
$$\Omega + 0 = \Omega - 0 = \Omega, \quad \Omega \cdot 0 = 0 - \Omega = 0.$$

$$H + 0 = H - 0 = H, \quad H \cdot 0 = 0, \quad H + \Omega = \Omega,$$
$$H \cdot \Omega = H, \quad H - \Omega = 0.$$

$$H + J = J + H, \quad (H + J) + K = H + (J + K),$$
$$H \cdot J = J \cdot H, \quad (H \cdot J) \cdot K = H \cdot (J \cdot K).$$

$$H + H = H \cdot H = H, \quad H - H = 0.$$

$$(H + J) \cdot K = H \cdot K + J \cdot K, \quad (H - J) \cdot K = H \cdot K - J \cdot K.$$

$$H - (H - J) = H \cdot J, \quad (H - J) + J = H + J,$$
$$(H + J) - J = H - J = H - H \cdot J.$$

---

[17]) Daß Ω keine Menge, d. h. kein I II-Ding sein kann, läßt sich auch ohne das Axiom IV. 2. einsehen (oder wenigstens ohne dessen so weitgehende Inanspruchnahme), das ist im wesentlichen der Sinn der Russelschen Antinomie. Vgl. Fußnote [5]). An Stelle von Axiom IV. 2. ist bloß die Bemerkung notwendig, daß mit f auch jedes $g \lesssim f$ ein I II-Ding ist (das „Aussonderungsaxiom").

$H \lesssim H + J$, $J \lesssim H + J$. Aus $H \lesssim K$, $J \lesssim K$ folgt $H + J \lesssim K$.

$H \gtrsim H \cdot J$, $J \gtrsim H \cdot J$. Aus $H \gtrsim K$, $J \gtrsim K$ folgt $H \cdot J \gtrsim K$.

Aus $K \lesssim H$, $K \cdot J = 0$ folgt $K \lesssim H - J$.

$f \sim g$ ist mit $\mathfrak{B}(f) = \mathfrak{B}(g)$ gleichbedeutend.

$f \,\dot{\phi}\, g$ ist mit $\mathfrak{B}(f) \,\dot{\phi}\, \mathfrak{B}(g)$ gleichbedeutend ($\dot{\phi}$ ist eine der Relationen $\lesssim$, $\gtrsim$, $<$, $>$).

Schließlich beweisen wir gleich hier einen Satz, den wir später benötigen werden. Er lautet so:

Aus $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{u'\}\}$ folgt $u = u'$ und $v = v'$.

Erstens zeigen wir, daß $u = u'$ ist. $\{u\}$ gehört zu $\{\{u, v\}, \{u\}\}$, also auch zu $\{\{u', v'\}, \{u'\}\}$, folglich ist $\{u\} = \{u', v'\}$ oder $= \{u'\}$. Da u' Element beider ist, so ist es jedenfalls Element von $\{u\}$, folglich muß $u' = u$ sein, wie behauptet wurde.

Nehmen wir zweitens an, daß $v \neq v'$ ist. $\{u, v\}$ gehört zu $\{\{u, v\}, \{u\}\}$, also auch zu $\{\{u', v'\}, \{u'\}\}$, also ist $\{u, v\} = \{u', v'\}$ oder $= \{u'\}$. Da v Element von $\{u, v\}$ ist, ist es auch Element von $\{u', v'\}$ oder von $\{u'\}$; folglich ist $v = u'$, oder $v = v'$, oder $v = u'$. Wegen $v \neq v'$ kommt nur $v = u'$ in Frage. Ebenso können wir $v' = u$ beweisen, wegen $u = u'$ muß also doch $v = v'$ sein, entgegen der Annahme. Also ist auch $v = v'$.

III. Die allgemeinen Operationen der Mengenlehre.

1. Vereinigungsbereich und Durchschnitt eines Bereichs von Mengen.

Satz 8a. *H sei ein Bereich, der nur Mengen als Elemente hat. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß eine Menge y mit $x \varepsilon y$, $y \varepsilon J$ existiert. Dieses J bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(H)$ und nennen es den Vereinigungsbereich von H.*

Satz 8b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $\mathfrak{S}(H)$ eine Menge Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$[\varphi, H] = \mathfrak{S}(H)$$

ist.

Beweis. (Für 8a.) Wieder folgt die Eindeutigkeit aus I. 4., die Existenz sehen wir wie folgt ein.

$[H, y] \neq A$ bedeutet $y \varepsilon H$, dann ist y jedenfalls eine Menge und $[y, x] \neq A$ bedeutet $x \varepsilon y$. Beides zugleich läßt sich so formulieren (f nach III. 1.):

$$[f, \langle A, [H, y] \rangle] = A, \quad [f, \langle A, [y, x] \rangle] = A.$$

Also

$$\langle[f, \langle A, [H, y]\rangle], [f, \langle A, [y, x]\rangle]\rangle = \langle A, A\rangle,$$

$$[f\langle\langle[f, \langle A, [H, y]\rangle], [f, \langle A, [y, x]\rangle]\rangle, \langle A, A\rangle\rangle] \neq A,$$

und auf die Normalform gebracht:

$$[g, \langle x, y\rangle] \neq A$$

(g hängt nur von H ab). Daß ein solches y existiert, bedeutet (h nach III. 2.):

$$[h, x] = A$$

oder

$$[j, x] \neq A,$$

und wenn wir $J = \mathfrak{B}(j)$ setzen, so wird:

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn ein solches } y \text{ existiert,} \\ A, & \text{wenn kein solches } y \text{ existiert.} \end{cases}$$

Dies II-Ding J hat also alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 8b.) Wenn H eine Menge, d. h. I II-Ding ist, so sehen wir, daß $\mathfrak{S}(H)$ auch Menge, d. h. I II-Ding ist, so ein: Nach V. 2. existiert ein I II-Ding f, für welches $\mathfrak{S}(H) \lesssim f$ ist, folglich ist auch $\mathfrak{S}(H)$ ein I II-Ding.

Wenn H ein I II-Ding ist, so können wir die bei dem Beweise von Satz 8a angestellte Rechnung folgendermaßen abändern: Die erste Reduktion auf die Normalform nach x, y ersetzen wir durch eine nach H, x, y, dann erhalten wir statt $[g, \langle x, y\rangle]$ $[g^*, \langle\langle H, x\rangle, y\rangle]$, wobei g^* auch von H unabhängig ist. Ebenso erhalten wir statt $[h, x]$ $[h^* \langle H, x\rangle]$, und statt $[j, x]$ $[j^*, \langle H, x\rangle]$ (h^*, j^* von H unabhängig). Sodann setzen wir $k^* = \mathfrak{B}(j^*)$, und dann wird offenbar:

$$[k^*, \langle H, x\rangle] = [\mathfrak{S}(H), x].$$

Da $\mathfrak{S}(H)$ ein I II-Ding ist, können wir den Hilfssatz 3 anwenden, und es wird:

$$\mathfrak{S}(H) = [\varphi, H].$$

Satz 9a. *H sei ein Bereich, der nur Mengen als Elemente hat. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß für jede Menge y mit $y \varepsilon H$ auch $x \varepsilon y$ ist. Dieses J bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}(H)$ und nennen es den Durchschnitt von H.*

Satz 9b. *Wenn $H \neq 0$ ist (und nur dann), so ist $\mathfrak{D}(H)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen $H \neq 0$*

$$\mathfrak{D}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. (Für 9a.) Die Eindeutigkeit folgt auch hier aus I. 4., die Existenz sehen wir wie folgt ein.

$[H, y] \neq A$ bedeutet $y \varepsilon H$, dann ist y jedenfalls eine Menge, also auch I II-Ding; und $[y, x] = A$ bedeutet, daß nicht $x \varepsilon y$ ist. Beides zusammen können wir auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(f hängt nur von H ab) bringen. Daß dies nie stattfindet, drückt sich nach III. 2. so aus:

$$[g, x] \neq A.$$

Wenn wir also $J = \mathfrak{B}(g)$ setzen, so ist

$$[J, x] = \begin{cases} B, \text{ wenn es kein solches } y \text{ gibt,} \\ A, \text{ wenn es ein solches } y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Dieses II-Ding J hat also die gewünschten Eigenschaften.

(Für 9b.) Für jedes Element y von H ist offenbar $\mathfrak{D}(H) \lesssim y$; wenn also $H \neq 0$ ist, d. h. Elemente hat, so folgt daraus, daß y ein I II-Ding ist (denn ein Element y von H ist offenbar ein I II-Ding), daß auch $\mathfrak{D}(H)$ I II-Ding, d. h. Menge ist. Ist hingegen $H = 0$, so ist $\mathfrak{D}(H) = \Omega$, denn da H keine Elemente y hat, gehört jedes x zu $\mathfrak{D}(H)$, und Ω ist keine Menge.

Wenn H eine Menge und $H \neq 0$ ist, d. h. wenn H und $\mathfrak{D}(H)$ beide I II-Dinge sind, so schließen wir ebenso wie beim Satze 8: Wir verfahren ebenso wie beim Beweise 9a, nur reduzieren wir auf die Normalform nach H und x und erhalten so statt $[f, \langle x, y \rangle]$ und $[g, x]$ $[f^*, \langle\langle H, x \rangle, y \rangle]$ und $[g^*, \langle H, x \rangle]$ (f^*, g^* sind auch von H unabhängig). Sodann setzen wir $h^* = \mathfrak{B}(g^*)$, so daß

$$[h^*, \langle H, x \rangle] = [\mathfrak{D}(H), x]$$

ist, woraus nach Hilfssatz 3

$$\mathfrak{D}(H) = [\varphi, x]$$

folgt.

Es ist leicht, die Operationen $H + J$ und $H \cdot J$ für Mengen H, J (für Bereiche nicht!) auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ zurückzuführen. Es gilt nämlich offenbar

$$H + J = \mathfrak{S}(\{H, J\}), \qquad H \cdot J = \mathfrak{D}(\{H, J\}).$$

Ferner gilt offenbar:

$$\mathfrak{D}(0) = \Omega, \qquad \mathfrak{S}(0) = 0.$$

2. Der Bildbereich.

Satz 10a. *H sei ein Bereich, φ ein II-Ding. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den $x \varepsilon J$ damit gleichbedeutend ist, daß es ein y mit $y \varepsilon H$, $[\varphi, y] = x$ gibt. Dieses bezeichnen wir mit $|[\varphi, H]|$ und nennen es den durch φ vermittelten Bildbereich von H.*

Satz 10b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $|[\varphi, H]|$ eine Menge.* (Diese Behauptung entspricht dem „Ersetzungsaxiom" von Fraenkel. Vgl. Fußnote [7].) *Es gibt ein II-Ding ψ bzw. χ, welches von H bzw. von H und φ unabhängig ist, so daß, wenn H Menge ist, bzw. H Menge und φ I II-Ding ist,*

$$|[\varphi, H]| = [\psi, H] \quad \text{bzw.} \quad [\chi, \langle H, \varphi \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 10a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen. Wir müssen ausdrücken, daß es ein y mit $y \varepsilon H$, $[\varphi, y] = x$ gibt. Diese Eigenschaft von y formuliert sich so (f nach III. 1.):

$$[H, y] \neq A, \quad [\varphi, y] = x,$$
$$[f, \langle [H, y], A \rangle] = A, \quad [\varphi, y] = x,$$
$$\langle [f, \langle [H, y], A \rangle], [\varphi, y] \rangle = \langle A, x \rangle,$$
$$[f, \langle \langle [f, \langle [H, y], A \rangle], [\varphi, y] \rangle, \langle A, x \rangle \rangle] \neq A.$$

und auf die Normalform gebracht:

$$[g, \langle x, y \rangle] \neq A$$

(g hängt von H und φ ab). Daß es ein solches y gibt, bedeutet nach III. 2.

$$[h, x] = A,$$
$$[j, x] \neq A.$$

Wenn wir also $J = B(j)$ setzen, so wird

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn es ein solches } y \text{ gibt,} \\ A, & \text{wenn es kein solches } y \text{ gibt.} \end{cases}$$

Das II-Ding J besitzt also die gewünschten Eigenschaften.

(Für 10b.) Nehmen wir an, H wäre Menge, d. h. I II-Ding, und $|[\varphi, H]|$ nicht. Nach IV. 2. müßte es dann ein II-Ding f geben, so daß für jedes x ein y mit $[|[\varphi, H]|, y] \neq A$, $[f, y] = x$ existierte. Also wäre $y = [\varphi, z]$, $z \varepsilon H$, d. h. $x = [f, [\varphi, x]]$. Wir wählen nun g nach II. 7., so daß

$$[f, [\varphi, z]] = [g, z]$$

ist, dann gibt es zu jedem x ein z mit $z \varepsilon H$, $[g, z] = x$. Also kann auch H kein I II-Ding sein.

Wenn H eine Menge, d. h. I II-Ding ist, und folglich $|[\varphi, H]|$ auch, so können wir $|[\varphi, H]|$ mit derselben Methode auf die Form $[\psi, H]$ bzw. $[\chi, \langle H, \varphi\rangle]$ (je nachdem nur H oder H und φ als I II-Dinge vorausgesetzt sind) bringen, wie bei den Sätzen 3 b, 8 b, 9 b. Beim Reduzieren zur Normalform gewinnen wir statt

$$[g, \langle x, y\rangle], [h, x], [j, x], J = \mathfrak{B}(j)$$

wieder

$$[g^*, \langle\langle H, x\rangle, y\rangle], [h^*, \langle H, x\rangle], [j^*, \langle H, x\rangle], k^* = \mathfrak{B}(j^*)$$

(g^*, h^*, j^*, k^* hängen nur von φ ab) bzw.

$$[g^{**}, \langle\langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle, y\rangle], [h^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle], [j^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle], k^{**} = \mathfrak{B}(j^{**})$$

(g^{**}, h^{**}, j^{**}, k^{**} sind fest). Dann wird

$$[|[\varphi, H]|, x] = [k^*, \langle H, x\rangle] \quad \text{bzw.} \quad = [k^{**}, \langle\langle H, \varphi\rangle, x\rangle]$$

und nach Hilfssatz 3

$$|[\varphi, H]| = [\psi, H] \quad \text{bzw.} \quad = [\chi, \langle H, \varphi\rangle].$$

3. Der Potenzbereich (Bereich aller Teilmengen).

Satz 11 a. *H sei ein Bereich. Es gibt einen und nur einen Bereich J, für den dann und nur dann $x \varepsilon J$ ist, wenn x eine Menge und $x \lesssim H$ ist. Dieses J bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(H)$ und nennen esden Potenzbereich oder Bereich aller Teilmengen von H.*

Satz 11 b. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch $\mathfrak{P}(H)$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H $\mathfrak{P}(H) = [\varphi, H]$ ist.*

Beweis. (Für 11 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen.

Daß x eine Menge und $x \lesssim H$ ist, können wir so ausdrücken: $[f, x] \neq A$ (f nach IV. 1.), für kein y $[x, y] \neq A$, $[x, y] \neq B$, für kein y $[x, y] \neq A$, $[H, y] = A$. Diese Bedingung können wir auf die gewohnte Art auf die Normalform

$$[g, x] \neq A$$

(g hängt nur von H ab) bringen. Wenn wir noch $J = \mathfrak{B}(g)$ setzen, so haben wir das gewünschte II-Ding hergestellt, da

$$[J, x] = \begin{cases} B, & \text{wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind,} \\ A, & \text{wenn die obigen Bedingungen nicht erfüllt sind,} \end{cases}$$

ist.

(Für 11 b.) Wir müssen zuerst beweisen: wenn H Menge, d. h. I II-Ding ist, so ist es auch $\mathfrak{P}(H)$. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich dann auf die gewohnte Art: statt $[g, x]$ wird $[g^*, \langle H, x\rangle]$ (g^* unabhängig von H) gebildet, $j^* = \mathfrak{B}(g^*)$ gesetzt, woraus wegen

$$[j^*, \langle H, x\rangle] = [\mathfrak{P}(H), x]$$

mit Hilfe von Hilfssatz 3 $\mathfrak{P}(H) = [\varphi, x]$ folgt.

H sei also ein I II-Ding. Wir bilden das I II-Ding f nach V. 3. Wenn $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x \lesssim H$, also gibt es ein y mit $x \sim y$, $y \varepsilon f$. Da $x \sim y$ ist, und x ein Bereich ist, so ist nach Satz 7 $x = \mathfrak{B}(y)$. Wir wählen g nach Satz 7 so, daß $[g, u] = \mathfrak{B}(u)$ ist, dann ist für jedes $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ $x = [g, y]$, $y \varepsilon f$. Wir bilden nun einen Bereich J, der $J \sim f$ ist; das ist offenbar $\mathfrak{B}(f)$. Da f ein I II-Ding ist, ist J eine Menge.

Wenn $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x = [g, y]$, $y \varepsilon J$, d. h. $x \varepsilon \|[g, J]\|$; also ist $\mathfrak{P}(H) \lesssim \|[g, J]\|$. Da J eine Menge ist, so ist es auch $\|[g, J]\|$, und daraus folgt, daß auch $\mathfrak{P}(H)$ ein I II-Ding, d. h. eine Menge ist.

4. Der Paarbereich.

Satz 12 a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, so daß $x \varepsilon K$ damit gleichbedeutend ist, daß es zwei u, v mit $u \varepsilon H$, $v \varepsilon J$, $x = \langle u, v\rangle$ gibt. Dieses K bezeichnen wir mit $|\langle H, J\rangle|$, und nennen es den Paarbereich von H und J.*

Satz 12 b. *Wenn H und J beide Mengen sind, so ist auch $|\langle H, J\rangle|$ eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$|\langle H, J\rangle| = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 12 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig die Existenz zu beweisen.

Zu diesem Zwecke bringen wir (analog wie bei den Sätzen 3 a, 8 a, 9 a, 10 a, 11 a) die Bedingung: „Es gibt ein u, zu welchen es ein v gibt, so daß $[H, u] \neq A$, $[J, v] \neq A$, $\langle u, v\rangle = x$ ist,“ auf die Normalform:

$$[f, x] \neq A$$

(f hängt von H, J ab). Dann setzen wir $K = \mathfrak{B}(f)$; K besitzt alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 12 b.) Wir müssen zuerst beweisen: Wenn H, J Mengen sind, so ist auch $|\langle H, J\rangle|$ eine Menge. Die Darstellung

$$|\langle H, J\rangle| = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

können wir dann mit genau der gleichen Methode gewinnen, wie die analogen Resultate in den Sätzen 3 b, 8 b, 9 b, 10 b, 11 b.

Also seien H, J Mengen. Wir hatten im Kap. II, § 6 den Satz bewiesen: Aus $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{v'\}\}$ folgt $u = u'$, $v = v'$; infolgedessen ist $\{\{u, v\}, \{u\}\} = \{\{u', v'\}, \{u'\}\}$ mit $\langle u, v\rangle = \langle u', v'\rangle$ gleichbedeutend. Nun ist aber

$$\{\{u, v\}, \{u\}\} = [g, \langle [g, \langle u, v\rangle], [h, u]\rangle] = [j, \langle u, v\rangle].$$

Wenn $x = \{\{u, v\}, \{u\}\}$ ist, so gibt es also ein einziges y, für welches $y = \langle u', v'\rangle$ und $x = [j, y]$ ist, nämlich $y = \langle u, v\rangle$. $y = \langle u', v'\rangle$ bedeutet $y\,\varepsilon\,|\langle \Omega, \Omega\rangle|$, d. h. $[|\langle \Omega, \Omega\rangle|, y] \neq A$, $[k, y] \neq A$. Diese Bedingungen: $[k, y] \neq A$, $[j, y] = x$ können wir ohne weiteres auf die Form

$$[l, \langle x, y\rangle] \neq A$$

bringen; da ein und nur ein y diese Bedingung erfüllt, nämlich $y = \langle u, v\rangle$, so brauchen wir nur m nach III. 3. zu wählen, und es wird

$$[m, x] = y,$$

d. h.

$$[m, \{\{u, v\}, \{u\}\}] = \langle u, v\rangle.$$

Wenn nun $u\,\varepsilon\,H$, $v\,\varepsilon\,J$ ist, so ist $u\,\varepsilon\,H + J$, $v\,\varepsilon\,H + J$, also $\{u, v\} \lesssim H + J$, $\{u\} \lesssim H + J$, und da es sich um Mengen handelt, $\{u, v\}\,\varepsilon\,\mathfrak{P}(H + J)$, $\{u\}\,\varepsilon\,\mathfrak{P}(H + J)$. Also ist weiter $\{\{u, v\}, \{u\}\} \lesssim \mathfrak{P}(H + J)$, $\{\{u, v\}, \{u\}\}\,\varepsilon\,\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))$, und schließlich $[m, \{\{u, v\}, \{u\}\}]\,\varepsilon\,|[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$, d. h. $\langle u, v\rangle\,\varepsilon\,|[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$. Aus dieser Überlegung folgt, daß $|\langle H, J\rangle| \lesssim |[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$ ist. Da nun H, J Mengen sind, so sind es auch $H + J$, $\mathfrak{P}(H + J)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))$, $|[m, \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(H + J))]|$; und folglich ist auch $|\langle H, J\rangle|$ ein I II-Ding, d. h. ein Menge.

5. Der allgemeine Potenzbereich.

Satz 13 a. *H, J seien zwei Bereiche. Es gibt einen und nur einen Bereich K, für den $x\,\varepsilon\,K$ damit gleichbedeutend ist, daß x ein I II-Ding ist, und daß für jedes u die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\textit{wenn nicht } u\,\varepsilon\,J \textit{ ist,} \quad [x, u] = A,$$
$$\textit{wenn } u\,\varepsilon\,J \textit{ ist,} \quad [x, u]\,\varepsilon\,H.$$

Dieses K bezeichnen wir mit H^J und nennen es die J-te Potenz von H.

Satz 13 b. *Wenn H und J beide Mengen sind, so ist auch H^J eine Menge. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J*

$$H^J = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 13 a.) Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4., es bleibt übrig, die Existenz zu beweisen. Zu diesem Zwecke bringen wir hier die folgende Bedingung auf die Normalform: „x ist ein I II-Ding, es ist für kein u

$[J, u] = A$, $[x, u] \neq A$, es ist für kein u $[J, u] \neq A$, $[H, [x, u]] = A$.“
Die Normalform ist

$$[f, x] \neq A$$

(f hängt von H, J ab). Dann setzen wir $K = \mathfrak{B}(f)$; K besitzt alle gewünschten Eigenschaften.

(Für 13 b.) Wir müssen zuerst beweisen: wenn H, J Mengen sind, so ist auch H^J eine Menge. Die Darstellung

$$H^J = [\varphi, \langle H, J\rangle]$$

können wir dann ebenso gewinnen, wie bisher stets bei den analogen Sätzen.

Also seien H, J Mengen. Wenn $x \varepsilon H^J$, $u \varepsilon J$ ist, so bilden wir das Paar $\langle u, [x, u]\rangle$ und bringen es auf die Form $[f, u]$ (f von x abhängig!). Wir bilden den Bereich $L_x = |[f, J]|$, seine Elemente sind die $[f, u]$. Da J eine Menge ist, is es L_x auch.

L_x ist offenbar folgendermaßen zu charakterisieren: es ist das einzige ξ, welches die folgende Bedingung erfüllt: „ξ ist ein I II-Ding. Es gibt kein z, für welches einerseits $[\xi, z] \neq A$ wäre, und andererseits kein u existierte, für welches $[J, u] \neq A$, $\langle u, [x, u]\rangle = z$ ist. Es gibt kein z, für welches $[\xi, z] \neq B$ wäre, und ein u existierte, für welches $[J, u] \neq A$, $\langle u, [x, u]\rangle = z$ ist.“ Diese Eigenschaft kann aber auf dem gewohnten Wege auf die Form

$$[g, \langle x, \xi\rangle] \neq A$$

(g ist von x unabhängig, ξ wird als I-Ding angesehen) gebracht werden. Nach III. 3. ist dann

$$L_x = [h, x].$$

Wenn nun $x' \varepsilon H^J$ $x'' \varepsilon H^J$ ist, so folgt aus $L_{x'} = L_{x''}$ $x' = x''$. Wegen I. 4. genügt es hierzu zu zeigen, daß stets $[x', u] = [x'', u]$ ist. Wegen $x' \varepsilon H^J$, $x'' \varepsilon H^J$ ist dies für u-s, die nicht zu J gehören, klar: dann ist nämlich $[x', u] = [x'', u] = A$. Wir können also $u \varepsilon J$ annehmen. $\langle u, [x', u]\rangle$ gehört zu $L_{x'}$, also auch zu $L_{x''}$; folglich ist $\langle u, [x', u]\rangle = \langle v, [x'', v]\rangle$. Hieraus folgt aber $u = v$, $[x', u] = [x'', v]$, d. h. $[x', u] = [x'', u]$.

Wir können nun

$$x' \varepsilon H^J, \quad y = L_{x'} = [h, x']$$

auf die Form

$$[j, \langle x', y\rangle] \neq A$$

bringen. Wenn $y = L_x$, $x \varepsilon H^J$ ist, so ist dies nur für ein x' erfüllt, nämlich für $x' = x$, da ja aus $x \varepsilon H^J$, $x' \varepsilon H^J$, $L_x = L_{x'}$ $x = x'$ folgt. Wenn wir also k nach III. 3. wählen, so wird:

$$[k, y] = x, \quad [k, L_x] = x.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Mengencharakter von H^J zu beweisen. Denn für jedes $x \varepsilon H^J$ und $u \varepsilon J$ ist $u \varepsilon J$, $\langle x, u \rangle \varepsilon H$, also $\langle u, [x, u] \rangle \varepsilon |\langle J, H \rangle|$; folglich ist $L_x \lesssim |\langle J, H \rangle|$, also $L_x \varepsilon \mathscr{P}(|\langle J, H \rangle|)$. Hieraus folgt weiter $[k, L_x] \varepsilon |[k, \mathscr{P}(|\langle J, H \rangle|)]|$, d. h. $x \varepsilon |[k, \mathscr{P}|\langle J, H \rangle|)]|$. Also ist $H^J \lesssim |[k, \mathscr{P}(|\langle J, H \rangle|)]|$. Und da H und J Mengen sind, so sind es auch $|\langle J, H \rangle|$, $\mathscr{P}(|\langle J, H \rangle|)$, $|[k, \mathscr{P}(|\langle J, H \rangle|)]|$ und folglich ist H^J ebenfalls ein I II-Ding, d. h. eine Menge.

IV. Grundbegriffe der Wohlordnung.

1. Die unvollständige Ordnung. Abschnitte[18]).

Wir beginnen mit der Definition der unvollständigen Ordnung[19]):

Definition. H, J seien zwei Bereiche. Wir sagen, daß J eine unvollständige Ordnung von H ist, in Zeichen $J\, \mathcal{UO}\, H$, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

1. Jedes Element von J ist $= \langle u, v \rangle$, $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$.

2. $\langle u, u \rangle$ ist nie Element von J.

3. Wenn $\langle u, v \rangle$ und $\langle v, w \rangle$ Elemente von J sind, so ist auch $\langle u, w \rangle$ Element von J.

Wenn $J\, \mathcal{UO}\, H$ ist, und $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ ist, so bedeutet

$u \dot{<} v \ldots (J)$, daß $\langle u, v \rangle \varepsilon J$ ist,

$u \dot{>} v \ldots (J)$, daß $\langle v, u \rangle \varepsilon J$ ist,

$u \| v \ldots (J)$, daß $u \neq v$ ist, und weder $\langle u, v \rangle \varepsilon J$ noch $\langle v, u \rangle \varepsilon J$ ist.

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, so schreiben wir auch einfach $u \dot{<} v$, $u \dot{>} v$ und $u \| v$.

Wir stellen zunächst die grundlegenden Eigenschaften der Relationen $\dot{<}$, $\dot{>}$ und $\|$ fest:

Wenn $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ ist, so findet stets eine und nur eine der vier folgenden Relationen statt: $u = v$, $u \dot{<} v \ldots (J)$, $u \dot{>} v \ldots (J)$, $u \| v \ldots (J)$. $u \dot{<} v \ldots (J)$ ist mit $v \dot{>} u \ldots (J)$ gleichbedeutend; $u \| v \ldots (J)$ mit

---

[18]) Wir wählen hier die transitive unvollständige Ordnung zum Ausgangspunkte, aus dem Grunde, weil dies der Charakter der „echten Teilmengen-Relation" oder der „Subsumptionsordnung" [vgl. G. Hessenberg, Kettentheorie und Wohlordnung, Journal f. Mathematik **135** (1910), S. 81—133] ist, die in unseren Untersuchungen eine entscheidende Rolle spielt. Sonst könnten wir auch von der bloßen Nicht-Reflexivität ausgehen, denn aus ihr, sowie aus der Wohlordnungsbedingung, folgt sowohl die Transitivität, wie die Vollständigkeit der Ordnung.

[19]) Unsere Definition der Ordnung (als Bereich) weicht von der ursprünglichen Definition derselben durch Hessenberg [vgl. seine bei [18]) zitierte Arbeit] ab, sie wurde zuerst wohl von Hausdorff verwendet. (Eine weitere Definition der vollständigen Ordnung gibt C. Kuratowski, Fund. Math. **2** (1921), S. 160—171.)

$v \| u \ldots (J)$. Aus $u \dot{<} v \ldots (J)$, $v \dot{<} w \ldots (J)$ folgt $u \dot{<} w \ldots (J)$, aus $u \dot{>} v \ldots (J)$, $v \dot{>} u \ldots (J)$ folgt $u \dot{>} w \ldots (J)$.

Die Beweise dieser Aussagen erübrigen sich. Ferner stellen wir die zwei folgenden Sätze über die unvollständigen Ordnungen von Mengen auf:

Satz 14. *Wenn H eine Menge ist, so ist auch jede unvollständige Ordnung von H eine Menge. Es gibt eine und nur eine Menge K, für die $J \mathfrak{UO} H$ mit $J \varepsilon K$ gleichbedeutend ist.*

Dieses K bezeichnen wir mit $\mathfrak{UO}(H)$. Es gibt ein II-*Ding φ, so daß für alle Mengen*

$$\mathfrak{UO}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Aus der Bedingung 1 der Definition folgt, daß für jede unvollständige Ordnung J von H $J \lesssim |\langle H, H\rangle|$ ist. Wenn also H eine Menge ist, so sind es auch $|\langle H, H\rangle|$ und J. Folglich ist $J \varepsilon \mathfrak{P}(|\langle H, H\rangle|)$. Wenn wir also die Existenz eines Bereiches K nachweisen können, dessen Elemente die unvollständigen Ordnungrn von H sind, so muß $K \lesssim \mathfrak{P}(|\langle H, H\rangle|)$ sein, d. h. dieser Bereich ist eine Menge.

Daß es nur einen solchen Bereich geben kann, folgt aus I. 4. Wir müssen also nur noch die Existenz beweisen; und dann die Darstellung $\mathfrak{UO}(H) = [\varphi, H]$.

Es handelt sich um die folgende Eigenschaft eines ξ: „ξ ist ein I II-Ding. Es ist für jedes x $[\xi, x] = A$ oder $[\xi, x] = B$. Es ist nie $[\xi, x] \neq A$ und dabei für jedes u und v entweder $[H, u] = A$ oder $[H, v] = A$ oder $\langle u, v\rangle \neq x$. Es ist nie $[\xi, \langle u, u\rangle] \neq A$. Es ist nie $[\xi, \langle u, v\rangle] \neq A$, $[\xi, \langle v, w\rangle] \neq A$, $[\xi, \langle u, w\rangle] = A$." Wir können dies auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle H, \xi\rangle] \neq A$$

bringen (f fest).

Diesen Ausdruck bringen wir zunächst auf die Form

$$[g, \xi] \neq A$$

(g von H abhängig) und setzen $K = \mathfrak{B}(g)$. Dann hat K die gewünschten Eigenschaften.

Wenn wir ferner $h = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist offenbar

$$[h, \langle H, \xi\rangle] = [\mathfrak{UO}(H), \xi],$$

und da $\mathfrak{UO}(H)$ ein I II-Ding ist, so können wir den Hilfssatz 3 anwenden:

$$\mathfrak{UO}(H) = [\varphi, H].$$

Satz 15. *H, J', J'' seien Bereiche, $J' \mathfrak{UO} H$, $J'' \mathfrak{UO} H$. Wenn $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $u \dot{<} v \ldots (J'')$ gleichbedeutend ist, so ist $J' = J''$.*

Dies ist auch dann der Fall, wenn aus $u \dot{<} v \ldots (J')$ $u \dot{<} v \ldots (J'')$ folgt, und aus $u \| v \ldots (J')$ $u \| v \ldots (J'')$ folgt.

Beweis. Wenn $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $u \dot{<} v \ldots (J'')$ gleichbedeutend ist, so ist $x = \langle u, v \rangle$, $u \dot{<} v \ldots (J')$ mit $x = \langle u', v' \rangle$, $u' \dot{<} v' \ldots (J'')$ gleichbedeutend, d. h. $x \varepsilon J'$ mit $x \varepsilon J''$. Also ist $J' \sim J''$, $J' = J''$.

Wenn aus $u \dot{<} v \ldots (J')$ $u \dot{<} v \ldots (J'')$ folgt, und aus $u \| v \ldots (J')$ $u \| v \ldots (J'')$; so müssen wir noch zeigen, daß aus $u \dot{<} v \ldots (J'')$ $u \dot{<} v \ldots (J')$ folgt. Wäre es nicht so, so wäre entweder $u = v$ oder $u \dot{>} v \ldots (J')$, d. h. $v \dot{<} u \ldots (J')$ oder $u \| v \ldots (J')$; also entweder $u = v$ oder $v \dot{<} u \ldots (J'')$, d. h. $u \dot{>} v \ldots (J'')$ oder $u \| v \ldots (J'')$, entgegen $u \dot{<} v \ldots (J'')$. — Weiter definieren wir die Abschnitte in unvollständig geordneten Bereichen:

Definition. H, J seien zwei Bereiche, $J \mathcal{UO} H$. Wir nennen einen Bereich H' einen Abschnitt des nach J geordneten H, in Zeichen $H' \mathcal{A}bs\, H, J$, wenn $H' \lesssim H$ ist, und wenn es noch die folgende Eigenschaft besitzt: Aus $x \varepsilon H'$, $y \varepsilon H - H'$ folgt $x \dot{<} y \ldots (J)$.[20] — Wir definieren nun eine Klasse von echten Teilbereichen eines unvollständig geordneten H, die wir die „durch x bestimmten Abschnitte im nach J geordneten H“ nennen werden. Diese Bezeichnung ermöglicht insofern Mißverständnisse, als diese Bereiche im allgemeinen weder sämtlich Abschnitte im nach J geordneten H sind noch alle Abschnitte zu ihnen gehören. Wir werden aber in den §§ 5, 6 dieses Kapitels zeigen: für „vollständige Ordnungen“ (vgl. dort) sind sie sämtlich Abschnitte, und für „Wohlordnungen“ (vgl. dort) sind sie sogar im wesentlichen die einzigen Abschnitte (Satz 31).

Satz 16a. *H, J seien Bereiche $J \mathcal{UO} H$ und $x \varepsilon H$. Es gibt einen und nur einen Bereich H', so daß $y \varepsilon H'$ mit $y \dot{<} x \ldots (J)$ gleichbedeutend ist. Wir bezeichnen dieses H' mit $\mathcal{A}bs(x; H, J)$ und nennen es den von x bestimmten Abschnitt im nach J geordneten H.*

Satz 16b. *Wenn H (also auch J) eine Menge ist, so ist es auch $\mathcal{A}bs(x; H, J)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H, J und alle $x \varepsilon H$*

$$\mathcal{A}bs(x; H, J) = [\varphi, \langle\langle H, J \rangle, x \rangle]$$

ist. Es gibt ferner zu jedem H, J, $J \mathcal{UO} H$, ein (nur von H, J abhängiges) II-Ding ψ, so daß für alle $x \varepsilon H$, für die $\mathcal{A}bs(x; H, J)$ eine Menge ist,

$$\mathcal{A}bs(x; H, J) = [\psi, x]$$

ist. (Wenn H eine Menge ist, so sind nach dem vorangehenden Satze auch alle $\mathcal{A}bs(x; H, J)$ Mengen; es gibt aber auch unvollständig geordnete Bereiche, die keine Mengen sind, für welche dies zutrifft. Ja, es gibt sogar zu jedem Bereiche überhaupt eine unvollständige Ordnung — die übrigens

---

[20]) Es käme auch die Bedingung „aus $x \varepsilon H'$, $y \dot{<} x \ldots (J)$ folgt $y \varepsilon H'$“ in Frage. Für vollständige Ordnungen (vgl. Kap. IV, § 5) kommt beides auf dasselbe heraus, und hier brauchen wir diese Definition für Satz 17.

eine Wohlordnung ist [vgl. Kap. IV, § 5] — für welche dies zutrifft [vgl. die Sätze 41 und 54]).

Beweis. (Für 16a.) $y \varepsilon H$, $y \dot{<} x \ldots (J)$ bedeutet: $[H, y] \mp A$, $[J, \langle y, x\rangle] \mp A$, was auch so geschrieben werden kann: $[f, y] \mp A$ (f hängt von H, J und x ab). $H' = \mathfrak{B}(f)$ hat offenbar die gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit folgt aus I. 4.

(Für 16b.) Der Mengen-Charakter von $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ folgt aus $\mathfrak{Abs}(x; H, J) < H$. Die beiden Darstellungen von $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$ ergeben sich auf die gewohnte Weise. —

Satz 17. *H, J seien zwei Bereiche, es sei $J\,\mathfrak{UO}\,H$. Wenn K', K'' zwei Abschnitte des nach J geordneten H sind, so ist $K' = K''$, oder $K' < K''$, oder $K' > K''$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $K' \lesssim K''$ oder $K'' \lesssim K'$ ist. Wenn nicht $K' \lesssim K''$ ist, so gibt es ein $x \varepsilon K'$, welches nicht Element von K'' ist. Wegen $K' \lesssim H$ ist $x \varepsilon H$, also ist $x \varepsilon H - K''$. Aus $y \varepsilon K''$ folgt also $y \dot{<} x$. Wäre nun y nicht Element von K', so wäre es ein Element von $H - K'$, denn wegen $K'' \lesssim H$ ist $y \varepsilon H$. Folglich müßte $x \dot{<} y$, $y \dot{>} x$ sein. $y \dot{<} x$ und $y \dot{>} x$ sind aber inkopatibel, also folgt aus $y \varepsilon K''$ $y \varepsilon K'$, d. h. es ist $K'' \lesssim K'$.

2. Auferlegte und übertragene Ordnung. Die Subsumptionsordnung.

Wir definieren zwei Arten der Ordnungs-Definition für einen Bereich mit Hilfe eines andern, bereits eine Ordnung besitzenden Bereiches.

Satz 18a. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathfrak{UO}\,H$. H' sei ein Bereich und $H' \lesssim H$. Es gibt dann ein und nur ein $J'\,\mathfrak{UO}\,H'$, für welches bei allen $u \varepsilon H'$, $v \varepsilon H'$ die Relationen $u \,\dot{\vert}\, v \ldots (J')$ ($\dot{\vert}$ ist eine der Relationen $\dot{<}$, $\dot{>}$, $\|$) bzw. mit $u \,\dot{\vert}\, v \ldots (J)$ gleichbedeutend sind. Dieses J' bezeichnen wir mit $\left(\frac{H'}{H}\right) J$ und nennen es die dem H' durch H, J auferlegte Teilordnung.*

Satz 18b. *Wenn H eine Menge ist, so sind offenbar auch J, H' und $\left(\frac{H'}{H}\right) J$ Mengen $\left(\text{wegen } J\,\mathfrak{UO}\,H,\ H' \lesssim H,\ \left(\frac{H'}{H}\right) J\,\mathfrak{UO}\,H'\right)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß in diesem Falle stets*

$$\left(\frac{H'}{H}\right) J = [\varphi, \langle\langle H, J\rangle, H'\rangle]$$

ist. Es gibt ferner zu jedem H, J, $J\,\mathfrak{UO}\,H$, ein II-Ding ψ, so daß für alle $H' \lesssim H$, die Mengen sind,

$$\left(\frac{H'}{H}\right) J = [\psi, H']$$

ist.

Beweis. (Für 18a.) Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Daß es ein solches J' gibt, sehen wir daran, daß $|\langle H', H'\rangle| \cdot J$ allen Anforderungen genügt.

(Für 18b.) Da $\left(\frac{H'}{H}\right) J = |\langle H', H'\rangle| \cdot J$ ist, so ist es klar, daß alle Bedingungen bezüglich der Darstellbarkeit erfüllt sind.

Satz 19a. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H$. φ sei ein II-Ding, so daß für alle $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ aus $u \neq v$ $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$ folgt; ferner sei $H' = |[\varphi, H]|$. Es gibt dann ein und nur ein $J'\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H'$, für welches bei allen $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u' = [\varphi, u]$, $v' = [\varphi, v]$ (also $u' \varepsilon H'$, $v' \varepsilon H'$) die Relationen $u \dagger v \ldots (J)$ ($\dagger$ eine der Relationen $\dot{<}, \dot{>}, \|$) bzw. mit $u' \dagger v' \ldots (J')$ gleichbedeutend sind. Dieses J' bezeichnen wir mit $[\varphi] J$ (wie man leicht sieht, hängt es bloß von φ und J ab, aber nicht direkt von H oder H'), und nennen es die auf H' durch φ von H, J übertragene Ordnung.*

Satz 19b. *Wenn H eine Menge ist, so sind offenbar auch J, H' und $[\varphi] J$ Mengen (wegen $J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H$, $H' = |[\varphi, H]|$, $[\varphi] J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H'$). Wenn auch φ ein I II-Ding ist, so gibt es ein (von H, J, φ unabhängiges) II-Ding ψ, so daß in diesem Falle stets*

$$[\varphi] J = [\psi, \langle \varphi, J\rangle]$$

ist. Wenn über φ nichts vorausgesetzt wird, so gibt es ein von φ abhängiges (aber von H, J nicht direkt abhängiges) II-Ding χ, so daß

$$[\varphi] J = [\chi, J]$$

ist.

Beweis. (Für 19a.) Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Daß es ein solches J' gibt, sehen wir folgendermaßen ein. Wir setzen

$$\langle [\varphi\, u], [\varphi\, v]\rangle = [f, \langle u, v\rangle]$$

(f abhängig von φ), und bilden $J' = |[f, J]|$. J' besitzt offenbar die geforderten Eigenschaften.

(Für 19b.) Der zweite Teil ist evident, da ja

$$[\varphi] J = |[f, J]| = [\chi, J]$$

(f und χ von φ abhängig) ist. Um den ersten Teil zu beweisen, wo φ ein I II-Ding ist, reduzieren wir $\langle (\varphi, u], [\varphi, v]\rangle$ zu

$$[h, \langle \varphi, \langle u, v\rangle\rangle] \;^{21)}$$

(h fest). $[\varphi] J = J'$ ist offenbar dadurch charakterisiert, daß $x' \varepsilon J'$ mit

---

[21]) Der Hilfssatz 1 erlaubt eigentlich nicht, diese Form herzustellen. Wir helfen uns so: wir können jedenfalls auf die Form $[h', \langle\langle u, v\rangle, \varphi\rangle]$ bringen. Dies ist ein Ausdruck von φ und $\langle u, v\rangle$, kann also auf die Form $[h, \langle \varphi, \langle u, v\rangle\rangle]$ gebracht werden.

$x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $x \varepsilon J$ gleichbedeutend ist. Wir bringen darum die folgende Bedingung auf die Normalform: „ξ ist ein I II-Ding. Es ist für kein x' $[\xi, x'] \neq A$ und dabei für kein x $x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $[J, x] \neq A$. Es ist für kein x' $[\xi, x'] \neq B$ und dabei für ein x $x' = [h, \langle \varphi, x \rangle]$, $[J, x] \neq A$." Die Normalform ist natürlich

$$[j, \langle\langle \varphi, J \rangle, \xi \rangle] \neq A$$

(j fest). Da dieser Bedingung ein einziges ξ genügt, nämlich $[\varphi] J = J'$, so ist nach III. 3.

$$[\varphi] J = [\psi, \langle \varphi, J \rangle].$$

Schließlich geben wir diejenige unvollständige Ordnung an, die uns als Ausgangspunkt bei der Herstellung aller übrigen Ordnungen dienen wird, die sogenannte „Subsumptionsordnung"[22]). Wir definieren zuerst $\mathcal{P}(\Omega) = \Omega^*$. Elemente von Ω^* sind diejenigen Mengen H, die $\lesssim \Omega$ sind, d. h. alle Mengen überhaupt. Das heißt: Ω^* ist der Bereich aller Mengen. Ω^* ist auch keine Menge, denn es ist offenbar $\mathcal{S}(\Omega^*) = \Omega$, mit Ω^* müßte also auch Ω eine Menge sein.

Satz 20. *Es gibt ein und nur ein $J\,\mathfrak{UO}\,\Omega^*$, für welches $u \mathrel{\dot{<}} v \ldots (J)$ mit $u < v$ gleichbedeutend ist. Dieses J bezeichnen wir mit Σ und nennen es die Subsumptionsordnung.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 15. Die Existenz sehen wir so ein.

Wir bringen die folgende Bedingung auf die Normalform: „Es gibt ein u, zu dem es ein v gibt, so daß $u \varepsilon \Omega^*$, $v \varepsilon \Omega^*$, $x = \langle u, v \rangle$, $u < v$ (d. h. $u \varepsilon \mathcal{P}(v) - \{v\}$) ist". Die Normalform ist natürlich

$$[f, x] \neq A.$$

Wir setzen dann $J = \mathcal{B}(f)$, J besitzt offenbar alle gewünschten Eigenschaften.

3. Eigenschaften der auferlegten und der übertragenen Ordnung.

Wir geben noch einige triviale Eigenschaften der in den letzten Paragraphen aufgestellten Begriffe an. In der „naiven Mengenlehre" ist es meistens gar nicht üblich diejenigen Distinktionen zu treffen, die uns in diesen Paragraphen beschäftigen: so wird z. B. kaum zwischen einer Ordnung und den durch dieselbe den Teilbereichen auferlegten Teilordnungen unterschieden. Die axiomatische Methode zwingt uns zu einer größeren Exaktheit, und so können wir die etwas langwierigen und dabei fast durchwegs trivialen Überlegungen der §§ 1—3 nicht umgehen.

---

[22]) Dieser Ausdruck stammt von Hessenberg (vgl. seine bei [18]) zitierte Arbeit).

Es gelten die folgenden Sätze:

H, H', H'' und J seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$ und $H'' \lesssim H' \lesssim H$. Dann ist $\left(\frac{H''}{H}\right)J = \left(\frac{H''}{H'}\right)\left(\frac{H'}{H}\right)J$. — H und J seien Bereiche, φ, ψ II-Dinge. Es sei $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Ferner setzen wir $H' = |[\varphi, H']|$, $H'' = |[\psi, H']|$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$; aus $u' \varepsilon H'$ $v' \varepsilon H'$, $u' \neq v'$ folge $[\psi, u'] \neq [\psi, v']$. Wir setzen $[\chi, u] = [\psi, [\varphi, u]]$. Es ist offenbar $H'' = |[\chi, H]|$, und aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folgt $[\chi, u] \neq [\chi, v]$. Dann ist $[\chi]J = [\psi][\varphi]J$. — H, H' und J seien Bereiche $H' \lesssim H$; φ sei ein II-Ding. Es sei $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Dann ist $[\varphi]\left(\frac{H'}{H}\right)J = \left(\frac{|[\varphi, H']|}{|[\varphi, H]|}\right)[\varphi]J$.

All dies ist mit Hilfe von Satz 15 sofort einzusehen. Ferner gilt: H, H', J seien Bereiche, φ ein II-Ding. Es sei $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Wenn $H'\,\mathcal{A}bs\,H, J$ ist, so ist auch $|[\varphi, H']|\,\mathcal{A}bs\,|[\varphi, H]|, [\varphi]J$. — H und J seien Bereiche, φ ein II-Ding. Es sei $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folge $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Dann ist $|[\varphi, \mathcal{A}bs(x; H, J)]| = \mathcal{A}bs([\varphi, x]; |[\varphi, H]|, [\varphi]J)$.

Diese Behauptungen sind trivial.

4. Ähnlichkeit.

Die Ähnlichkeit definieren wir folgendermaßen:

Definition. $H, H'\,J, J'$ seien Bereiche, es sei $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$. Wir sagen: H, J ist dem H', J' ähnlich, in Zeichen: $H, J \approx H', J'$, wenn es ein II-Ding φ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

Aus $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H$, $x \neq y$ folgt $[\varphi, x] \neq [\varphi, y]$. Es ist $H' = |[\varphi, H]|$, $J' = [\varphi]J$. Diese Eigenschaften von φ drücken wir so aus: $H, J \approx H'\,J' \ldots (\varphi)$.

Vor allem benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 21a. *Wenn $H, J \approx H', J'$ ist und H eine Menge ist, so sind es auch J sowie H' und J'. Ferner kann ein I II-Ding φ immer so gewählt werden, daß $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ ist.*

Satz 21b. *Es gibt ein II-Ding ψ, so daß für alle Mengen H, J, H', J' die Relationen $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, $H, J \approx H', J'$ mit der Relation $[\psi, \langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle] \neq A$ gleichbedeutend sind.*

Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle Mengen H, J, H', J' und alle I II-Dinge φ die Relationen $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, aus $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H$, $x \neq y$ folgt $[\varphi, x] \neq [\varphi, y]$, und schließlich $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ einerseits und die Relation $[\chi, \langle\langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ andererseits gleichbedeutend sind.

Beweis. (Für 21a.) Wegen $J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H$, $H' = |[\varphi, H]|$, $J'\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H'$ sind mit H auch J, H', J' Mengen. Aus $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ folgt, wie man sofort sieht, $H, J \approx H', J' \ldots \left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$; und wegen $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right) \lesssim H$ ist dieses ein I II-Ding.

(Für 21b.) Der Beweis des zweiten Teiles benötigt keine nähere Erläuterung: Wir können die dort formulierten Bedingungen auf dem bekannten Wege auf die gewünschte Normalform bringen.

Der erste Teil folgt aus dem zweiten auf Grund der Bemerkung in Satz 21a: $H, J \approx H', J'$ ist schon damit gleichbedeutend, daß für ein I II-Ding φ $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$, d. h. $[\chi, \langle\langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle, J'\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ ist. Dies kann auf die gewohnte Art (in diesem Falle hauptsächlich mit Hilfe von Axiom IV. 1. und III. 2.) zu $[\psi, \langle\langle\langle H, J\rangle, H'\rangle\, J'\rangle] \neq A$ umgeformt werden.

Weiter brauchen wir die identische, die symmetrische und die transitive Eigenschaft der Ähnlichkeit:

Satz 22. *H, J, H', J', H'', J'' seien Bereiche, $J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H$, $J'\,\mathfrak{O}\mathfrak{U}\,H'$. $J''\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H''$.*

Es ist $H, J \approx H, J$. Aus $H, J \approx H'\,J'$ folgt $H', J' \approx H, J$. Aus $H, J \approx H', J'$, $H', J' \approx H'', J''$ folgt $H, J \approx H'', J''$.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial: denn für $[\varphi, x] = x$ (φ nach II. 1.) ist $H, J \approx H, J \ldots (\varphi)$.

Die zweite Behauptung beweisen wir so: Wenn $H, J \approx H', J'$, d. h. $H, J \approx H'. J' \ldots (\varphi)$ ist, so ist (wie man leicht sieht) $H', J' \approx H, J \ldots (\psi)$, falls für $x \varepsilon H$, $y \varepsilon H'$ $y = [\varphi, x]$ mit $x = [\psi, y]$ gleichbedeutend ist. Ein solches ψ ist aber leicht herzustellen: denn nach den Annahmen über φ gibt es zu jedem $y \varepsilon H'$ ein und nur ein $x \varepsilon H$ mit $[\varphi, x] = y$, also kann dies auf die bekannte Art auf die Form $[\psi, y]$ gebracht werden.

Die dritte Behauptung ist wieder fast trivial: denn wenn $H, J \approx H', J'$, $H', J' \approx H'', J''$ ist, d. h. $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ und $H', J' \approx H'', J'' \ldots (\psi)$, so ist (wie man leicht sieht) $H, J \approx H'', J'' \ldots (\chi)$, falls $[\chi, x] = [\psi, [\varphi, x]]$ ist. Ein solches χ existiert aber nach II. 7.

Schließlich beweisen wir noch:

Satz 23. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H$, $J'\,\mathfrak{U}\mathfrak{O}\,H'$. φ sei ein II-Ding, ferner seien $\overline{H}$, $\overline{H}'$ Bereiche $\overline{H} \lesssim H$, $\overline{H}' \lesssim H'$ und $H' = |[\varphi, H]|$, $\overline{H}' = |[\varphi, \overline{H}]|$. Dann folgt aus $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ $\overline{H}, \left(\frac{\overline{H}}{H}\right) J \approx \overline{H}', \left(\frac{\overline{H}'}{H'}\right) J' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition der Ähnlichkeit.

5. Vollständige- und Wohlordnung.

Wir sind nun so weit, daß wir die Begriffe der vollständigen und der Wohlordnung aufstellen können.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Wir nennen J eine vollständige Ordnung von H, in Zeichen: $J\,\mathcal{VO}\,H$, wenn es die folgende Eigenschaft hat: Für kein $u\,\varepsilon\,H$, $v\,\varepsilon\,H$ ist $u \| v \ldots (J)$.

Wir beweisen einige einfache Sätze über die vollständige Ordnung.

Satz 24. *Wenn H eine Menge ist, so gibt es eine und nur eine Menge K, für die $J\,\mathcal{VO}\,H$ mit $J\,\varepsilon\,K$ gleichbedeutend ist. Wir bezeichnen dieses K mit $\mathcal{VO}(H)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$\mathcal{VO}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Dies wird analog zu Satz 14 bewiesen. Wir müssen hier die folgende Aussage auf die Normalform

$$[f, \langle H, J\rangle] \neq A$$

bringen: „$J\,\varepsilon\,\mathcal{UO}(H)$, und es gibt kein u, zu dem es ein v gibt, so daß $[H, u] \neq A$, $[H, v] \neq A$, $u \neq v$, $[J, \langle u, v\rangle] = A$, $[J, \langle v, u\rangle] = A$ (d. h. $u\,\varepsilon\,H$, $v\,\varepsilon\,H$, $u \| v \ldots (J)$) ist.“ Alles übrige geschieht genau wie bei Satz 14.

Satz 25. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$, $J'\,\mathcal{UO}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Dann ist $J\,\mathcal{VO}\,H$ mit $J'\,\mathcal{VO}\,H'$ gleichbedeutend.*

H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$, $H' \lesssim H$. Aus $J\,\mathcal{VO}\,H$ folgt $\left(\frac{H'}{H}\right) J\,\mathcal{VO}\,H'$.

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Wenn $u\,\varepsilon\,H$ ist und aus $v\,\varepsilon\,H$ $u \mathrel{\dot{\leqq}} v \ldots (J)$ bzw. $u \mathrel{\dot{\geqq}} v \ldots (J)$ folgt, so nennen wir u ein erstes bzw. letztes Element des nach J geordnetem H.

Satz 26a. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{UO}\,H$. Das nach J geordnete H hat kein oder ein und nur ein erstes bzw. letztes Element.*

Satz 26b. *Wenn H, J Mengen sind, so gibt es zwei II-Dinge φ, ψ, so daß*

$$[\varphi, \langle H, J\rangle] \neq A$$

damit gleichbedeutend ist, daß das nach J geordnete H ein erstes bzw. letztes Element hat, und wenn das der Fall ist, so ist $[\psi, \langle H, J\rangle]$ dieses erste bzw. letzte Element.

Beweis. (Für 26a.) Diese Behauptung ist evident.

(Für 26b.) Wir können die Bedingung „Es ist $[H, u] \neq A$, und für alle v ist $[H, v] = A$ oder $u = v$ oder $[J, \langle u, v\rangle] \neq A$ bzw. $[J, \langle v, u\rangle] \neq A$“

auf die gewohnte Art auf die Form

$$[f, \langle\langle H, J\rangle, u\rangle] \neq A$$

bringen. Dann liefern III. 2. und III. 3. die Behauptungen.

Satz 27. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Das nach J geordnete H hat dann und nur dann ein erstes bzw. letztes Element, wenn das nach J' geordnete H' eines hat.*

Wenn $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$ ist, und das erstere u ist, so ist das letztere $[\varphi, u]$.

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

Nun definieren wir die Wohlordnung.

Definition. H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Wir sagen: J ist eine Wohlordnung von H, in Zeichen $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$, wenn für jeden Bereich $H' \lesssim H$, $H' \neq 0$ das nach $\left(\frac{H'}{H}\right)J$ geordnete H' ein erstes Element hat.

Satz 28. *Wenn H eine Menge ist, so gibt es eine und nur eine Menge K, für die $J \varepsilon K$ mit $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ gleichbedeutend ist.*

Dieses K bezeichnen wir mit $\mathcal{W}\mathcal{O}(H)$. Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H

$$\mathcal{W}\mathcal{O}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. Auch hier wird alles in voller Analogie zu den Sätzen 14 und 24 bewiesen, nur daß hier die folgende Bedingung auf die Normalform

$$[f, \langle H, J\rangle] \neq A$$

gebracht werden muß: „$J \varepsilon \mathcal{U}\mathcal{O}(H)$. Für jedes H' ist entweder nicht $H' \varepsilon \mathcal{P}(H) - \{0\}$, oder aber besitzt das nach J geordnete H ein erstes Element."

Satz 29. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $J'\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H'$, $H, J \approx H', J'$. Dann ist $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ mit $J'\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H'$ gleichbedeutend.*

H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$, $H' \lesssim H$. Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $\left(\frac{H'}{H}\right)J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H'$.

Beweis. Diese Behauptungen sind evident.

6. Abschnitte in vollständig- und in wohlgeordneten Mengen.

Satz 30. *H, J seien zwei Bereiche. Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$, aus $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$. Für eine Menge H ist also*

$$\mathcal{W}\mathcal{O}(H) \lesssim \mathcal{V}\mathcal{O}(H) \lesssim \mathcal{U}\mathcal{O}(H).$$

Beweis. Daß aus $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$ $J\,\mathcal{U}\mathcal{O}\,H$ folgt, ist klar. Wir müssen noch zeigen: Aus $J\,\mathcal{W}\mathcal{O}\,H$ folgt $J\,\mathcal{V}\mathcal{O}\,H$.

Es sei also $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$. Nehmen wir an, es wäre $u \,\varepsilon\, H$, $v \,\varepsilon\, H$, $u \,\|\, v \ldots (J)$. Dann ist $\{u, v\} \lesssim H$, $\{u, v\} \neq 0$, also hat $\{u, v\}$ ein erstes Element. Dies sei x. Wegen $x \,\varepsilon \{u, v\}$ ist $x = u$ oder $x = v$. Aus $x = u$ folgt wegen $v \,\varepsilon \{u, v\}$

$$u \,\dot{\leqq}\, v \ldots \left(\frac{\{u, v\}}{H}\right) J, \qquad u \,\dot{\leqq}\, v \ldots (J),$$

aus $x = v$ wegen $u \,\varepsilon \{u, v\}$

$$v \,\dot{\leqq}\, u \ldots \left(\frac{\{u, v\}}{H}\right) J, \qquad v \,\dot{\leqq}\, u \ldots (J), \qquad u \,\dot{\geqq}\, v \ldots (J).$$

Beides ist mit $u \,\|\, v \ldots (J)$ unvereinbar. Also ist $J \mathcal{V} \mathcal{O} H$.

Satz 31. *H, J seien Bereiche. Wenn $J \mathcal{V} \mathcal{O} H$ ist, so sind die folgenden Bereiche Abschnitte des nach J geordneten H: H und alle $\mathcal{A}bs(u; H, J)$, $u \,\varepsilon\, H$. Wenn sogar $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$ ist, so sind diese die einzigen Abschnitte.*

Beweis. Daß H ein Abschnitt ist, ist klar. Für $\mathcal{A}bs(u; H, J)$ sehen wir es so ein: Es sei $x \,\varepsilon\, \mathcal{A}bs(u; H, J)$ und $y \,\varepsilon\, H - \mathcal{A}bs(u; H, J)$, d. h. $x \,\varepsilon\, H$, $y \,\varepsilon\, H$ und $x \,\dot{<}\, u \ldots (J)$, aber nicht $y \,\dot{<}\, u \ldots (J)$. Das letztere bedeutet aber wegen $J \mathcal{V} \mathcal{O} H$ $y \,\dot{\geqq}\, u \ldots (J)$, woraus sofort das Gewünschte, $x \,\dot{<}\, y \ldots (J)$, folgt.

Damit ist die erste Hälfte unserer Behauptung bewiesen. Es bleibt noch übrig die zweite zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß im Falle $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$ keine weiteren Abschnitte existieren. Wir können dies so formulieren: Aus $H' \mathcal{A}bs\, H, J$ folgt $H' = H$ oder $H' = \mathcal{A}bs(u; H, J)$ mit $u \,\varepsilon\, H$. Oder auch: Aus $H' < H$, $H' \mathcal{A}bs\, H, J$ folgt $H' = \mathcal{A}bs(u; H, J)$ mit $u \,\varepsilon\, H$.

Es ist nämlich $H - H' \lesssim H$, $H - H' \neq 0$, also hat das nach $\left(\frac{H - H'}{H}\right) J$ geordnete $H - H'$ ein erstes Element. Dieses sei u. Wegen $u \,\varepsilon\, H - H'$ folgt aus $x \,\varepsilon\, H'$ $x \,\dot{<}\, u \ldots (J)$, d. h. $x \,\varepsilon\, \mathcal{A}bs(u; H, J)$.

Aus $x \,\varepsilon\, H - H'$ folgt hingegen $u \,\dot{\leqq}\, x \ldots \left(\frac{H - H'}{H}\right) J$, $u \,\dot{\leqq}\, x \ldots (J)$. Oder: Aus $x \,\dot{<}\, u \ldots (J)$ (d. h. $x \,\varepsilon\, \mathcal{A}bs(u; H, J)$) folgt $x \,\varepsilon\, H'$. D. h. $x \,\varepsilon\, H'$ ist mit $x \,\varepsilon\, \mathcal{A}bs(u; H, J)$ gleichbedeutend, also ist $H' \sim \mathcal{A}bs(u; H, J)$, $H' = \mathcal{A}bs(u; H, J)$. Dabei ist $u \,\varepsilon\, H - H'$, $u \,\varepsilon\, H$.

V. Theorie der Ordnungszahlen.

1. Zählung, Ordnungszahl, Zählbarkeit.

Wir haben nun alle Grundlagen entwickelt, die uns instand setzen das Hauptbilfsmittel der allgemeinen Mengenlehre, die Theorie der Ordnungszahlen, zu entwickeln (vgl. die Bemerkung im Kap. I, § 3).

Unser Begriff der „Ordnungszahl" beruht auf dem Hilfsbegriffe der „Zählung". Wir definieren diese zwei Begriffe folgendermaßen:

Definition. H, J seien Bereiche, $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$. Wir nennen ein II-Ding φ eine Zählung des nach J geordneten H, in Zeichen: $\varphi\, \boldsymbol{Z} H, J$, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es ist $\varphi \lesssim H$, d. h. wenn nicht $x \varepsilon H$ ist, so ist $[\varphi, x] = A$.
2. Wenn $x \varepsilon H$ ist, so ist $[\varphi, x] = |[\varphi, \mathfrak{Abs}(x; H, J)]|$.

Wenn φ eine Zählung des nach J geordneten H ist, so nennen wir den Bereich $P = |[\varphi, H]|$ eine Ordnungszahl des nach J geordneten H, in Zeichen: $P\boldsymbol{OZ} H, J$. Ferner nennen wir das nach J geordnete H zählbar, in Zeichen: $\boldsymbol{Z} H, J$, wenn es Zählungen (also auch Ordnungszahlen) desselben gibt. Schließlich nennen wir einen Bereich P eine Ordnungszahl, in Zeichen: $P\boldsymbol{OZ}$, wenn es zwei Bereiche H, J, $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$ gibt, so daß $P\boldsymbol{OZ} H, J$ ist.

Ehe wir diese Begriffe näher untersuchen, sprechen wir einige allgemeine Aussagen über ihre formale Darstellung aus.

Satz 32a. *Wenn H eine Menge ist, so wissen wir, daß jedes $J\mathfrak{W}\mathfrak{O}H$ eine Menge ist. Es ist aber auch jede Zählung φ des nach J geordneten H ein III-Ding, und jede Ordnungszahl P desselben eine Menge.*

Satz 32b. *Wenn H, J, P Mengen sind und φ ein III-Ding ist, so lassen sich vier II-Dinge ψ, χ, ξ, ζ angeben, so daß $\varphi\, \boldsymbol{Z} H, J$ mit $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ gleichbedeutend ist, $P\boldsymbol{OZ} H, J$ mit $[\chi, \langle\langle H, J\rangle, P\rangle] \neq A$, $\boldsymbol{Z} H, J$ mit $[\xi, \langle H, J\rangle] \neq A$, und $P\boldsymbol{OZ}$ mit $[\zeta, P] \neq A$ gleichbedeutend ist.*

Beweis. (Für 32a.) φ ist ein III-Ding, weil $\varphi \lesssim H$ ist, P eine Menge, weil $P = |[\varphi, H]|$ ist.

(Für 32b.) Um $\varphi\, \boldsymbol{Z} H, J$ auf die Form $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ zu bringen, müssen wir nur die Bedingungen 1. und 2. der Definition derart umformen, was auf dem gewohnten Wege ohne weiteres geht.

$P\boldsymbol{OZ} H, J$ bedeutet: „Es gibt ein III-Ding φ, für welches $[\psi, \langle\langle H, J\rangle, \varphi\rangle] \neq A$ ist und $P = |[\varphi, H]|$ ist." Auch dies können wir auf die gewohnte Art auf die Form $[\chi, \langle\langle H, J\rangle, P\rangle] \neq A$ bringen.

Die beiden letzten Darstellungen schließlich erhalten wir durch einige einfache Umformungen und Anwendung von III. 2. Es ist klar, wie man dabei zu verfahren hat.

Wenn wir $K = \mathfrak{B}(\zeta)$ setzen, so erhalten wir einen Bereich, der alle Ordnungszahlen enthält, die Mengen sind, und nur diese. Wegen I. 4. gibt es nur ein einziges solches K; wir bezeichnen dasselbe mit Ω^{**}. Da alle Ordnungszahlen Mengen sind, so ist $\Omega^{**} \lesssim \Omega^* \lesssim \Omega$. (Wir wissen, daß Ω, Ω^* keine Mengen sind, und im § 6 werden wir beweisen, daß auch Ω^{**} keine Menge ist.)

2. Eindeutigkeit der Zählung.

Satz 33. *H, J seien Bereiche, $J\mathcal{WO}H$. Wenn überhaupt $\mathbf{Z}\ H, J$ ist, so gibt es ein und nur ein II-Ding φ mit $\varphi\,\mathbf{Z}\,H, J$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Aus $\varphi'\,\mathbf{Z}\,H, J$, $\varphi''\,\mathbf{Z}\,H, J$ folgt $\varphi' = \varphi''$. Nach I. 4. genügt es hierzu nachzuweisen, daß stets $[\varphi', x] = [\varphi'', x]$ ist. Da für alle x, die nicht zu H gehören, $[\varphi', x] = [\varphi'', x] = A$ ist, können wir uns auf die Elemente x von H beschränken.

Nehmen wir also an, es gebe ein $x \varepsilon H$ mit $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$. Wir können diese Bedingung unschwer auf die Form $[f, x] \neq A$ (f unabhängig von x) bringen; dann ist $H^* = \mathfrak{B}(f)$ ein Bereich, dessen Elemente alle x mit $x \varepsilon H$, $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$ sind. Es ist $H^* \lesssim H$, und nach Annahme ist $H^* \neq 0$.

Also hat das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right)J$ geordnete H^* ein erstes Element, d. h. es gibt ein $x \varepsilon H^*$ derart, daß für jedes $y \varepsilon H^*$ $x \mathrel{\dot{\leqq}} y \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right)J$, $x \mathrel{\dot{\leqq}} y \ldots (J)$, $y \mathrel{\dot{\geqq}} x \ldots (J)$ folgt. Oder: Aus $y \mathrel{\dot{<}} x \ldots (J)$ folgt $y \varepsilon H - H^*$.

Wegen $x \varepsilon H^*$ ist $[\varphi', x] \neq [\varphi'', x]$, also $|[\varphi', \mathcal{A}bs(x; H, J)]| \neq |[\varphi'', \mathcal{A}bs(x; H, J)]|$, Da für alle $y \varepsilon \mathcal{A}bs(x; H, J)$ $y \mathrel{\dot{<}} x \ldots (J)$, also $y \varepsilon H - H^*$, also $[\varphi', y] = [\varphi'', y]$ ist, so muß trotzdem $|[\varphi', \mathcal{A}bs(x; H, J)]| = |[\varphi'', \mathcal{A}bs(x; H, J)]|$ sein. Das ist ein Widerspruch.

Für zählbare nach J geordnete H sind also Zählung und Ordnungszahl eindeutig festgelegte Begriffe. Wir bezeichnen dieselben mit $\mathbf{Z}(H, J)$ bzw. $\mathbf{OZ}(H, J)$.

Wenn H, J Mengen sind, so folgt dann aus Satz 32b (durch Anwendung von III. 3.) die Existenz zweier II-Dinge φ, ψ, für welche in diesem Falle stets $\mathbf{Z}(H, J) = [\varphi, \langle H, J\rangle]$, $\mathbf{OZ}(H, J) = [\psi, \langle H, J\rangle]$ ist.

3. Existenz der Zählung.

Satz 34. *H, J seien Bereiche, $J\mathcal{WO}H$. Wenn $\mathbf{Z}\ H, J$ ist, so ist auch für jedes $u \varepsilon H$ $\mathbf{Z}\,\mathcal{A}bs(u; H, J), \left(\frac{\mathcal{A}bs(u; H, J)}{H}\right)J$, und es ist*

$$\mathbf{OZ}\left(\mathcal{A}bs(u; H, J), \left(\frac{\mathcal{A}bs(u; H, J)}{H}\right)J\right) = [\mathbf{Z}(H, J), u].$$

Beweis. Wir setzen $f = \left(\frac{\mathbf{Z}(H, J) \mid 0}{\mathcal{A}bs(u; H, J)}\right)$ und behaupten: Es ist $f\,\mathbf{Z}\,\mathcal{A}bs(u; H, J), \left(\frac{\mathcal{A}bs(u; H, J)}{H}\right)J$. Es gilt nämlich:

Wenn nicht $x \varepsilon \mathcal{A}bs(u; H, J)$ ist, so ist

$$[f, x] = [0, x] = A.$$

Wenn $x \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist, so ist

$$[f, x] = [Z(H, J), x].$$

Folglich gilt für alle $y \varepsilon \mathfrak{Abs}(x; H, J)$ (da dann auch $y \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; H, J)$ ist):

$$[f, y] = [Z(H, J), y],$$

und darum ist:

$$\left|\left[f, \mathfrak{Abs}\left(x; \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right)\right]\right|$$
$$= |[f, \mathfrak{Abs}(x; H, J)]| = |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(x; H, J)]|$$
$$= [Z(H, J), x] = [f, x].$$

Also ist wirklich $f\, Z\, \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$. Und hieraus folgt weiter:

$$O Z\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right) = |[f, \mathfrak{Abs}(u; H, J)]|$$
$$= |[Z(H, J), \mathfrak{Abs}(u; H, J)]| = [Z(H, J), u].$$

Satz 35. *H, J seien Bereiche, $J\, \mathfrak{W}\mathfrak{O}\, H$. Wenn für jedes $u \varepsilon H$ $\mathfrak{Abs}(u; H, J)$ eine Menge ist und $Z\, \mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J$, so ist auch $Z\, H, J$.*

Beweis. Nach Annahme existiert für jedes $u \varepsilon H$

$$O Z\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right)$$

und ist eine Menge, wir können es also auf die Form $[f, u]$ bringen (f von H, J abhängig, vgl. den Schluß von § 2). Wir setzen $g = \left(\frac{f \mid 0}{H}\right)$; dann ist für alle u, die nicht Elemente von H sind,

$$[g, u] = [0, u] = A$$

und für alle u, die Elemente von H sind,

$$[g, u] = [f, u] = O Z\left(\mathfrak{Abs}(u; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(u; H, J)}{H}\right) J\right).$$

Wir behaupten nun: g ist eine Zählung des nach J geordneten H, womit unser Satz auch bewiesen wäre. Da für alle u die nicht zu H gehören, $[g, u] = A$ ist, genügt es die Elemente u von H zu betrachten.

Es sei $u \varepsilon H$, wir setzen der Kürze halber $\mathfrak{Abs}(u; H, J) = H^*$. Dann gilt für alle $x \varepsilon H^*$:

$$\left[Z\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right), x\right]$$
$$= O Z\left(\mathfrak{Abs}\left(x; H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathfrak{Abs}\left(x; H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right)}{H^*}\right)\left(\frac{H^*}{H}\right) J\right)$$
$$= O Z\left(\mathfrak{Abs}(x; H, J), \left(\frac{\mathfrak{Abs}(x; H, J)}{H}\right) J\right) = [g, x].$$

Und hieraus folgt

$$|[g, \mathscr{A}bs(u; H, J)]| = [g, H^*] = \left[Z\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right), H^*\right]$$

$$= OZ\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J\right) = OZ\left(\mathscr{A}bs(u; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(u; H, J)}{H}\right) J\right) = [g, u].$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 36. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$. Für jedes $x \varepsilon H$ sei $\mathscr{A}bs(x; H, J)$ eine Menge. Dann ist $Z\,H, J$.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Nach Satz 35 kann dann auch nicht für alle $x \varepsilon H$ $Z\,\mathscr{A}bs(x; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(x, H, J)}{H}\right) J$ sein.

Wir können diese Eigenschaft: „$x \varepsilon H$ und es ist nicht $Z\,\mathscr{A}bs(x; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(x; H, J)}{H}\right) J$“ auf die gewohnte Art auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen (f ist von H und J abhängig). Wir bilden weiter $H^* = \mathcal{B}(f)$, dann ist H^* ein Bereich und seine Elemente sind alle $x \varepsilon H$, für die nicht $Z\,\mathscr{A}bs(x; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(x; H, J)}{H}\right) J$ ist. Es ist $H^* \lesssim H$ und nach Annahme auch $H^* \neq 0$.

Wegen $J\,\mathcal{WO}\,H$ hat folglich das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right) J$ geordnete H^* ein erstes Element. Dieses sei u. Es ist $u \varepsilon H^*$; und aus $x \varepsilon H^*$ folgt $u \leqq x \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right) J$, $u \leqq x \ldots (J)$, $x \geqq u \ldots (J)$, d. h. aus $x \dot{<} u \ldots (J)$ folgt $x \varepsilon H - H^*$.

Für alle $x \varepsilon \mathscr{A}bs(u; H, J)$ ist also $x \dot{<} u \ldots (J)$, $x \varepsilon H - H^*$, d. h. $Z\,\mathscr{A}bs(x; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(x; H, J)}{H}\right) J$, und dabei ist $\mathscr{A}bs(x; H, J)$ eine Menge. Wir setzen der Kürze halber $\mathscr{A}bs(u; H, J) = H'$ und sehen dann:

Es ist $\left(\frac{H'}{H}\right) J\,\mathcal{WO}\,H'$ (wegen $H' \lesssim H$). Für alle $x \varepsilon H'$ ist $\mathscr{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) = \mathscr{A}bs(x; H, J)$ eine Menge. Und für alle $x \varepsilon H'$ ist das nach $\left(\frac{\mathscr{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{H'}\right)\left(\frac{H'}{H}\right) J$ geordnete $\mathscr{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathscr{A}bs(x; H, J)}{H}\right) J$ geordnete $\mathscr{A}bs(x; H, J)$, zählbar.

Nach Satz 35 ist also auch $Z\,H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$, d. h. $Z\,\mathscr{A}bs(u; H, J), \left(\frac{\mathscr{A}bs(u; H, J)}{H}\right) J$. Folglich ist nicht $u \varepsilon H'$. Andererseits wissen wir aber, daß $u \varepsilon H'$ ist, und dies ist ein Widerspruch. Folglich muß $Z\,H, J$ sein.

4. Subsumptionsordnung von Ordnungszahlen.

Satz 37. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$, $Z\,H, J$. Es ist für kein Element x von H $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an. Wir können diese Eigenschaft: „$x \varepsilon H$ und $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$“ auf die gewohnte Art auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen. Wir bilden weiter $H^* = \mathfrak{B}(f)$, dann ist H^* ein Bereich, und seine Elemente sind alle $x \varepsilon H$, für die $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$. Es ist $H^* \lesssim H$ und nach Annahme ist auch $H^* \neq 0$.

Wegen $J\mathcal{WO}\,H$ hat also das nach $\left(\frac{H^*}{H}\right) J$ geordnete H^* ein erstes Element. Dieses sei u. Wir können wieder leicht einsehen, daß $u \varepsilon H^*$ ist und daß aus $x \dot{<} u \ldots (J)$ $x \varepsilon H - H^*$ folgt.

Wegen $u \varepsilon H^*$ ist $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$; da aber $[Z(H, J), u] = |[Z(H, J), \mathcal{A}bs(u; H, J)]|$ ist, so folgt hieraus $[Z(H, J), u] \varepsilon |[Z(H, J), \mathcal{A}bs(u; H, J)]|$, $[Z(H, J), u] = [Z(H, J), x]$, $x \varepsilon \mathcal{A}bs(u; H, J)$. Wegen $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$ wird also auch $[Z(H, J), x] \varepsilon [Z(H, J), x]$ sein, also ist $x \varepsilon H^*$. Andererseits ist $x \varepsilon \mathcal{A}bs(u; H, J)$, $x \dot{<} u \ldots (J)$, also $x \varepsilon H - H^*$. Dies ist ein Widerspruch.

Satz 38. *H, J seien Bereiche, $J\mathcal{WO}\,H$, $Z\,H, J$. Für alle Elemente u, v von H folgt aus $u \dot{<} v \ldots (J)$ $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$.*

Beweis. Aus $u \dot{<} v \ldots (J)$ folgt $\mathcal{A}bs(u; H, J) < \mathcal{A}bs(v; H, J)$, also $|[Z(H, J, \mathcal{A}bs(u; H, J)]| \lesssim |[Z(H, J), \mathcal{A}bs(v; H, J)]|$, d. h. $[Z(H, J), u] \lesssim [Z(H, J), v]$. Andererseits ist wegen $u \dot{<} v \ldots (J)$, $u \varepsilon \mathcal{A}bs(v; H, J)$ also $[Z(H, J), u] \varepsilon |[Z(H, J), \mathcal{A}bs(v; H, J)]|$, d. h. $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), v]$, und nach Satz 37 ist nicht $[Z(H, J), u] \varepsilon [Z(H, J), u]$; folglich kann nicht $[Z(H, J), u] = [Z(H, J), v]$ sein. Also ist $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$, wie behauptet wurde.

Satz 39. *H, J seien Bereiche, $J\mathcal{WO}\,H$, $Z\,H, J$. Dann folgt aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ $[Z(H, J), u] \neq [Z(H, J), v]$ und es ist*

$$\boldsymbol{O}Z(H, J) = |[Z(H, J), H]|, \left(\frac{\boldsymbol{O}Z(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma = [Z(H, J)]\, J.$$

Beweis. Da $u \neq v$ ist und wegen $J\mathcal{WO}\,H$, $J\mathcal{VO}\,H$ auch $u \| v \ldots (J)$ ausgeschlossen ist, so muß $u \dot{<} v \ldots (J)$ oder $u \dot{>} v \ldots (J)$, $v \dot{<} u \ldots (J)$ sein. Nach Satz 38 ist also $[Z(H, J), u] < [Z(H, J), v]$ oder $[Z(H, J), v] < [Z(H, J), u]$, aber jedenfalls $[Z(H, J), u] \neq [Z(H, J), v]$.

$\boldsymbol{O}Z(H, J) = |[Z(H, J), H]|$ ist definitorisch; um $\left(\frac{\boldsymbol{O}Z(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma = [Z(H, J)]\, J$ zu beweisen, genügt es nach Satz 15 einzusehen, daß aus $x \dot{<} y \ldots ([Z(H, J)]\, J)$ bzw. $x \| y \ldots ([Z(H, J)]\, J)$ $x \dot{<} y \ldots \left(\frac{\boldsymbol{O}Z(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ bzw. $x \| y \ldots \left(\frac{\boldsymbol{O}Z(H, J)}{\Omega^*}\right) \Sigma$ folgt.

Das erstere ist mit $x = [Z(H, J), u]$, $y = [Z(H, J), v]$ und $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \dot{<} v \ldots (J)$ bzw. $u \| v \ldots (J)$ gleichbedeutend. Wir müssen also nachweisen: aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$ und $u \dot{<} v \ldots (J)$ bzw. $u \| v \ldots (J)$ folgt $[\mathbf{Z}(H, J), u] \dot{<} [\mathbf{Z}(H, J), v] \ldots \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma$ bzw. $[\mathbf{Z}(H, J), u] \| [\mathbf{Z}(H, J), v] \ldots \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma$. Das zweite erübrigt sich, da wegen $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$, $J \mathcal{V} \mathcal{O} H$ nie $u \| v \ldots (J)$ ist.

Bezüglich des ersteren ist zu bemerken:

$[\mathbf{Z}(H, J), u] \dot{<} [\mathbf{Z}(H, J), v] \ldots \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist mit $[\mathbf{Z}(H, J), u] \dot{<} [\mathbf{Z}(H, J), v] \ldots (\Sigma)$, d. h. mit $[\mathbf{Z}(H, J), u] < [\mathbf{Z}(H, J), v]$ gleichbedeutend.

Daß jedoch aus $u \dot{<} v \ldots (J)$ $[\mathbf{Z}(H, J), u] < [\mathbf{Z}(H, J), v]$ folgt, wurde bereits durch Satz 38 ausgesagt.

Satz 40. *H, J seien Bereiche, $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$, $\mathbf{Z}\, H, J$. Dann ist*

$$H, J \approx \mathbf{OZ}(H, J),\ \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma \ldots (\mathbf{Z}(H, J)).$$

Hieraus folgt übrigens $\left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{W} \mathcal{O}\, \mathbf{OZ}(H, J)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 39.

Auf Grund der Sätze 36 und 40 sind wir in der Lage, das Problem der Zählbarkeit allgemein zu entscheiden:

Satz 41. *H, J seien Bereiche, $J \mathcal{W} \mathcal{O} H$. Es ist dann und nur dann $\mathbf{Z}\, H, J$, wenn für alle $u \varepsilon H$ $\mathcal{A}bs(u; H, J)$ eine Menge ist. (Wenn H selbst eine Menge ist, so ist dies sicher der Fall.)*

Beweis. Daß diese Bedingung hinreichend ist, sahen wir bereits in Satz 36. Daß sie notwendig ist, beweisen wir so:

Es sei $\mathbf{Z}\, H, J$. Es sei $u \varepsilon H$, wir setzen der Kürze halber $H' = \mathcal{A}bs(u; H, J)$. Dann ist auch $\mathbf{Z}\, H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$, und es ist

$$H', \left(\frac{H'}{H}\right) J \approx \mathbf{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right),\ \left(\frac{\mathbf{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{\Omega^*}\right)\Sigma.$$

$$\mathbf{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) = [\mathbf{Z}(H, J), u].$$

Hieraus folgt aber, da $[\mathbf{Z}(H, J), u]$ ein I-Ding ist, das auch $\mathbf{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ I-Ding, d. h. Menge ist und folglich auch $H' = \mathcal{A}bs(u; H, J)$ eine Menge ist.

5. Charakteristische Eigenschaften der Ordnungszahlen.

Satz 42. *$P\, \mathbf{OZ}$ ist damit gleichbedeutend, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^*$.*

2. *Es ist* $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathcal{W}\mathcal{O} P$.

3. *Es ist für jedes* $u \varepsilon P$ $u = \mathcal{A}bs\left(u; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma\right)$.

Beweis. Daß die Bedingungen notwendig sind, beweisen wir zuerst.

Wenn $P\,\mathbf{OZ}$ ist, so ist $P\,\mathbf{OZ}\,H, J$, $J \mathcal{W}\mathcal{O} H$. Da $P = |[\mathbf{Z}(H,J), H]|$, ist P ein Bereich; da jedes Element von P gleich $[\mathbf{Z}(H,J), x] = |[\mathbf{Z}(H,J), \mathcal{A}bs(x; H,J)]|$ ist, sind diese auch Bereiche, und weil sie I-Dinge sein müssen, Mengen. Also ist $P \lesssim \Omega^*$. Folglich ist 1. erfüllt. 2. folgt aus Satz 40, und 3. beweisen wir so:

Wenn $x \varepsilon P$, d. h. $x \varepsilon \mathbf{OZ}(H,J)$, $x \varepsilon |[\mathbf{Z}(H,J), H]$ ist, so ist $x = [\mathbf{Z}(H,J), u]$, $u \varepsilon H$, und hieraus folgt

$$\mathcal{A}bs\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \mathcal{A}bs([\mathbf{Z}(H,J), u]; |[\mathbf{Z}(H,J), H]|, [\mathbf{Z}(H,J)]\, J)$$
$$= |[\mathbf{Z}(H,J), \mathcal{A}bs(u; H,J)]| = [\mathbf{Z}(H,J), u] = x,$$

d. h. die Behauptung von 3.

Nun beweisen wir, daß die Bedingungen auch hinreichend sind. P genüge also den Bedingungen 1, 2, 3. Es ist dann $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathcal{W}\mathcal{O} P$. Wir wählen f so, daß stets $[f, x] = x$ ist und setzen $g = \left(\frac{f \,|\, 0}{P}\right)$. Wir behaupten nun: es ist $g\,\mathbf{Z}\,P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$.

Wenn x nicht Element von P ist, so ist $[g, x] = [0, x] = A$. Ist hingegen $x \varepsilon P$, so ist $[g, x] = [f, x] = x$. Also ist für alle $x \varepsilon P$

$$\left|\left[g, \mathcal{A}bs\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)\right]\right| = \mathcal{A}bs\left(x; P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x = [g, x].$$

Es ist also wirklich $g\,\mathbf{Z}\,P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$. Und hieraus folgt weiter

$$\mathbf{OZ}\left(P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \left|\left[\mathbf{Z}\left(P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right), P\right]\right| = |[g, P]| = P.$$

Es ist also in der Tat $P\,\mathbf{OZ}$.

Satz 43. *Es sei* $P\,\mathbf{OZ}$. *Dann ist* $Q \varepsilon P$ *damit gleichbedeutend, daß* $Q\,\mathbf{OZ}$ *und* $Q < P$ *ist. (Hieraus folgt also auch, daß* Q *ein I-Ding, also eine Menge ist.)*

Beweis. Wenn $P\,\mathbf{OZ}$ ist, so ist $P = \mathbf{OZ}(H,J)$, $J \mathcal{W}\mathcal{O} H$. Wegen

$$P = \mathbf{OZ}(H,J) = |[\mathbf{Z}(H,J), H]|$$

folgt dann aus $Q \varepsilon P$, daß $Q = [\mathbf{Z}(H,J), u]$, $u \varepsilon H$ ist, also

$$Q = [\mathbf{Z}(H,J), u] = \mathbf{OZ}\left(\mathcal{A}bs(u; H,J), \left(\frac{\mathcal{A}bs(u; H,J)}{H}\right) J\right),$$

es ist also $Q\,O\,Z$. Da ferner nach Satz 42

$$Q = \mathcal{A}bs\left(Q;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) < P$$

ist, ist auch $Q < P$ bewiesen.

Ist umgekehrt $P\,O\,Z$ und $Q\,O\,Z$, $Q < P$, so schließen wir auf die folgende Weise.

Wenn $x \varepsilon Q$, $y \varepsilon P - Q$ ist, so kann keinesfalls $x = y$ sein. Auch $x \parallel y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist unmöglich, da ja $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, P$, $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{VO}\, P$ ist. Und aus $x \dot{>} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ würde sich folgendes ergeben: Wegen $x \varepsilon P$, $x \varepsilon Q$, $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist

$$\mathcal{A}bs\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x,\ \mathcal{A}bs\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x,$$

$$\mathcal{A}bs\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = \mathcal{A}bs\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) < Q.$$

Aus $x \dot{>} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ folgt $y \dot{<} x \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $y \varepsilon \mathcal{A}bs\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$, also $y \varepsilon Q$. Dies widerspricht mit $y \varepsilon P - Q$.

Also muß $x \dot{<} y \ldots \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ sein. Folglich ist $Q\, \mathcal{A}bs\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$. Es ist aber $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, P$, wir können also den Satz 31 anwenden, unter Berücksichtigung von $Q < P$ ergibt er: $Q = \mathcal{A}bs\left(u;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$, $u \varepsilon P$. Also ist

$$Q = \mathcal{A}bs\left(u;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = u,$$

d. h. $Q \varepsilon P$. Damit haben wir unsere Behauptung restlos bewiesen. —

Aus Satz 43 können wir insbesondere die folgenden beiden Konsequenzen ziehen: Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist, so ist $P \varepsilon Q$ mit $P < Q$ gleichbedeutend. Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, $P < Q$ ist, so ist Q eine Menge.

6. Der Bereich der Ordnungszahlen.

Satz 44. *Wenn $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ ist, so ist immer entweder $P = Q$ oder $P < Q$ oder $P > Q$.*

Beweis. Wir setzen $R = P \cdot Q$ und behaupten: $R\,O\,Z$. Da P ein Bereich ist und $P \lesssim \Omega^*$ ist, so folgt hieraus dasselbe für $R = P \cdot Q$ (d. h. R erfüllt die Bedingung 1 des Satzes 42). Aus $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, P$ folgt wegen $R \lesssim R$, $\left(\frac{R}{P}\right)\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, R$, $\left(\frac{R}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, R$ (d. h. R erfüllt auch 2).

Und wegen $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$ gilt für alle $x \varepsilon R$, d. h. $x \varepsilon P$, $x \varepsilon Q$:

$$x = \mathcal{A}bs\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right), \qquad x = \mathcal{A}bs\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right),$$

$$\mathcal{A}bs\left(x;\, R, \left(\frac{R}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)$$

$$= \mathcal{A}bs\left(x;\, P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\right)\cdot \mathcal{A}bs\left(x;\, Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma\right) = x\cdot x = x$$

(d. h. R erfüllt auch 3). Also ist wirklich $R\,O\,Z$.

Nun ist offenbar $R \lesssim P$, $R \lesssim Q$. Wenn $R = P$ oder $R = Q$ ist, so folgt hieraus: $P \lesssim Q$ oder $Q \lesssim P$, also entweder $P \sim Q$, d. h. $P = Q$ oder $P < Q$ oder $Q < P$, $P > Q$. In diesem Falle ist also alles bewiesen.

$R \neq P$, $R \neq Q$ ist aber unmöglich. Denn dann wäre $R < P$, $R < Q$ wegen $R\,O\,Z$, $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, also $R \varepsilon P$, $R \varepsilon Q$, und folglich $R \varepsilon P \cdot Q$, $R \varepsilon R$, woraus wegen $R\,O\,Z$ wieder $R < R$ folgte, was ausgeschlossen ist.

Satz 45. *Es ist* $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma\,\mathcal{WO}\,\Omega^{**}$. ($\Omega^{**}$ ist der am Ende des § 1 definierte Bereich, der alle Ordnungszahlen enthält, die Mengen sind.)

Beweis. Der Ausdruck $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist jedenfalls sinnvoll, da ja $\Omega^{**} \lesssim \Omega^*$ ist. Wir müssen nun zeigen: Wenn $\mathcal{H}$ ein Bereich ist, und $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$, $\mathcal{H} \neq 0$ ist, so hat das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$, ein erstes Element, d. h. es gibt ein $P \varepsilon \mathcal{H}$ derart, daß für alle $Q \varepsilon \mathcal{H}$ stets $P \dot{\leqq} Q \ldots \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist oder, was dasselbe heißt, $P \dot{\leqq} Q \ldots (\Sigma)$, also $P \lesssim Q$ ist.

Da $\mathcal{H} \neq 0$ ist, können wir ein $P \varepsilon \mathcal{H}$ finden. Sind dann alle $Q \varepsilon \mathcal{H}$ $P \lesssim Q$, so sind wir schon am Ziele. Wenn nicht, so betrachten wir diejenigen $Q \varepsilon \mathcal{H}$, für die nicht $P \lesssim Q$ ist.

Wegen $P \varepsilon \mathcal{H}$, $Q \varepsilon \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$ ist $P\,O\,Z$, $Q\,O\,Z$, folglich muß $P > Q$ sein. Also ist $Q < P$, d. h. $Q \varepsilon P$. Jedes solche Q gehört also dem Bereiche $P \cdot \mathcal{H}$ an. Nach Annahme ist folglich $P \cdot \mathcal{H} \neq 0$.

Nun ist $P \cdot \mathcal{H} \lesssim P$, $P \cdot \mathcal{H} \neq 0$ und $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma\,\mathcal{WO}\,P$; folglich hat das nach $\left(\frac{P\cdot\mathcal{H}}{P}\right)\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $P \cdot \mathcal{H}$, d. h. das nach $\left(\frac{P\cdot\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $P \cdot \mathcal{H}$, ein erstes Element. Dieses sei P'.

Es ist $P' \varepsilon P \cdot \mathcal{H}$, also $P' \varepsilon \mathcal{H}$. Wenn $Q \varepsilon \mathcal{H}$ ist, so ist entweder nicht $P \lesssim Q$, oder es ist $P \lesssim Q$. Im ersten Falle muß $Q \varepsilon P \cdot \mathcal{H}$ sein, also ist $P' \dot{\leqq} Q \ldots \left(\frac{P\cdot\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $P' \dot{\leqq} Q \ldots (\Sigma)$, $P' \lesssim Q$. Im zweiten hingegen ist wegen $P' \varepsilon P \cdot \mathcal{H}$ $P' \varepsilon P$, also $P' < P$ und $P \lesssim Q$ sogar $P' < Q$.

Es ist also jedenfalls $P' \lesssim Q$, und damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 46. *POZ ist damit gleichbedeutend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^{**}$.*

2. *Für jedes $Q \varepsilon P$ ist $Q \lesssim P$.*

Beweis[23]). Daß diese Bedingung notwendig ist, ist klar: denn jede Ordnungszahl P ist ein Bereich, und da aus $Q \varepsilon P$ $Q\,OZ$ folgt und dabei Q eine Menge ist, muß $Q \varepsilon \Omega^{**}$ sein. Außerdem folgt aus $Q \varepsilon P$ sogar $Q < P$.

Wir müssen nun noch beweisen, daß die Bedingungen 1, 2 unseres Satzes auch hinreichend sind. P erfülle also diese Bedingungen, wir werden dann zeigen, daß POZ ist, d. h. daß die Bedingungen 1, 2 und 3 des Satzes 42 erfüllt sind.

P ist ein Bereich und $P \lesssim \Omega^{**} \lesssim \Omega^{*}$, also ist die Bedingung 1 des Satzes 42 erfüllt. Aus $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \mathcal{WO}\, \Omega^{**}$ folgt wegen $P \lesssim \Omega^{**}$ auch $\left(\frac{P}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \mathcal{WO}\, P$, d. h. $\left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \mathcal{WO}\, P$. Also ist auch 2. erfüllt. Wir müssen nun noch das Erfülltsein von 3. beweisen, d. h. zeigen: aus $Q \varepsilon P$ folgt $Q = \mathscr{A}bs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma\right)$.

$x \varepsilon \mathscr{A}bs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma\right)$ bedeutet: es ist $x \varepsilon P$, $x \dot{<} Q \ldots \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$. Das letztere können wir auch so formulieren: $x \dot{<} Q \ldots (\Sigma)$ oder auch $x < Q$. Also: $x \varepsilon \mathscr{A}bs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma\right)$ bedeutet $x \varepsilon P$, $x < Q$. Wegen $P \lesssim \Omega^{**}$ folgt aus $x \varepsilon P$ $x\,OZ$, wir können also auch schreiben: $x \varepsilon P$, $x\,OZ$, $x < Q$. Wegen $Q \varepsilon P$, $P \lesssim \Omega^{**}$ ist aber auch $Q\,OZ$, also bedeutet $x\,OZ$, $x < Q$ einfach $x \varepsilon Q$. Das ergibt die weitere Formulierung: $x \varepsilon P$ $x \varepsilon Q$. Und wegen $Q \lesssim P$ ist dies mit $x \varepsilon Q$ gleichbedeutend.

Folglich ist $Q \sim \mathscr{A}bs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma\right)$; auf der rechten Seite steht offenbar ein Bereich, und wegen $Q\,OZ$ auch auf der linken. Also ist $Q = \mathscr{A}bs\left(Q; P, \left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right)\Sigma\right)$, wie behauptet wurde. —

[23]) Man sieht leicht ein, daß der Satz 46 auch so formuliert werden kann: Die Ordnungszahlen sind mit den Abschnitten des nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ geordneten Ω^{**} identisch. Diese Formulierung würde, unter Heranziehung des Satzes 31, einen anderen einfachen Beweis unserer Behauptung ermöglichen.

Die Bedingungen des Satzes 46 lassen sich übrigens offenbar auch so formulieren: P ist ein Bereich, und es ist $P \lesssim \Omega^{**} \cdot \mathfrak{P}(P)$.[24]

Der Satz 46 hat eine Konsequenz, die der Burali-Fortischen Antinomie[25] der „naiven" Mengenlehre entspricht. Oder um es etwas anders auszudrücken: der nun folgende Satz ist nichts anderes als die unschädlich gemachte Burali-Fortische Antinomie.

Satz 47. *Es gibt eine und nur eine Ordnungszahl, die keine Menge ist, und diese ist Ω^{**}.*

Beweis. Ω^{**} ist eine Ordnungszahl, denn es erfüllt die Bedingungen 1 und 2 des Satzes 46: Es ist ein Bereich, es ist $\Omega^{**} \lesssim \Omega^{**}$ (d. h. 1. ist erfüllt); und aus $P \varepsilon \Omega^{**}$ folgt $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, also $P \lesssim \Omega^{**}$ (d. h. 2. ist erfüllt). Hieraus folgt aber, daß Ω^{**} keine Menge sein kann: denn dann wäre $\Omega^{**}\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, Ω^{**} eine Menge, also $\Omega^{**} \varepsilon\, \Omega^{**}$, was wegen $\Omega^{**}\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ $\Omega^{**} < \Omega^{**}$ zur Folge hätte. Und dies ist unmöglich.

Jede von Ω^{**} verschiedene Ordnungszahl ist aber eine Menge. Denn aus $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, $P \neq \Omega^{**}$ folgt $P \lesssim \Omega^{**}$, $P \neq \Omega^{**}$, also $P < \Omega^{**}$, und wegen $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, $\Omega^{**}\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ muß dann P eine Menge sein (siehe die Bemerkung am Schlusse des § 5). —

Der Satz 46 würde uns schon hier ermöglichen, gewisse allgemeine Operationen zur Herstellung von Ordnungszahlen anzugeben; wir verschieben aber dies bis in die Kapitel VIII und IX: denn bei den Anwendungen, die wir in den folgenden Kapiteln VI und VII von den Ordnungszahlen machen werden, kommt es nur auf die bereits entwickelten Eigenschaften derselben an.

VI. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen. Der Wohlordnungssatz.

1. Ähnlichkeit und Ordnungszahlen.

Wir unterbrechen an diesem Orte die weitere Untersuchung der Ordnungszahlen, um uns der wichtigsten Anwendung derselben, der Theorie der Wohlordnungen, zuzuwenden. Die Untersuchung der Ordnungszahlen werden wir in den Kapiteln VII (§ 2), VIII (§ 3, 4) und IX wieder aufnehmen.

---

[24]) Die hier angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Ordnungszahlen können nicht als gleichwertige Definitionen derselben angesehen werden, da in sie der Begriff Ω^{**} eingeht, der seinerseits durch die Ordnungszahlen definiert wird. Hingegen ist die Charakterisierung durch Satz 42 eine gleichwertige Definition derselben, sie setzt übrigens ebenso wie die ursprüngliche Definition im § 1 den Begriff der Wohlordnung voraus. Es sei hier erwähnt, daß auch eine einfache direkte Definition unseres Ordnungszahlenbegriffes, unabhängig von der Wohlordnung, möglich ist.

[25]) Die Antinomien der Mengenlehre behandelt z. B. H. Poincaré: Wissenschaft und Methode; übersetzt von H. und L. Lindemann, Leipzig und Berlin 1914.

Wir beginnen mit dem Satze, der die Grundlage der Beschreibung der Ähnlichkeitsverhältnisse durch Ordnungszahlen ist.

Satz 48a. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathfrak{W}\mathfrak{O}\,H$, $J'\,\mathfrak{W}\mathfrak{O}\,H'$. Wenn $H, J \approx H', J'$, so ist $\boldsymbol{Z}\,H, J$ mit $\boldsymbol{Z}\,H', J'$ gleichbedeutend.*

Satz 48b. *Wenn $\boldsymbol{Z}\,H, J$ und $\boldsymbol{Z}\,H', J'$ ist, so ist $H, J \approx H', J'$ mit $\boldsymbol{OZ}(H, J) = \boldsymbol{OZ}(H', J')$ gleichbedeutend.*

Beweis. (Für 48a.) Wegen der Symmetrie der Ähnlichkeit genügt es, zu zeigen, daß aus $\boldsymbol{Z}\,H, J$ $\boldsymbol{Z}\,H', J'$ folgt.

Es sei also $\boldsymbol{Z}\,H, J$, $H, J \approx H', J' \ldots (f)$. Dann ist für jedes $x \,\varepsilon\, H$ $\mathcal{A}bs\,(x; H, J)$ eine Menge. Also ist auch

$$\mathcal{A}bs\,([f, x]; H', J') = \mathcal{A}bs\,([f, x]; |[f, H]|, [f]\,J) = |[f, \mathcal{A}bs\,(x; H, J)]|$$

eine Menge. Da nun jedes $x' \,\varepsilon\, H'$ wegen $H' = |[f, H]|$ einem $[f, x]$, $x \,\varepsilon\, H$ gleich ist, sind alle $\mathcal{A}bs\,(x'; H', J')$ Mengen, d. h. es ist $\boldsymbol{Z}\,H, J$. (Dieser Beweis erfolgt auf Grund des Satzes 41. Wir hätten die Behauptung auch ohne die Benutzung dieses Satzes beweisen können, allerdings etwas umständlicher. Es käme dazu dieselbe Methode in Frage, mit der wir weiter unten beim Beweise des Satzes 48b zeigen werden, daß aus $H, J \approx H'\,J'$ $\boldsymbol{OZ}(H, J) = \boldsymbol{OZ}(H', J')$ folgt.)

(Für 48b.) Daß aus $\boldsymbol{OZ}(H, J) = \boldsymbol{OZ}(H', J')$ $H, J \approx H', J'$ folgt, ist klar: es ist hier

$$H, J \approx \boldsymbol{OZ}(H, J), \left(\frac{\boldsymbol{OZ}(H, J)}{\Omega^*}\right)\Sigma, \quad H', J' \approx \boldsymbol{OZ}(H', J'), \left(\frac{\boldsymbol{OZ}(H', J')}{\Omega^*}\right)\Sigma.$$

Wir müssen nur noch die Umkehrung beweisen.

Es sei also $H, J \approx H', J' \ldots (f)$. Wir bringen dann $[\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]]$ auf die Form $[g, x]$ und setzen $h = \left(\frac{g \mid 0}{H}\right)$. Dann ist für alle x, die nicht zu H gehören

$$[h, x] = [0, x] = A,$$

und für alle x, die zu H gehören,

$$[h, x] = [g, x] = [\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]].$$

Wir werden nun zeigen, daß h eine Zählung des nach J' geordneten H ist.

Wenn nicht $x \,\varepsilon\, H$ ist, so ist in der Tat $[h, x] = A$. Wenn hingegen $x \,\varepsilon\, H$ ist, so ist:

$$\begin{aligned} |[h, \mathcal{A}bs\,(x; H, J)]| &= |[\boldsymbol{Z}(H', J'), |[f, \mathcal{A}bs\,(x; H, J)]|]| \\ &= |[\boldsymbol{Z}(H', J'), \mathcal{A}bs\,([f, x]; |[f, H]|, [f]\,J)]| \\ &= |[\boldsymbol{Z}(H', J'), \mathcal{A}bs\,([f, x]; H', J')]| = [\boldsymbol{Z}(H', J'), [f, x]] = [h, x]. \end{aligned}$$

Also ist in der Tat $h\,\boldsymbol{Z}\,H, J$. Und hieraus folgt:

$$\boldsymbol{OZ}(H,J) = |[\boldsymbol{Z}(H,J), H]| = |[h, H]|$$
$$= |[\boldsymbol{Z}(H',J'), |[f,H]|]| = |[\boldsymbol{Z}(H',J'), H']| = \boldsymbol{OZ}(H',J'),$$

wie behauptet wurde[26]). —

Ein weiterer Satz über die Ähnlichkeit und Ordnungszahlen ist der folgende:

Satz 49. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$, $J'\,\mathcal{WO}\,H'$, und $\boldsymbol{Z}\,H, J$, $\boldsymbol{Z}\,H', J'$. Es gibt dann und nur dann ein $x \varepsilon H'$, so daß*

$$H, J \approx \mathcal{A}bs(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{A}bs(x; H', J')}{H'}\right) J'$$

ist, wenn $\boldsymbol{OZ}(H,J) < \boldsymbol{OZ}(H',J')$ ist.

Beweis. $\boldsymbol{OZ}(H,J) < \boldsymbol{OZ}(H',J')$ ist, wie wir wissen, mit $\boldsymbol{OZ}(H,J)\,\varepsilon\,\boldsymbol{OZ}(H',J')$ gleichbedeutend. Wegen

$$\boldsymbol{OZ}(H',J') = |[\boldsymbol{Z}(H',J'), H']|$$

bedeutet dies, daß $\boldsymbol{OZ}(H,J) = [\boldsymbol{Z}(H,J), x]$, $x \varepsilon H$ ist. Nun ist in diesem Falle

$$\boldsymbol{OZ}(H,J) = [\boldsymbol{Z}(H',J'), x] = \boldsymbol{OZ}\left(\mathcal{A}bs(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{A}bs(x; H', J')}{H'}\right) J'\right).$$

Und dies ist nach Satz 48b in der Tat mit

$$H, J \approx \mathcal{A}bs(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{A}bs(x; H', J')}{H'}\right) J'$$

gleichbedeutend.

Schließlich beweisen wir noch:

Satz 50. *H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$, $\boldsymbol{Z}\,H, J$ und $H' \lesssim H$. Dann ist auch $\boldsymbol{Z}\,H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$ und es ist*

$$\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \boldsymbol{OZ}(H, J).$$

Beweis. Wegen $\boldsymbol{Z}\,H, J$ sind alle $\mathcal{A}bs(x; H, J)$, $x \varepsilon H$ Mengen; aus $H' \lesssim H$ folgt $\mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \mathcal{A}bs(x; H, J)$ (für $x \varepsilon H'$), also sind auch die $\mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$, $x \varepsilon H'$, Mengen. Folglich ist $\boldsymbol{Z}\;H', \left(\frac{H'}{H}\right) J$.

---

[26]) In der „naiven" Mengenlehre ist dieser Satz natürlich trivial, er ist sozusagen definitorisch für den Ordnungszahlenbegriff. Man beachte, daß er sich nicht auf alle wohlgeordnete, sondern bloß auf die zählbaren Mengen bezieht; diesen Umstand werden wir noch in § 2 näher ins Auge fassen.

Wenn nicht $\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) \lesssim \boldsymbol{OZ}(H, J)$ wäre, so müßte nach Satz 44 $\boldsymbol{OZ}\left(H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right) > \boldsymbol{OZ}(H, J)$ sein, nach Satz 49 wäre also

$$H, J \approx \mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{H'}\right) \left(\frac{H'}{H}\right) J,$$

d. h.

$$H, J \approx \mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right), \left(\frac{\mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)}{H}\right) J.$$

Wir bezeichnen $\mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ der Kürze halber mit H^*, dann wird also

$$H, J \approx H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J \ldots (f)$$

sein. Wegen $H^* = \mathcal{A}bs\left(x; H', \left(\frac{H'}{H}\right) J\right)$ ist dabei für alle $y \varepsilon H^*$ $y \dot{<} x \ldots \left(\frac{H'}{H}\right) J$, $y \dot{<} x \ldots (J)$. Es gilt nun zu zeigen, daß dies unmöglich ist. Die Eigenschaft: „$y \varepsilon H$ und $[f, y] \dot{<} y \ldots (J)$“ werde auf die Form $[g, y] \neq A$ gebracht und dann $K = \mathcal{B}(g)$ gesetzt. K ist ein Bereich und seine Elemente sind alle $y \varepsilon H$, für die $[f, y] \dot{<} y \ldots (J)$ ist. Es ist $K \lesssim H$ und $K \neq 0$. Das letztere darum, weil das vorhin Erwähnte $x \varepsilon K$ ist, es ist nämlich: $x \varepsilon H$, $[f, x] \varepsilon H^*$, also $[f, x] \dot{<} x \ldots (J)$.

Wegen $J\, \mathcal{WO}\, H$ hat also das nach $\left(\frac{K}{H}\right) J$ geordnete K ein erstes Element u, d. h. es ist $u \varepsilon K$, und aus $y \varepsilon K$ folgt $u \leqq y \ldots \left(\frac{K}{H}\right) J$, $u \leqq y \ldots (J)$, also aus $y \dot{<} u \ldots (J)$ $y \varepsilon H - K$.

Wegen $u \varepsilon K$ ist $[f, u] \dot{<} u \ldots (J)$, und infolge von $H, J \approx H^*, \left(\frac{H^*}{H}\right) J \ldots (f)$ folgt hieraus $[f, [f, u]] \dot{<} [f, u] \ldots \left(\frac{H^*}{H}\right) J$, $[f, [f, u]] \dot{<} [f, u] \ldots (J)$. Also ist auch $[f, u] \varepsilon K$. Wegen $[f, u] \dot{<} u \ldots (J)$ muß aber $[f, u] \varepsilon H - K$ sein, und das ist ein Widerspruch.

2. Vergleichbarkeit, Eindeutigkeit der Abbildung.

Aus den Sätzen des § 1 können wir sofort die folgende Konsequenz ziehen:

H, J, H', J' seien Bereiche, $J\, \mathcal{WO}\, H$, $J'\, \mathcal{WO}\, H'$. Es sei ferner $\boldsymbol{Z}\, H, J$, $\boldsymbol{Z}\, H', J'$. Da sind unter den untenstehenden Aussagen die bei A. stehenden, die bei B. stehenden und die bei C. stehenden untereinander gleichbedeutend. Diese Aussagen lauten folgendermaßen:

A. Es ist $H, J \approx H', J'$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) = \boldsymbol{OZ}(H', J')$.

B. Es ist $H, J \approx \mathcal{A}bs\,(x; H', J'), \left(\frac{\mathcal{A}bs\,(x;\, H',\, J')}{H}\right) J'$ für ein $x \varepsilon H$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) < \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J)\, \varepsilon\, \boldsymbol{OZ}(H', J')$.

C. Es ist $H', J' \approx \mathcal{A}bs\,(x; H, J), \left(\frac{\mathcal{A}bs\,(x;\, H,\, J)}{H}\right) J'$ für ein $x \varepsilon H$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H, J) > \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Es ist $\boldsymbol{OZ}(H', J')\, \varepsilon\, \boldsymbol{OZ}(H, J)$.

An der zweiten Formulierung eines jeden der drei Fälle sehen wir sofort, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht.

Definition. Im Falle A. ist $H, J \approx H', J'$. In den Fällen B und C schreiben wir $H, J \lessdot H', J'$ bzw. $H, J \gtrdot H', J'$.

Damit haben wir ein höchst wichtiges Resultat der „naiven" Mengenlehre gewonnen: den Satz „von der Vergleichbarkeit aller wohlgeordneten Mengen in bezug auf ihren Ordnungstypus". Es ist aber wesentlich und für unser System charakteristisch, daß dieses Resultat nicht für alle wohlgeordneten Bereiche überhaupt, sondern bloß für die zählbaren unter ihnen gewonnen wurde.

Trotzdem ist die erste Formulierung in jedem der Fälle A, B, C auch für nicht zählbare wohlgeordnete Bereiche sinnvoll, da dort von Ordnungszahlen keine Rede ist. Es scheint uns aber unwahrscheinlich, daß ein Beweis der Vergleichbarkeit (d. h. dessen, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht) unabhängig von den Prämissen $\boldsymbol{Z}\, H, J$, $\boldsymbol{Z}\, H', J'$ gelingen sollte: jedenfalls versagen alle bekannten Methoden an diesem Punkte[27]).

Indessen ist diese Lücke praktisch belanglos: denn alle wohlgeordneten Mengen sind ja nach Satz 41 zählbar und beim „Vergleichen der wohlgeordneten Bereiche in bezug auf ihre Mächtigkeit" fällt die ganze Schwierigkeit fort (vgl. Kap. VII, § 3).

Wir beweisen noch den folgenden Satz:

Satz 51. *H, J, H' seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$ und $\boldsymbol{Z}\, H, J$. Ferner sei $H' \lesssim H$. Dann ist $H', \left(\frac{H'}{H}\right) J \lessapprox H, J$. Wenn $H' = \mathcal{A}bs\,(x; H, J)$, $x \varepsilon H$, ist, so gilt sogar stets das $\lessdot$-Zeichen.*

Beweis. Die zweite Hälfte folgt ohne weiteres aus der Definition, zum Beweise der ersten muß noch der Satz 50 berücksichtigt werden.

---

[27]) Es gibt bekanntlich in der „naiven" Mengenlehre noch eine Methode, um die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Ordnungstypen zu beweisen, die von den Ordnungszahlen keinen Gebrauch macht [G. Cantor, Beitrag zur Begründung der Theorie der transfiniten Mengenlehre II, Math. Annalen **49** (1897), S. 207—215]. Sie kann in unser System übertragen werden, aber interessanterweise nur für solche H, J, für die alle $\mathcal{A}bs\,(x; H, J)$, $x \varepsilon H$, Mengen sind, d. h. für genau diejenigen, die zählbar sind.

Über die Eindeutigkeit der ähnlichen Abbildungen gilt der folgende Satz:

Satz 52. *H, J seien Bereiche, $J\,\mathcal{WO}\,H$ und $\mathbf{Z}\,H, J$. Die Relationen*

$$H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma, \quad P\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$$

bestehen dann und nur dann, wenn

$$P = \mathbf{O}\mathbf{Z}(H, J)$$

ist.

Beweis. Daß für dieses $P = \mathbf{O}\mathbf{Z}(H, J)$ die genannte Relation gilt, wissen wir aus Satz 40. Wir müssen also nur noch die Umkehrung beweisen.

Es sei $H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $P\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$. Dann ist $P = \mathbf{O}\mathbf{Z}(H', J')$, $J'\,\mathcal{WO}\,H'$, $\mathbf{Z}\,H', J'$. Wegen $H', J' \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ (Satz 40) ist $H, J \approx H', J'$, also $\mathbf{O}\mathbf{Z}(H, J) = \mathbf{O}\mathbf{Z}(H', J') = P$, wie behauptet wurde.

Satz 53. *Für $P\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$, $Q\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$ ist $P = Q$ mit $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma$ gleichbedeutend.*

Beweis. Nach Satz 52 gilt $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma$ für ein einziges $Q\,\mathbf{O}\,\mathbf{Z}$. Da P selbst ein solches ist, gilt es für $Q = P$ allein.

3. Die Wohlordnung des Bereiches aller I-Dinge.

In diesem und dem nächsten Paragraphen wird der Wohlordnungssatz bewiesen werden, und zwar auf einem Wege, der von der klassischen Methode Zermelos (vgl. Fußnote [12])) wesentlich abweicht. Man darf natürlich nicht etwa glauben, daß damit ein im Sinne der „naiven“ Mengenlehre neuer, vom „Auswahlprinzip“ (das wir nun auch zu beweisen in der Lage sind) unabhängiger Beweis des Wohlordnungssatzes gewonnen ist. Diese Methode ist nämlich nur in unserem System gangbar und beruht im wesentlichen auf dem Axiom IV. 2.

Satz 54. *Es gibt einen Bereich W, so daß $W\,\mathcal{WO}\,\Omega$ ist; es gilt sogar: $\Omega, W \approx \Omega^{**}, \left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$. (Also ist $\mathbf{Z}\,\Omega, W$.)*

Beweis. Nach Satz 47 ist der Bereich Ω^{**} ein Bereich, aber keine Menge, also ein II-Ding, aber kein I II-Ding. Nach IV. 2. gibt es also ein II-Ding f, so daß für jedes x ein y mit $y \,\varepsilon\, \Omega^{**}$, $[f, y] = x$ existiert.

Wir können diese Eigenschaft: „$y \,\varepsilon\, \Omega^{**}$ und $x = [f, y]$“ auf die Form $[g, y] \neq A$ bringen (g von x abhängig, aber von y unabhängig) und dann $H = \mathcal{B}(g)$ setzen. Dann ist H ein Bereich, dessen Elemente alle $y \,\varepsilon\, \Omega^{**}$ mit $[f, y] = x$ sind. Also ist $H \lesssim \Omega^{**}$, und da es ein y mit den genannten Eigenschaften gibt, so ist $H \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma\, \mathcal{WO}\, \Omega^{**}$ hat also das nach $\left(\frac{H}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete H, d. h. das nach $\left(\frac{H}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete H, ein erstes Element u. Es ist $u \varepsilon H$, d. h. $u \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, u] = x$; und aus $y \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, y] = x$, d. h. $y \varepsilon H$, folgt $u \dot{\leqq} y \ldots \left(\frac{H}{\Omega^*}\right)\Sigma$, $u \leqq y \ldots (\Sigma)$, $u \lesssim y$.

Also: es gibt ein u, welches die Eigenschaft: „$u \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, u] = x$, und für jedes y folgt aus $y \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, y] = x$, daß $u \lesssim y$ ist," besitzt, es ist aber klar, daß auch nur ein u diese Eigenschaft besitzen kann. (Wären u' und u'' so, so müßte $u' \lesssim u''$, $u'' \lesssim u'$ sein, also wäre $u' \sim u''$, $u' = u''$.) Wir können nun diese Eigenschaft unschwer auf die Form $[h, \langle x, u\rangle] \neq A$ bringen (h unabhängig von x und u) und III. 3. anwenden: dann ist dieses einzige u gleich $[j, x]$ (j unabhängig von x).

Das so gewonnene II-Ding j hat die folgenden Eigenschaften: es ist für jedes I-Ding x $[j, x] \varepsilon \Omega^{**}$, $[f, [j, x]] = x$. Wenn wir also $\|[j, \Omega]\| = \mathcal{H}$ setzen, so ist $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $\|[f, \mathcal{H}]\| = \Omega$. Ferner folgt aus $u \varepsilon \mathcal{H}$, $v \varepsilon \mathcal{H}$, $u \neq v$ $[f, u] \neq [f, v]$, denn es ist $u = [j, x]$, $v = [j, y]$, also $[f, u] = [f, [j, x]] = x$, $[f, v] = [f, [j, y]] = y$. D. h. $u = [j, [f, u]]$, $v = [j, [f, v]]$. Wegen $u \neq v$ ist also $[f, u] \neq [f, v]$.

Wir können also $W = [f]\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ setzen, dann ist $\mathcal{H}, \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx \Omega, W$. Nun ist das nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete Ω^{**} wohlgeordnet und zählbar, nach Satz 29 und Satz 50 gilt also wegen $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$ dasselbe für das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^{**}}\right)\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$, d. h. das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$. Und $\mathcal{H}, \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx \Omega, W$ hat nach Satz 29 und Satz 48 a zur Folge, daß auch das nach W geordnete Ω wohlgeordnet und zählbar ist.

Wir können also $\boldsymbol{OZ}(\Omega, W) = P$ bilden. Da $\Omega, W \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ ist, und Ω keine Menge ist, ist auch P keine Menge. Und da $P\,\boldsymbol{OZ}$ ist und dabei P keine Menge ist, so muß nach Satz 47 $P = \Omega^{**}$ sein. Damit ist die Behauptung restlos bewiesen.

4. Die Wohlordnung beliebiger Bereiche.

Der Satz 54 ist eigentlich schon der Wohlordnungssatz, wir wollen ihn aber noch der Form nach etwas allgemeiner gewinnen. Auch das „Auswahlprinzip" werden wir leicht aus diesem Satze herleiten können.

Satz 55. *H sei ein Bereich. Es gibt dann stets einen Bereich J, so daß $J\,\mathcal{WO}\,H$, $Z\,H$, J ist.*

Wenn H *keine Menge ist, so ist für* $J\mathfrak{WO}H$, $\mathbf{Z}H, J$ *stets* $\mathbf{OZ}(H, J) = \Omega^{**}$. *Wenn* H *eine Menge ist, so ist für* $J\mathfrak{WO}H$ *stets* $\mathbf{Z}H, J$ *und* $\mathbf{OZ}(H, J) < \Omega^{**}$.

Beweis. Wir wählen W nach Satz 54, so daß $\Omega, W \approx \Omega^{**}, \left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$, und setzen $J = \left(\frac{H}{\Omega}\right)W$. Da $W\mathfrak{O}\mathfrak{W}\Omega$, $\mathbf{Z}\Omega, W$ ist, so ist nach Satz 29 und Satz 50 auch $J\mathfrak{WO}H$, $\mathbf{Z}H, J$.

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Wenn H keine Menge ist, so ist für $J\mathfrak{WO}H$, $\mathbf{Z}H, J$ wegen $H, J \approx \mathbf{OZ}(H, J), \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ auch $\mathbf{OZ}(H, J)$ keine Menge. Also muß $\mathbf{OZ}(H, J) = \Omega^{**}$ sein.

Ist hingegen H eine Menge, so ist für jedes $J\mathfrak{WO}H$ auch $\mathbf{Z}H, J$ (vgl. die Bemerkung bei Satz 41). Wegen $H, J \approx \mathbf{OZ}(H, J), \left(\frac{\mathbf{OZ}(H, J)}{\Omega^{*}}\right)\Sigma$ ist auch $\mathbf{OZ}(H, J)$ eine Menge; folglich ist $\mathbf{OZ}(H, J)\,\varepsilon\,\Omega^{**}$, $\mathbf{OZ}(H, J) < \Omega^{**}$.

Man sieht übrigens leicht ein, daß es für solche H, die keine Mengen sind, stets Wohlordnungen J gibt, für die nicht $\mathbf{Z}H, J$ ist (hierzu reicht ja nach Satz 41 die Existenz eines $\mathfrak{Abs}(x; H, J)$, $x\,\varepsilon\,H$, das nicht Menge ist, aus), wir gehen aber darauf hier nicht näher ein.

Nun werden wir zwei verschiedene Fassungen des Auswahlprinzips beweisen, deren erste mit dem Begriff des Hilbertschen „τ" eine gewisse Analogie zeigt[28]), während die zweite sich mehr an die ursprünglich Zermelosche Fassung desselben anlehnt.

Satz 56. *φ sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding ψ, derart, daß für jedes x, zu dem ein y mit $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ existiert, $[\psi, x]$ einem solchen y gleich ist*[29]).

Beweis. Wir wählen W nach Satz 54: $W\mathfrak{WO}\Omega$. Betrachten wir ein x, zu welchem es ein y gibt, so daß $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ ist. Wir bringen $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ auf die Form $[f, y] \neq A$ (f von x abhängig, von y unabhängig) und setzen $H = \mathfrak{B}(f)$. H ist ein Bereich, seine Elemente sind

---

[28]) Hilbert, Neubegründung der Mathematik I., Abhandlungen a. d. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität 1, 1922. Ferner: Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen 92 (1924).

[29]) Satz 57 kann als eine Verschärfung des Axioms III. 3. angesehen werden: es ermöglicht die Umkehrung von Relationen, die nur lösbar, aber nicht eindeutig lösbar sind. In unserer Axiomatik wäre die einfachste direkte Einführung des Auswahlprinzips die gewesen, statt III. 3. den Satz 56 zu verlangen. Damit wäre eine weitgehende Analogie mit Hilberts Formulierung des Auswahlprinzips erreicht. (Vgl. Fußnote [28]).) Da jedoch das Auswahlprinzip aus IV. 2. allein folgt, war dies überflüssig.

alle y mit $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$. Also ist $H \lesssim \Omega$, $H \neq 0$. Wegen $W\,\mathcal{WO}\,H$ hat also das nach $\left(\frac{H}{\Omega}\right) W$ geordnete H ein erstes Element. Dasselbe sei u.

u besitzt die folgende Eigenschaft: „$[\varphi, \langle x, u\rangle] \neq A$, und für jedes y folgt aus $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ $\quad u \dot{\leqq} y \ldots (W)$." Es ist außerdem klar, daß u allein diese Eigenschaft besitzt. (Besäßen u' und u'' dieselbe, so müßte $u' \dot{\leqq} u'' \ldots (W)$, $u'' \dot{\leqq} u' \ldots (W)$, also $u' = u''$ sein.)

Wir bringen diese Eigenschaft auf die Form $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$ (g von x, u unabhängig), dann haben wir das folgende Resultat erhalten: Wenn es ein y mit $[\varphi, \langle x, y\rangle] \neq A$ gibt, so gibt es ein und nur ein u mit $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$, und für dieses u ist auch $[\varphi, \langle x, u\rangle] \neq A$. Auf $[g, \langle x, u\rangle] \neq A$ können wir also III. 3. anwenden, und damit haben wir das gewünschte $[\psi, x]$ hergestellt.

Satz 57. *Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen $H \neq 0$ $[\varphi, H] \varepsilon H$ ist.*

Beweis. Wir bringen $x \varepsilon H$, d. h. $[H, x] \neq A$, auf die Form $[f, \langle H, x\rangle] \neq A$, und wenden dann den Satz 56 an; daraus folgt die Behauptung.

Nach Satz 55 ist für jede Menge $\mathcal{WO}(H) \neq 0$. Wegen $\mathcal{UO}(H) \gtrsim \mathcal{VO}(H) \gtrsim \mathcal{WO}(H)$ ist also auch $\mathcal{VO}(H) \neq 0$, $\mathcal{UO}(H) \neq 0$. ($\mathcal{UO}(H) \neq 0$, und nur dieses, ist übrigens trivial, denn es ist offenbar für jedes H $0\,\mathcal{UO}\,H$, also $0 \varepsilon \mathcal{UO}(H)$.)

VII. Die Äquivalenz und die Kardinalzahlen.

1. Die Äquivalenz.

Wir definieren die Äquivalenz auf die in der „naiven" Mengenlehre übliche Art:

Definition. H, H' seien zwei Bereiche. Wir sagen: H ist mit H' äquivalent, in Zeichen: $H \approx H'$, wenn es ein II-Ding φ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ folgt $[\varphi, u] \neq [\varphi, v]$. Es ist $H' = |[\varphi, H]|$. Diese Eigenschaft von φ drücken wir so aus: $H \approx H' \ldots (\varphi)$. [30])

Wir stellen zunächst fest:

Satz 58a. *H, H' seien Bereiche; wenn $H \approx H'$ ist und H eine Menge ist, so ist auch H' eine Menge. Ferner kann ein III-Ding φ immer so gewählt werden, daß $H \approx H' \ldots (\varphi)$ ist.*

---

[30]) Diese Definition der Äquivalenz ist wesentlich einfacher als die bei Zermelo, wo die Äquivalenz zuerst für elementfremde Mengen definiert wird, und erst dann allgemein.

Satz 58b. *Es gibt ein II-Ding ψ, so daß für alle Mengen H, H' die Relationen $H \approxeq H'$ und $[\psi, \langle H, H' \rangle] \mp A$ gleichbedeutend sind.*

Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle Mengen H, H' und I II-Dinge φ die Relationen $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ und $[\chi, \langle\langle H, H' \rangle, \varphi\rangle] \mp A$ gleichbedeutend sind.

Beweis. (Für 58a.) H ist eine Menge, weil es gleich $|[\varphi, H]|$ ist. Wenn $H' \approxeq H \ldots (\varphi)$ ist, so ist, wie man sofort sieht, auch $H' \approxeq H \ldots \left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$, und wegen $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right) \lesssim H$ ist $\left(\frac{\varphi \mid 0}{H}\right)$ in der Tat ein I II-Ding.

(Für 58b.) Um den zweiten Teil zu beweisen, müssen wir die für $H' \approxeq H \ldots (\varphi)$ definitorischen Bedingungen auf die Form $[\chi, \langle\langle H, H' \rangle, \varphi\rangle] \mp A$ bringen; es ist klar, wie das zu geschehen hat.

Der erste Teil aber folgt hieraus mit Hilfe der folgenden Bemerkung: $H \approxeq H'$ bedeutet, daß es ein II-Ding φ mit $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ gibt, also nach Satz 58a, daß es ein I II-Ding φ mit $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$, d. h. $[\chi, \langle\langle H, H' \rangle, \varphi\rangle] \mp A$ gibt. Und dies ist unschwer auf die Form $[\psi, \langle H, H' \rangle] \mp A$ zu bringen.

Satz 59. *H, H', H'' seien Bereiche, dann bestehen die folgenden Relationen: Es ist $H \approxeq H$. Aus $H \approxeq H'$ folgt $H' \approxeq H$. Aus $H \approxeq H'$ und $H' \approxeq H''$ folgt $H \approxeq H''$.*

Beweis. Die erforderlichen φ sind hier ganz analog zu wählen wie beim Beweise des entsprechenden Satzes 22 für die Ähnlichkeit. Ein näheres Eingehen hierauf erübrigt sich.

Weitere elementare Sätze über die Äquivalenz sind die folgenden:

Satz 60. *H, H' seien Bereiche, φ ein II-Ding, ferner seien K, K' Bereiche, $K \lesssim H$, $K' \lesssim H'$, und $K' = |[\varphi, K]|$. Wenn $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$ ist, so ist auch $K \approxeq K' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition der Äquivalenz.

Satz 61. *H, J, H', J' seien Bereiche, $J \mathfrak{UO} H$, $J' \mathfrak{UO} H'$. Wenn $H, J \approx H', J'$ ist, so ist auch $H \approxeq H'$; ist insbesondere $H, J \approx H', J' \ldots (\varphi)$, so ist auch $H \approxeq H' \ldots (\varphi)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen der Ähnlichkeit und der Äquivalenz.

Ebenso wie bei der Ähnlichkeit (vgl, die Fälle A, B, C im Kap. VI § 2) liegt auch bei der Äquivalenz die Frage nach der Vergleichbarkeit nahe. Um dieselbe zu erledigen, wollen wir zuerst den Begriff der Kardinalzahlen (bzw. Anfangszahlen, Alephs, Mächtigkeiten) einführen.

2. Die Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, ist es wohl in diesem Paragraph erwünscht, eine Bemerkung über die anzuwendende Terminologie vorauszuschicken.

In der „naiven“ Cantorschen Mengenlehre wird zuerst der Begriff der „Mächtigkeit“ definiert als das einer Klasse untereinander äquivalenter Mengen gemeinsame Merkmal; sodann der Begriff des „Alephs“ oder der „Kardinalzahl“ als Mächtigkeit einer wohlordenbaren Menge; und schließlich der der „Anfangszahl“ als die kleinste einem gegebenen Aleph äquivalente Ordnungszahl.

Da in unserem Systeme der Wohlordnungssatz bewiesen ist (Satz 55), so fallen die Begriffe „Mächtigkeit“ und „Aleph“ bzw. „Kardinalzahl“ jedenfalls zusammen (wenn sie einmal irgendwie definiert sind), und die unter diesen Begriff fallenden Dinge sind den „Anfangszahlen“ eineindeutig zugeordnet. In Anbetracht dieser Lage werden wir bei der Definition der genannten Begriffe noch um einen Schritt weitergehen und alle vier kurzweg identifizieren. Wir definieren nämlich:

Definition. Wir nennen eine Ordnungszahl P eine Kardinalzahl (oder: Anfangszahl, Aleph, Mächtigkeit), in Zeichen: $P\boldsymbol{KZ}$, wenn für kein $Q\boldsymbol{OZ}$, $Q < P$, $Q \approx P$ ist.

Satz 62a. *Ω^{**} ist eine Kardinalzahl.*

Satz 62b. *Es gibt einen und nur einen Bereich $\mathfrak{H}$, für den $P \varepsilon \mathfrak{H}$ mit $P\boldsymbol{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$ gleichbedeutend ist. Dieses $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit Γ.*

Beweis. (Für 62a.) Es ist $\Omega^{**}\boldsymbol{OZ}$. Wenn $P\boldsymbol{OZ}$, $P < \Omega^{**}$ ist, so ist P eine Menge, während Ω^{**} keine Menge ist, folglich kann nicht $P \approx \Omega^{**}$ sein. Also ist $\Omega^{**}\boldsymbol{KZ}$.

(Für 62b.) Wenn $P\boldsymbol{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$ ist, so ist $P\boldsymbol{OZ}$ und P eine Menge, also $P \varepsilon \Omega^{**}$. $Q\boldsymbol{OZ}$, $Q < P$ bedeutet $Q \varepsilon P$. Folglich bedeutet $P\boldsymbol{KZ}$, $P \neq \Omega^{**}$: „$P \varepsilon \Omega^{**}$, und es gibt kein Q mit $Q \varepsilon P$, $Q \approx P$“. Diese Bedingung können wir unschwer auf die Form $[f, P] \neq A$ bringen; $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(f)$ ist dann ein Bereich mit den gewünschten Eigenschaften.

Daß es nur einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.

Satz 63. *Wenn $P\boldsymbol{KZ}$, $Q\boldsymbol{KZ}$ ist, so ist $P = Q$ mit $P \approx Q$ gleichbedeutend.*

Beweis. Aus $P = Q$ folgt offenbar $P \approx Q$. Ist umgekehrt $P \approx Q$, so ist jedenfalls $P = Q$ oder $P < Q$ oder $P > Q$. Für $P < Q$ wäre: $P\boldsymbol{OZ}$, $P < Q$ und $P \approx Q$, entgegen $Q\boldsymbol{KZ}$; für $P > Q$ hingegen: $Q\boldsymbol{OZ}$, $Q < P$ und $Q \approx P$, entgegen $P\boldsymbol{KZ}$. Also ist $P = Q$.

Satz 64a. *H sei ein Bereich. Es gibt eine und nur eine Kardinal-*

zahl P, für die $P \approxeq H$ ist. Dieses P nennen wir die Kardinalzahl (oder Mächtigkeit oder Aleph oder Anfangszahl) von H, und bezeichnen es mit $\boldsymbol{KZ}(H)$.

Satz 64b. *H ist dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ ist.*

Satz 64c. *Es gibt ein II-Ding φ, so daß für alle Mengen H*

$$\boldsymbol{KZ}(H) = [\varphi, H]$$

ist.

Beweis. (Für 64a.) Die Eindeutigkeit folgt offenbar aus Satz 63. Wir müssen also nur noch die Existenz beweisen.

Nach Satz 55 gibt es ein J, so daß $J \mathcal{WO} H$, $\boldsymbol{Z} H, J$ ist. Wenn $P = \boldsymbol{OZ}(H, J)$ ist, so ist demnach $H, J \approx P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$, also $H \approxeq P$. Wenn $P = \Omega^{**}$ ist, so sind wir schon fertig: denn nach Satz 62a ist ja $\Omega^{**} \boldsymbol{KZ}$.

Andernfalls sei $P \neq \Omega^{**}$. Dann ist P, also auch H eine Menge. Die Eigenschaft: „$P \varepsilon \Omega^{**}$ und $P \approxeq H$“ können wir leicht auf die Form $[f, P] \neq A$ (f abhängig von H, aber unabhängig von P) bringen, und dann $\mathcal{H} = \mathcal{B}(f)$ setzen. $\mathcal{H}$ ist ein Bereich, seine Elemente sind alle P mit $P \varepsilon \Omega^{**}$, $P \approxeq H$. Es ist offenbar $\mathcal{H} \lesssim \Omega^{**}$, und nach dem soeben Gesagten ist ferner $\mathcal{H} \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma \mathcal{WO}\, \Omega^{**}$ hat also das nach $\left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete $\mathcal{H}$ ein erstes Element, d. h. es gibt ein $P \varepsilon \Omega^{**}$ mit $P \approxeq H$, derart, daß für jedes $Q \varepsilon \Omega^{**}$ mit $Q \approxeq H$

$$P \dot{\leqq} Q \ldots \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma,$$

also

$$P \dot{\leqq} Q \ldots (\Sigma), \quad P \lesssim Q$$

ist.

Es ist $P \boldsymbol{OZ}$ und $P \approxeq H$. Wenn $Q \boldsymbol{OZ}$, $Q < P$ und $Q \approxeq P$ wäre, so wäre jedenfalls $Q \varepsilon \Omega^{**}$ und $Q \approxeq P$, $P \approxeq H$, also $Q \approxeq H$, d. h. $Q \varepsilon \mathcal{H}$. Also müßte $P \lesssim Q$, $Q \gtrsim P$ sein, entgegen $Q < P$. Damit ist $P \boldsymbol{KZ}$ bewiesen und folglich auch unsere Behauptung.

(Für 64b.) Wegen $H \approxeq \boldsymbol{KZ}(H)$ ist H dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H)$ keine ist. Dies ist aber offenbar mit $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ gleichbedeutend.

(Für 64c.) $\boldsymbol{KZ}(H) = P$ hat die folgende charakteristische Eigenschaft: „$P \boldsymbol{KZ}$ und $P \approxeq H$“. Wir können dies ohne weiteres in $[g, \langle H, P \rangle] \neq A$ (g von H und P unabhängig) umformen, und dann III. 3. anwenden: es wird dann $P = [\varphi, H]$.

Nach diesen Sätzen allgemeiner Natur beweisen wir noch zwei Sätze, die den Verlauf der Reihe der Kardinalzahlen (d. h. den Bereich Γ) etwas näher umschreiben.

Satz 65. *Γ ist keine Menge*[31]).

Beweis. Es sei $P \varepsilon \Omega^{**}$, sonst aber P beliebig. Da P eine Menge ist, ist auch $Q = \boldsymbol{KZ}(P)$ eine Menge, also $Q \varepsilon \Gamma$. Dabei ist $P \approx Q$, d. h. $P \approx Q \ldots (f)$. Wenn wir also $J = [f] \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$ setzen, so wird $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \approx Q, J$, also nach Satz 51 $P = \boldsymbol{OZ}(Q, J)$. Wegen $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma \, \mathcal{WO} \, P$ ist dabei $J \, \mathcal{WO} \, Q$, d. h. $J \varepsilon \mathcal{WO}(Q)$.

Wir haben also bewiesen: Zu jedem $P \varepsilon \Omega^{**}$ gibt es ein $Q \varepsilon \Gamma$ und ein $J \varepsilon \mathcal{WO}(\Gamma)$, so daß $P = \boldsymbol{OZ}(Q, J)$ ist.

Nun ist $\mathcal{WO}(Q)$ eine Menge und gleich $[f, Q]$ (f fest), also ist $J \varepsilon \mathcal{WO}(Q)$, $\mathcal{WO}(Q) \varepsilon \|[f, \Gamma]\|$, das heißt $J \varepsilon \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)$. Folglich ist $\langle Q, J \rangle \varepsilon \|\langle \Gamma, \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)\rangle\|$. Ferner ist $\boldsymbol{OZ}(Q, J) = [g, \langle Q, J \rangle]$ (g fest), so daß $P \varepsilon \|[g, \|\langle \Gamma, \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)\rangle\|]\|$ ist.

Dies gilt für jedes P von Ω^{**}, also ist $\Omega^{**} \lesssim \|[g, \|\langle \Gamma, \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)\rangle\|]\|$. Wäre nun Γ eine Menge, so wären auch $\|[f, \Gamma]\|$, $\mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)$, $\|\langle \Gamma, \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)\rangle\|$, $\|[g, \|\langle \Gamma, \mathcal{S}(\|[f, \Gamma]\|)\rangle\|]\|$ Mengen und demnach auch Ω^{**} eine Menge, was sicher falsch ist.

Satz 66. *Das nach $\left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Γ ist wohlgeordnet und zählbar und seine Ordnungszahl ist Ω^{**}.*

Beweis. Das nach $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Ω^{**} ist wohlgeordnet und zählbar, nach Satz 29 und Satz 50 muß wegen $\Gamma \lesssim \Omega^{**}$ also auch das nach $\left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete Γ wohlgeordnet und zählbar sein. Da Γ keine Menge ist, so ist auch $\boldsymbol{OZ}\left(\Gamma, \left(\frac{\Gamma}{\Omega^*}\right) \Sigma\right)$ keine, also muß es gleich Ω^{**} sein.

3. Die Vergleichbarkeit.

Satz 67. *H, H' seien zwei Bereiche. $H \approx H'$ ist mit $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$ gleichbedeutend.*

---

[31]) Wir könnten in diesem Zusammenhange leicht den Satz beweisen, wonach die Kardinalzahl von $\mathfrak{P}(H)$ für jede Menge H größer ist als die von H. Wir sehen davon ab, weil der Satz 65 ausreicht um zu beweisen, daß es unter den Kardinalzahlen von Mengen, d. h. $\neq \Omega^{**}$, keine größte gibt: In der Tat, wenn etwa P die größte Kardinalzahl von Mengen wäre, so wären alle Kardinalzahlen von Mengen $\lesssim P$, also Elemente von $\mathfrak{P}(P)$; folglich wäre $\Gamma \lesssim \mathfrak{P}(P)$, was unmöglich ist, da ja $\mathfrak{P}(P)$ eine Menge ist, Γ aber keine.

Beweis. Wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$, $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ folgt aus $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$ $H \approx H'$.

Aus $H \approx H'$ folgt hingegen $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H$, $H \approx H'$, $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$, d. h. $\boldsymbol{KZ}(H) \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ und nach Satz 63 also $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$.

Satz 68. *H, H' seien zwei Bereiche und φ ein II-Ding. Wenn $H \lesssim |[\varphi, H']|$ ist, so ist $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$.*[32])

Beweis. Wir können die Relation „$y \,\varepsilon\, H', [\varphi, y] = x$" auf die Form $[f, \langle x, y\rangle] \mp A$ (f von x und y unabhängig) bringen. Für jedes $x \,\varepsilon\, H$ existiert (wegen $H \lesssim |[\varphi, H']|$) ein $y \,\varepsilon\, H'$ mit $[f, \langle x, y\rangle] \mp A$, wir können also den Satz 56 anwenden und $[g, x]$ bilden. Wir haben also: aus $x \,\varepsilon\, H$ folgt $[g, x] \,\varepsilon\, H'$ und $[f, [g, x]] = x$.

Aus $u \,\varepsilon\, H$, $v \,\varepsilon\, H$, $u \mp v$ folgt also: $[f, [g, u]] \mp [f, [g, v]]$, $[g, u] \mp [g, v]$. Wenn wir $H^* = |[g, H]|$ setzen, so ist nach alledem $H \approx H^*$ und $H^* \lesssim H'$.

Hieraus folgt erstens $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H^*)$. Es ist also sicher $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$, wenn $\boldsymbol{KZ}(H^* \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$ ist. Wir müssen demnach zeigen: aus $H^* \lesssim H'$ folgt $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$.

Wir setzen $\boldsymbol{KZ}(H') = P$. Da $H' \approx P$, $P \approx H' \ldots (f)$ ist, können wir $J' = [h]\left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma$ setzen. Dann ist $P, \left(\frac{P}{\Omega^*}\right)\Sigma \approx H', J' \ldots (h)$, also $P = \boldsymbol{OZ}(H', J')$. Nach Satz 50 ist also, wenn wir $Q = \boldsymbol{OZ}\left(H^*, \left(\frac{H^*}{H'}\right) J'\right)$ setzen, $Q \lesssim P$.

Ferner ist $H^*, \left(\frac{H^*}{H'}\right) J' \approx Q, \left(\frac{Q}{\Omega^*}\right)\Sigma$, also $H^* \approx Q$, also $Q \approx H^*$, $H^* \approx \boldsymbol{KZ}(H^*)$, d. h. $Q \approx \boldsymbol{KZ}(H^*)$. Wegen $Q\,\boldsymbol{OZ}$, $\boldsymbol{KZ}(H^*)\,\boldsymbol{KZ}$ muß folglich $Q \gtrsim \boldsymbol{KZ}(H^*)$ sein.

Zusammenfassend gilt folglich: $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim Q \lesssim P = \boldsymbol{KZ}(H')$, $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Wir beweisen noch die Umkehrung des Satzes 68.

Satz 69. *H, H' seien zwei Bereiche. Wenn $\boldsymbol{KZ}(H) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$ ist, so gibt es ein II-Ding φ, so daß $H \lesssim |[\varphi, H']|$ ist.*

Beweis. Es ist $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H')$ $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H$; wir wählen also die II-Dinge f, g so, daß $H' \approx \boldsymbol{KZ}(H') \ldots (f)$, $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H \ldots (g)$ gilt.

---

[32]) Im wesentlichen ist es dieser Satz, der (in Verbindung mit dem fast trivialen Satze 67) die Umgehung des Bernsteinschen „Äquivalenzsatzes" ermöglicht. Es kommt dabei im wesentlichen auf die folgende Teilbehauptung desselben an: Wenn $H^* \lesssim H'$ ist, so ist auch $\boldsymbol{KZ}(H^*) \lesssim \boldsymbol{KZ}(H')$. Diese fußt ihrerseits auf dem Satze 50 über Ordnungszahlen. — Unsere, auf den Ordnungszahlenbegriff gegründete, Überlegungsweise schaltet die spezifisch ordnungszahlen-freien Gedankengänge der „naiven" Mengenlehre (beim Beweise der Vergleichbarkeit wohlgeordneter Mengen, des Wohlordnungssatzes, des Äquivalenzsatzes) aus.

Dann ist $\boldsymbol{KZ}(H') = \|[f, H']\|$, $H = \|[g, \boldsymbol{KZ}(H)]\|$ also $H \lesssim \|[f, \|[g, H']\|]\|$. Wenn wir also φ nach $[\varphi, x] = [f, [g, x]]$ wählen, so wird $H \lesssim \|[\varphi, H']\|$, wie gewünscht wurde.

Nun können wir, ebenso wie bei der Ähnlichkeit (Kap. VI, § 2) feststellen, daß zwei beliebige Bereiche in bezug auf ihre Äquivalenz-Eigenschaften nur dreierlei Charakter zeigen können.

H, H' seien zwei Bereiche. Mit Hilfe der Sätze 68 und 69 sieht man sofort, daß unter den untenstehenden Aussagen die bei A stehenden, die bei B stehenden und die bei C stehenden untereinander gleichbedeutend sind[33]).

A. Es gibt ein II-Ding φ mit $H \lesssim \|[\varphi, H']\|$, und es gibt ein II-Ding ψ mit $H' \lesssim \|[\psi, H]\|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(H')$.

B. Es gibt ein II-Ding φ mit $H \lesssim \|[\varphi, H']\|$, und es gibt kein II-Ding ψ mit $H' \lesssim \|[\psi, H]\|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) < \boldsymbol{KZ}(H')$.

C. Es gibt kein II-Ding φ mit $H \lesssim \|[\varphi, H']\|$, und es gibt ein II-Ding ψ mit $H' \lesssim \|[\psi, H]\|$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) > \boldsymbol{KZ}(H')$.

Aus der zweiten Formulierung einer jeden Zeile folgt sofort, daß stets einer und nur einer der drei Fälle A, B, C besteht. (Der a priori denkbare vierte Fall hingegen, bei dem es kein II-Ding φ mit $H \lesssim \|[\varphi, H']\|$ und kein II-Ding ψ mit $H' \lesssim \|[\psi, H]\|$ gibt, tritt also niemals ein. Dies ist eben die „allgemeine Vergleichbarkeit".) Ferner ist der Fall A, nach Satz 67, mit $H \approx H'$ gleichbedeutend.

Definition. Im Falle A ist $H \approx H'$. In den Fällen B und C schreiben wir $H \lll H'$ bzw. $H \ggg H'$.

Wir bemerken noch eines. Da $\Omega^{**}\,\boldsymbol{KZ}$ und $\Omega^{**} \approx \Omega^{**}$ ist, ist $\boldsymbol{KZ}(\Omega^{**}) = \Omega^{**}$. Nach Satz 64b ist ein Bereich H dann und nur dann keine Menge, wenn $\boldsymbol{KZ}(H) = \Omega^{**}$ ist. Dies können wir auch so ausdrücken: $\boldsymbol{KZ}(H) = \boldsymbol{KZ}(\Omega^{**})$, d. h. $H \approx \Omega^{**}$. Nun ist aber Ω keine Menge, so daß $\Omega \approx \Omega^{**}$ sein muß. Also ist $H \approx \Omega^{**}$ mit $H \approx \Omega$ gleichbedeutend, d. h. ein Bereich H ist dann und nur dann keine Menge, wenn $H \approx \Omega$ ist. Wir können dies als eine Verschärfung der Aussage des Axioms IV. 2. ansehen.

---

[33]) Unsere Fallunterscheidung A, B, C (d. h. jeweils die erste Formulierung) ist der sog. „Trichotomie" in der „naiven" Mengenlehre nachgebildet. Immerhin wurde dort in der Regel nicht unsere Relation festgestellt, sondern die ihrer Form nach etwas engeren Relationen $H \approx H^*$, $H^* \lesssim H'$ benützt. Indessen sind beide Relationen miteinander gleichbedeutend (vgl. den ersten Teil des Beweises von Satz 68), die Zurückführung aufeinander gelingt aber bloß mit Hilfe des Auswahlprinzips. (Dies ist wohl eine der frühesten Gelegenheiten gewesen, bei denen die „naive" Mengenlehre das Auswahlprinzip, unbewußt, wesentlich benutzte.)

Da für alle Bereiche $H \lesssim \Omega$ gilt, also $H \lesssim \|[\varphi, \Omega]\|$ (man wähle φ so, daß stets $[\varphi, x] = x$ sei), so besteht zwischen H und Ω stets einer der beiden Fälle A und B, d. h. es ist $H \underset{\approx}{\lll} \Omega$. Da für Nicht-Mengen $H \approx \Omega$ charakteristisch ist, ist für Mengen $H \lll \Omega$ charakteristisch.

VIII. Die Endlichkeit. Die ersten Ordnungszahlen.

1. Die Endlichkeit.

Wir beginnen diesen Paragraphen mit der Definition der endlichen Bereiche. Für die Endlichkeit wurden in der „naiven" Mengenlehre mehrere, der Form nach ziemlich verschiedene Definitionen benützt, die größtenteils den Begriff der Wohlordnung oder der Äquivalenz benützen[34]. Wir werden hier eine Definition anwenden, bei der dies nicht der Fall ist, was ihre Anwendung wesentlich erleichtert.

Definition. H sei ein Bereich. Wir nennen H endlich, in Zeichen: $H\,\mathbf{E}$, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt: es gibt keinen Bereich $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$, $K \neq 0$, für welchen zu jedem $x \,\varepsilon\, K$ ein $y \,\varepsilon\, K$ mit $x < y$ existiert.

Wir nennen H unendlich, in Zeichen: $H\,U$, wenn nicht $H\,\mathbf{E}$ ist.

Es gilt zunächst der folgende Satz:

Satz 70a. *Jeder endliche Bereich H ist eine Menge.*

Satz 70b. *Es gibt einen und nur einen Bereich L, so daß eine Menge H dann und nur dann endlich ist, wenn sie Element von L ist. Dieses L bezeichnen wir mit $\overline{\mathbf{E}}$.*

Beweis. (Für 70a.) H sei ein Bereich, aber keine Menge; wir müssen dann zeigen, daß $H\,U$ ist, d. h. einen Bereich K angeben, der die in der Definition genannten Eigenschaften besitzt.

Ein solches K ist nun $\mathfrak{P}(H)$ selbst. Es ist in der Tat $\mathfrak{P}(H) \lesssim \mathfrak{P}(H)$, $\mathfrak{P}(H) \neq 0$ (das letztere weil z. B. $0 \,\varepsilon\, \mathfrak{P}(H)$ ist). Und wenn $x \,\varepsilon\, \mathfrak{P}(H)$ ist, so ist $x \lesssim H$ und x eine Menge. Da aber H keine Menge ist, ist $x \neq H$, also $x < H$. Wir wählen nun u so, daß $u \,\varepsilon\, H$ ist, aber nicht $u \,\varepsilon\, x$ ist. Dann ist auch $x + \{u\}$ eine Menge und es ist $x + \{u\} \lesssim H$, also ist $x + \{u\} \,\varepsilon\, \mathfrak{P}(H)$. Ferner ist $x < x + \{u\}$. Wir haben also ein $y \,\varepsilon\, \mathfrak{P}(H)$ mit $x < y$ gefunden.

(Für 70b.) $H\,\mathbf{E}$ bedeutet „$H \,\varepsilon\, \Omega^*$ und es gibt kein $K \,\varepsilon\, \mathfrak{P}(H) - \{0\}$, bei dem zu jedem $x \,\varepsilon\, K$ ein $y \,\varepsilon\, K$ mit $x < y$ existiert". Dies ist auf die gewohnte Art ohne weiteres auf die Form $[f, H] \neq A$ zu bringen. Wenn

[34] Eine Zusammenstellung gibt A. Tarsky: Sur les ensembles finis. Fundamenta Mathematicae 6 (1924), S. 45–95.

wir dann $L = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist L ein Bereich und besitzt die gewünschte Eigenschaft. Daß es nur einen solchen Bereich gibt, folgt aus I. 4.

Weiter beweisen wir einen Satz, bei dem das Axiom V. 1. zum ersten (und einzigen) Male benutzt wird. Es ist überhaupt nur um dieses Satzes willen, daß wir das Axiom V. 1 eingeführt haben. (Freilich hängen die Sätze von Kap. VIII, § 4 und teilweise auch zu Kap. IX, § 2 von diesem Satze ab.)

Satz 71. *Es gibt eine unendliche Menge* (*d. h. es ist* $\overline{\mathbf{E}} < \Omega^*$).

Beweis. Wir betrachten das I II-Ding f in V. 1. und wählen g nach IV. 1 (so daß $[g, x] \neq A$ bedeutet, daß x ein I II-Ding ist); und dann setzen wir $h = \left(\frac{f|0}{g}\right)$, $H = \mathfrak{B}(h)$. H ist offenbar ein Bereich, seine Elemente sind alle $x \varepsilon f$, die I II-Dinge sind. Es ist $h \lesssim f$ und f ist ein I II-Ding, also ist es auch h, d. h. H ist eine Menge.

Die in V. 1 formulierten Eigenschaften von f besagen dann für H: es ist $H \neq 0$, und zu jedem $x \varepsilon H$ gibt es ein $y \varepsilon H$, so daß $x < y$ ist.

Jetzt wählen wir j so, daß für alle I II-Dinge x

$$[j, x] = \mathfrak{B}(x)$$

ist. Wir setzen $|[j, H]| = K$. Da H eine Menge ist, ist auch K eine Menge, wegen $H \neq 0$ ist $K \neq 0$.

Wenn $u \varepsilon K$ ist, so ist $u = [j, x] = \mathfrak{B}(x)$, $x \varepsilon H$, also insbesondere $u \sim x$. Da $x \varepsilon H$ ist, gibt es ein $y \varepsilon H$, so daß $x < y$ ist. Für $v = [j, y] = \mathfrak{B}(y)$ ist dann $v \varepsilon K$, $v \sim y$. Da $u \sim x < y \sim v$, also $u < v$ ist, können wir sagen: Zu jedem $u \varepsilon K$ gibt es ein $v \varepsilon K$ mit $u < v$. Dabei ist aber K eine Menge, und alle seine Elemente sind es ebenfalls.

Wir setzen $M = \mathfrak{S}(K)$. Da K eine Menge ist, ist es auch M. Und M ist unendlich, denn es ist $K \lesssim \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(K))$ (weil alle Elemente von K Mengen sind), d. h. $K \lesssim \mathfrak{P}(M)$, und $K \neq 0$; und zu jedem $u \varepsilon K$ gibt es ein $v \varepsilon K$ mit $u < v$.

Damit haben wir eine unendliche Menge angegeben.

Man beachte, daß der Kernpunkt des Beweises der Mengencharakter des unendlichen M ist, nur hierzu mußte das Axiom V. 1. herangezogen werden; die Existenz unendlicher Bereiche hingegen ist trivial: Ω oder Ω^{**} sind keine Mengen, also nach Satz 70 unendlich.

2. Eigenschaften der Endlichkeit.

Satz 72a. *Es ist* $0\,\mathbf{E}$.

Satz 72b. *H sei eine Menge, u ein I-Ding. Aus $H\,\mathbf{E}$ folgt $H + \{u\}\,\mathbf{E}$.*

Beweis. (Für 72a.) Wir müssen zeigen: Zur Menge 0 gibt es kein K mit den in der Definition im § 1 angegebenen Eigenschaften.

Wegen $\mathfrak{P}(0) = \{0\}$ folgt aus $K \lesssim \mathfrak{P}(O)$, $K \neq 0$ offenbar $K = \{0\}$; also ist $x \varepsilon K$ mit $x = 0$ gleichbedeutend. Für $u \varepsilon K$ haben wir also $u = 0$, und es ist für jedes $v \varepsilon K$ $v = 0 = u$, also niemals $u < v$.

(Für 72b.) Nehmen wir an, es wäre $H + \{u\}$ $\mathbf{U}$, d. h. es gäbe einen Bereich K' mit $K' \lesssim \mathfrak{P}(H + \{u\})$, $K' \neq 0$, so daß zu jedem $x' \varepsilon K'$ ein $y' \varepsilon K'$ mit $x' < y'$ existierte. Wir wählen ein II-Ding f so, daß stets $[f, x] = x - \{u\}$ ist, und setzen $K = |[f, K']|$.

Wegen $K' \neq 0$ ist $K \neq 0$. Wenn $x \varepsilon K$ ist, so ist $x = [f, x'] = x' - \{u\}$, $x' \varepsilon K'$. Also ist $x' \varepsilon \mathfrak{P}(H + \{u\})$, $x' \lesssim H + \{u\}$, und $x \lesssim H + \{u\} - \{u\} \lesssim H$, $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$. Folglich ist $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$.

Wenn $x \varepsilon K$ ist, so ist $x = [f, x'] = x' - \{u\}$, $x' \varepsilon K'$. Es gibt ein $y' \varepsilon K'$ mit $x' < y'$ und ein $z' \varepsilon K'$ mit $y' < z'$. Für $y = [f, y'] = y' - \{u\}$ und $z = [f, z'] = z' - \{u\}$ ist dann auch $y \varepsilon K$, $z \varepsilon K$.

Aus $x' < y' < z'$ folgt $x \lesssim y \lesssim z$. Wir behaupten: Es ist $x < z$. Sonst wäre nämlich $x \sim z$, $x \lesssim y \lesssim z \sim x$, also $x = y = z$. Dies bedeutet aber: $x' - \{u\} = z' - \{u\}$, also ist $z' \lesssim z' - \{u\} + \{u\} = x' - \{u\} + \{u\} \lesssim x' + \{u\}$, und weiter $x' < y' < z' \lesssim x' + \{u\}$, $x' < y' < x' + \{u\}$. Dies ist aber offenbar unmöglich.

Also gibt es zu jedem $x \varepsilon K$ ein $z \varepsilon K$ mit $x < z$. Folglich ist auch $H\mathbf{U}$. Wenn also $H\mathbf{E}$ ist, so ist auch $H + \{u\}\mathbf{E}$.

Satz 73. *L sei ein Bereich. Wenn $0 \varepsilon L$ ist und für jede Menge H und für jedes I-Ding u aus $H \varepsilon L$ $H + \{u\} \varepsilon L$ folgt, so gehört jede endliche Menge zu L, d. h. es ist $\overline{\mathbf{E}} \lesssim L$.*

Beweis. H sei eine Menge, die nicht zu L gehört. Wir bilden $K = \mathfrak{P}(H) \cdot L$. Es ist offenbar $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$, und da z. B. $0 \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $0 \varepsilon L$ ist, also $O \varepsilon K$ ist, so ist $K \neq 0$.

Es sei $x \varepsilon K$. Dann ist erstens $x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $x \lesssim H$. Zweitens ist $x \varepsilon L$, also $x \neq H$. Folglich ist $x < H$. Wir wählen u so, daß $u \varepsilon H$ sei, aber nicht $u \varepsilon x$. Dann ist $x + \{u\} \lesssim H$, und weil es x ist, auch $x + \{u\}$ eine Menge, also $x + \{u\} \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, und weil $x \varepsilon L$ ist, auch $x + \{u\} \varepsilon L$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon K$. Und da u nicht zu x gehört, ist $x < x + \{u\}$.

Es gibt also zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ (nämlich $y = x + \{u\}$) mit $x < y$. Also ist $H\mathbf{U}$. Aus $H\mathbf{E}$ folgt dann $H \varepsilon L$.

Dieser Satz 73 ist eine Form des Prinzips des Beweises durch vollständige Induktion, welche den Begriff der Zahl nicht voraussetzt. Die andere, eigentliche und den Begriff der Zahl voraussetzende Form desselben werden wir beim Betrachten der „natürlichen Zahlen" im § 4 aufstellen.

Wir gehen nun daran, mit Hilfe der Sätze 72a, b und 73 ausgedehntere Klassen von endlichen Mengen anzugeben.

Satz 74. *Wenn H, H' Mengen sind und $H' \lesssim H$ ist, so folgt aus $H\mathbf{E}$ auch $H'\mathbf{E}$.*

Beweis. Wäre $H'\mathbf{U}$, so gäbe es ein $K \lesssim \mathfrak{P}(H')$, $K \neq 0$, bei dem es zu jedem $x \varepsilon K$ ein $y \varepsilon K$ mit $x < y$ gibt. Aus $H' \lesssim H$ folgt $\mathfrak{P}(H') \lesssim \mathfrak{P}(H)$, also ist $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$; d. h. aus der Existenz dieses K folgt auch $H\mathbf{U}$.

Aus $H\mathbf{E}$ folgt also $H'\mathbf{E}$.

Satz 75. *Wenn H eine Menge und φ ein II-Ding ist, so folgt aus $H\mathbf{E}$ auch $|[\varphi, H]|\mathbf{E}$.*

Beweis. Wir können leicht ein II-Ding f konstruieren, so daß die Bedingung „H ist eine Menge und $|[\varphi, H]|$ ist endlich" mit $[f, H] \neq A$ (f ist von φ abhängig, aber nicht von H!) gleichbedeutend ist. Wir setzen $L = \mathfrak{B}(f)$, L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $|[\varphi, 0]| = 0$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist x eine Menge, also auch $x + \{u\}$; und $|[\varphi, x]|$ ist endlich, also auch $|[\varphi, x + \{u\}]| = |[\varphi, x]| + \{[\varphi, u]\}$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon L$. Nach Satz 73 ist also für jedes endliche H $H \varepsilon L$, d. h. $|[\varphi, H]|$ endlich.

Satz 76. *Wenn H, K zwei endliche Mengen sind, so ist auch $H + K$ endlich.*

Beweis. H sei eine endliche Menge. Wir bringen die Bedingung „K ist eine Menge, und $H + K$ ist endlich" auf die Form $[f, K] \neq A$ (f von K unabhängig, aber nicht von H!) und setzen $L = \mathfrak{B}(f)$. L ist ein Bereich, seine Elemente sind alle K mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $H + 0 = H$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist x eine Menge, also auch $x + \{u\}$; und $H + x$ ist endlich, also auch $\overline{H + x} + \{u\} = H + \overline{x + \{u\}}$. Also ist $x + \{u\} \varepsilon L$.

Nach Satz 73 ist also für jedes endliche K $K \varepsilon L$, d. h. $H + K$ endlich.

Satz 77. *Wenn H eine endliche Menge ist und $H \lesssim \overline{\mathbf{E}}$ ist, so ist auch $\mathfrak{S}(H)$ endlich.*

Beweis. Wir bringen die Bedingung „H ist eine Menge, und entweder ist nicht $H \lesssim \overline{\mathbf{E}}$, oder es ist $\mathfrak{S}(H)$ endlich" auf die Form $[f, H] \neq A$ (f unabhängig von H!), und setzen $L = \mathfrak{B}(f)$. L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $\mathfrak{S}(0) = 0$ ist endlich, also ist $0 \varepsilon L$. Wenn $x \varepsilon L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist erstens x eine Menge, also auch

$x+\{u\}$. Zweitens ist entweder nicht $x+\{u\}\lesssim\overline{E}$, oder aber dies ist der Fall, dann ist aber auch $x\lesssim\overline{E}$, $u\,\varepsilon\,\overline{E}$. In diesem Falle ist wegen $x\,\varepsilon\,L$, $x\lesssim E$ $S(x)$ endlich und wegen $u\,\varepsilon\,\overline{E}$ auch u endlich, also ist es $S(x+\{u\})=S(x)+u$ ebenfalls. D. h. es ist $x+\{u\}\,\varepsilon\,L$.

Nach Satz 73 ist also für jedes endliche H $H\,\varepsilon\,L$; wenn folglich $H\lesssim\overline{E}$ ist, so muß $S(H)$ endlich sein.

Satz 78. *Wenn H eine endliche Menge ist, so ist auch $\mathcal{P}(H)$ endlich.*

Beweis. Wir bringen die Bedingung „H ist eine Menge und $\mathcal{P}(H)$ ist endlich" auf die Form $[f, H]\neq A$ (f ist unabhängig von H!) und setzen $L=\mathcal{B}(f)$. L ist ein Bereich, und seine Elemente sind alle H mit der obigen Eigenschaft.

0 ist eine Menge, und $\mathcal{P}(0)=\{0\}$ ist endlich (weil 0 und folglich auch $\{0\}=0+\{0\}$ es ist), also ist $0\,\varepsilon\,L$.

Wenn $x\,\varepsilon\,L$ ist und u ein I-Ding ist, so ist erstens x eine Menge, also ist es auch $x+\{u\}$. Zweitens ist $\mathcal{P}(x)$ endlich; wir wollen zeigen, daß daraus auch die Endlichkeit von $\mathcal{P}(x+\{u\})$ folgt.

Wenn $y\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x+\{u\})$ ist, so ist $y\lesssim x+\{u\}$. Wenn nicht $u\,\varepsilon\,y$ ist, so folgt hieraus $y\lesssim x$, d. h. $y\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x)$. Wenn im Gegenteil $u\,\varepsilon\,y$ ist, so ist $y=y-\{u\}+\{u\}$, $y-\{u\}\lesssim x$, d. h. $y-\{u\}\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x)$. D. h. in diesem Falle ist $y=y'+\{u\}$, $y'\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x)$.

Wir wählen nun g so, daß für alle Mengen y' $[g, y']=y'+\{u\}$ (g von y' unabhängig, aber nicht von u!) ist. Dann folgt aus $y\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x+\{u\})$, daß entweder $y\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x)$ ist, oder $y=[g, y']$, $y'\,\varepsilon\,\mathcal{P}(x)$, d. h. $y\,\varepsilon\,|[g,\mathcal{P}(x)]|$. Also ist $\mathcal{P}(x+\{u\}\lesssim\mathcal{P}(x)+|[g,\mathcal{P}(x)]|$.

Aus der Endlichkeit von $\mathcal{P}(x)$ folgt auch die von $|[g,\mathcal{P}(x)]|$, $\mathcal{P}(x)+|[g,\mathcal{P}(x)]|$, und also auch die Endlichkeit von $\mathcal{P}(x+\{u\})$.

Somit dürfen wir schließen, daß $x+\{u\}\,\varepsilon\,L$ ist. Nach Satz 73 ist also für jedes Endliche H $H\,\varepsilon\,L$, d. h. $\mathcal{P}(H)$ endlich.

Satz 79. *H, J seien zwei endliche Mengen. Da sind auch die Mengen $|\langle H, J\rangle|$, H^J endlich.*

H sei eine endliche Menge. Dann sind auch die Mengen $\mathcal{UO}(H)$, $\mathcal{VO}(H)$ und $\mathcal{WO}(H)$ endlich. Ferner ist für jedes $J\,\mathcal{UO}\,H$ (also auch für jedes $J\,\mathcal{VO}\,H$ oder $J\,\mathcal{WO}\,H$) J endlich und (falls $J\,\mathcal{WO}\,H$ ist) $\boldsymbol{OZ}(H, J)$ endlich. Ferner ist auch $\boldsymbol{KZ}(H)$ endlich.

Beweis. Beim Beweise von Satz 12b sahen wir, daß $|\langle H, J\rangle|\lesssim|[m,\mathcal{P}(\mathcal{P}(H+J))]|$ ist. Also folgt aus $H\boldsymbol{E}$, $J\boldsymbol{E}$ die Endlichkeit von $|\langle H, J\rangle|$. Beim Beweise von Satz 13b sahen wir, daß $H^J\lesssim|[k,\mathcal{P}(|\langle H, J\rangle|)]|$. Aus $H\boldsymbol{E}$, $J\boldsymbol{E}$ folgt also die Endlichkeit von H^J.

Wie wir wissen, ist $\mathcal{WO}(H) \lesssim \mathcal{VO}(H) \lesssim \mathcal{UO}(H) \lesssim \mathcal{P}(|\langle H, H\rangle|)$. Aus $H\boldsymbol{E}$ folgt also die Endlichkeit von $\mathcal{UO}(H)$, $\mathcal{VO}(H)$, $\mathcal{WO}(H)$. Wenn $J\,\mathcal{UO}\,H$ ist, so ist $J \lesssim |\langle H, H\rangle|$, also folgt aus $H\boldsymbol{E}$ die Endlichkeit von J.

Wegen $\boldsymbol{OZ}(H, J) = |[\boldsymbol{Z}(H, J), H]|$ folgt aus $H\boldsymbol{E}$ auch $\boldsymbol{OZ}(H, J)\,\boldsymbol{E}$; und wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$, d. h. $\boldsymbol{KZ}(H) = [f, H]$ folgt aus $H\boldsymbol{E}$ auch $\boldsymbol{KZ}(H)\,\boldsymbol{E}$.

Schließlich beweisen wir noch einen Satz über das Verhältnis von Endlichkeit und Äquivalenz.

Satz 80a. *H, H' seien zwei Mengen, $H \approx H'$. Dann ist $H\boldsymbol{E}$ mit $H'\boldsymbol{E}$, und $H\boldsymbol{U}$ mit $H'\boldsymbol{U}$ gleichbedeutend.*

Satz 80b. *H, H' seien zwei Mengen. Wenn $H\boldsymbol{E}$, $H'\boldsymbol{U}$ ist, so ist $H \lll H'$.*

Beweis. (Für 80a.) Aus $H \approx H'$ folgt $H' = |[f, H]|$, aus $H\boldsymbol{E}$ folgt also $H'\boldsymbol{E}$. Da ebenso $H' \approx H$ ist, folgt auch aus $H'\boldsymbol{E}$ $H\boldsymbol{E}$. D. h. $H\boldsymbol{E}$ ist mit $H'\boldsymbol{E}$ gleichbedeutend. Also gilt auch dasselbe für die Negation der Endlichkeit, die Unendlichkeit.

(Für 80b.) $H' \underset{\approx}{\lll} H$ ist nach Satz 68 mit $H' \lesssim |[f, H]|$ gleichbedeutend. In diesem Falle folgt aus $H\boldsymbol{E}$ die Endlichkeit von $|[f, H]|$ und H'. Wegen $H'\boldsymbol{U}$ muß also $H' \ggg H$, $H \lll H'$ sein.

3. Grundoperationen mit Ordnungszahlen.

Satz 81a. *Es ist $0 \,\varepsilon\, \Omega^{**}$.*

Satz 81b. *Wenn $P \,\varepsilon\, \Omega^{**}$ ist, so ist auch $P + \{P\} \,\varepsilon\, \Omega^{**}$. Wir bezeichnen $P + \{P\}$ auch mit $P \dotplus 1$.*

Satz 81c. *Wenn $\mathcal{M} \lesssim \Omega^{**}$ ist, so ist $\mathcal{S}(\mathcal{M}) \,\varepsilon\, \Omega^{**}$ oder $\mathcal{S}(\mathcal{M}) = \Omega^{**}$, je nachdem ob $\mathcal{M}$ eine Menge ist oder nicht. Folglich ist jedenfalls $\mathcal{S}(\mathcal{M})\,\boldsymbol{OZ}$.*

Beweis. (Für 81a.) 0 ist eine Menge, wir müssen also nur noch $0\,\boldsymbol{OZ}$ beweisen, d. h. daß 0 den Bedingungen des Satzes 46 genügt. Dies ist aber sicher der Fall, weil 0 überhaupt keine Elemente hat.

(Für 81b.) P ist eine Menge, $\{P\}$ ebenfalls, also ist es auch $P + \{P\}$; wir müssen also nur noch $P + \{P\}\,\boldsymbol{OZ}$ beweisen, d. h. daß $P + \{P\}$ den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \,\varepsilon\, \Omega^{**}$ folgt $P \lesssim \Omega^{**}$ und $\{P\} \lesssim \Omega^{**}$, also $P + \{P\} \lesssim \Omega^{**}$. Wenn $Q \,\varepsilon\, P + \{P\}$ ist, so ist entweder $Q \,\varepsilon\, P$, also $Q < P \lesssim P + \{P\}$, oder $Q \,\varepsilon\, \{P\}$, $Q = P \lesssim P + \{P\}$. Es ist also jedenfalls $Q \lesssim P + \{P\}$. D. h.: $P + \{P\}$ erfüllt in der Tat die Bedingungen des Satzes 46.

(Für 81c.) Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{S}(\mathcal{M})\,\boldsymbol{OZ}$ ist, d. h. daß $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \varepsilon \mathcal{S}(\mathcal{M})$ folgt $P \varepsilon Q$, $Q \varepsilon \mathcal{M}$, wegen $\mathcal{M} \lesssim \Omega^{**}$ ist $Q\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, also auch $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$; folglich ist $\mathcal{S}(\mathcal{M}) \lesssim \Omega^{**}$. Ferner folgt aus $P \varepsilon \mathcal{S}(\mathcal{M})$ $P \varepsilon Q$, $Q \varepsilon \mathcal{M}$, also wegen $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, $Q\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ $P < Q$. Da aber wegen $Q \varepsilon \mathcal{M}$ $Q \lesssim \mathcal{S}(\mathcal{M})$ ist, ist auch $P < \mathcal{S}(\mathcal{M})$. Damit ist $\mathcal{S}(\mathcal{M})\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ bewiesen.

Also ist $\mathcal{S}(\mathcal{M}) \neq \Omega^{**}$ oder $= \Omega^{**}$, d. h. $\varepsilon\, \Omega^{**}$ oder $= \Omega^{**}$, je nachdem ob $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ eine Menge ist oder nicht. Wir müssen also nun noch beweisen: $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ ist dann und nur dann eine Menge, wenn $\mathcal{M}$ eine ist.

Ist $\mathcal{M}$ eine Menge, so ist es jedenfalls auch $\mathcal{S}(\mathcal{M})$. Ist hingegen $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ eine Menge, so ist es auch $\mathcal{P}(\mathcal{S}(\mathcal{M}))$, und wegen $\mathcal{M} \lesssim \mathcal{P}(\mathcal{S}(\mathcal{M}))$ auch $\mathcal{M}$. ($\mathcal{M} \lesssim \mathcal{P}(\mathcal{S}(\mathcal{M}))$ gilt offenbar für jeden Bereich $\mathcal{M}$, dessen Elemente Mengen sind.)

Satz 82. *Es sei* $P \varepsilon \Omega^{**}$, $Q \varepsilon \Omega^{**}$. *Dann bestehen die folgenden Relationen:* $P < Q$ *ist mit* $P \dotplus 1 \lesssim Q$ *gleichbedeutend.* $P < Q \dotplus 1$ *ist mit* $P \lesssim Q$ *gleichbedeutend.* $P \gtreqless Q$ *ist bzw. mit* $P \dotplus 1 \gtreqless Q \dotplus 1$ *gleichbedeutend.*

Beweis. Da $P \varepsilon P + \{P\}$, $P \varepsilon P \dotplus 1$ ist, und $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$, $P \dotplus 1\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ ist, so gilt $P < P \dotplus 1$. Aus $P \dotplus 1 \lesssim Q$ folgt also $P < Q$. Aus $P < Q$ hingegen folgt $P \dotplus 1 \lesssim Q$; denn sonst wäre $P \dotplus 1 > Q$, $Q < P \dotplus 1$, also $P < Q < P + \{P\}$, was offenbar unmöglich ist. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Wir beweisen nun die dritte. Aus $P = Q$ folgt $P \dotplus 1 = Q \dotplus 1$. Aus $P < Q$ folgt $P \dotplus 1 \lesssim Q < Q \dotplus 1$, $P \dotplus 1 < Q \dotplus 1$. Aus $P > Q$ folgt $Q < P$, $Q \dotplus 1 < P \dotplus 1$, also $P \dotplus 1 > Q \dotplus 1$. Also: aus $P \gtreqless Q$ folgt bzw. $P \dotplus 1 \gtreqless Q \dotplus 1$. Und da es sich hier jeweils um vollständige Disjunktionen handelt, gilt auch die Umkehrung.

Schließlich beweisen wir die zweite Behauptung. $P < Q \dotplus 1$ bedeutet $P \dotplus 1 \lesssim Q \dotplus 1$, und dies $P \lesssim Q$.

Satz 83. *Es sei* $P\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$. *Dann ist entweder* $P = Q \dotplus 1$, $Q\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$ *oder es ist* $P = \mathcal{S}(P)$, *und beides zugleich findet nie statt. Im letzteren Falle nennen wir P eine Limeszahl, in Zeichen:* $P\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{Z}$.

Beweis. Wenn $P = Q \dotplus 1$ ist, so folgt aus $R \varepsilon \mathcal{S}(P)$: $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$, d. h. $R \varepsilon T$, $T < P$. Also ist $T < Q \dotplus 1$, $T \lesssim Q$, und folglich $R \varepsilon Q$. Also ist $\mathcal{S}(P) \lesssim Q < Q \dotplus 1 = P$, $\mathcal{S}(P) < P$.

Ist umgekehrt $\mathcal{S}(P) \neq P$, so schließen wir so. Aus $R \varepsilon \mathcal{S}(P)$ folgt $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$, also $R \varepsilon T$, $T < P$, d. h. $R \varepsilon P$. Also ist $\mathcal{S}(P) \lesssim P$. Wegen $\mathcal{S}(P) \neq P$ muß $\mathcal{S}(P) < P$ sein. Es gibt also ein R, welches Element von P, aber nicht von $\mathcal{S}(P)$ ist.

Also ist $R < P$, es kann aber nicht $R < T < P$ ($T\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$) sein, da dann $R \varepsilon T$, $T \varepsilon P$ also $R \varepsilon \mathcal{S}(P)$ wäre. Folglich zieht $R < T$, $T\,\boldsymbol{O}\,\boldsymbol{Z}$

$T \gtrsim P$ nach sich. Nun hat $R < P$ die Konsequenz $R \dotplus 1 \lesssim P$; und wegen $R < R \dotplus 1$ muß $R \dotplus 1 \gtrsim P$ sein. Also ist $R \dotplus 1 = P$.

Zwei Limeszahlen können wir sofort angeben: 0 und Ω^{**}. $\mathcal{S}(0) = 0$ ist nämlich trivial, und $\mathcal{S}(\Omega^{**}) = \Omega^{**}$ folgt z. B. aus Satz 81 c, weil Ω^{**} keine Menge ist.

4. Die natürlichen Zahlen, ω.

Wir sind jetzt in der Lage, die natürlichen Zahlen (d. h. die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen) zu definieren.

Definition. Wir nennen P eine natürliche Zahl, in Zeichen: $P\,\mathbf{NZ}$, wenn $P\,\mathbf{OZ}$ und $P\,\mathbf{E}$ ist. D. h. wenn $P \varepsilon \overline{\mathbf{E}} \cdot \Omega^{**}$ ist.

Satz 84. *Den Bereich* $\overline{\mathbf{E}} \cdot \Omega^{**}$, *dessen Elemente alle natürliche Zahlen sind, nennen wir* ω. *Es ist* $\omega \varepsilon \Omega^{**}$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß $\omega\,\mathbf{OZ}$ ist, d. h. daß es den Bedingungen des Satzes 46 genügt.

Aus $P \varepsilon \omega$ folgt $P\,\mathbf{OZ}$, $P\,\mathbf{E}$, also ist $P \varepsilon \Omega^{**}$, und folglich $\omega \lesssim \Omega^{**}$. Wenn $P \varepsilon \omega$ ist, so ist $P\,\mathbf{E}$, aus $Q \varepsilon P$ folgt aber $Q\,\mathbf{OZ}$ und $Q < P$. Also ist auch $Q\,\mathbf{E}$, d. h. $Q\,\mathbf{NZ}$, $Q \varepsilon \omega$. Also ist $P \lesssim \omega$. Damit ist $\omega\,\mathbf{OZ}$ bewiesen.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß ω eine Menge ist. Nach Satz 47 genügt es hierzu nachzuweisen, daß $\omega \neq \Omega^{**}$ ist; also daß es eine nicht zu ω gehörende, d. h. unendliche Ordnungszahl gibt, die zu Ω^{**} gehört, d. h. eine Menge ist. Nun gibt es nach Satz 71 jedenfalls eine unendliche Menge, H, also ist $\mathbf{KZ}(H)$ eine Ordnungszahl, die wegen $H \approxeq \mathbf{KZ}(H)$ sowohl unendlich als auch eine Menge ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 85a. *Es ist* $0 \varepsilon \omega$. *Aus* $P \varepsilon \omega$ *folgt* $P \dotplus 1 \varepsilon \omega$.

Satz 85b. *M sei ein Bereich. Wenn* $0 \varepsilon M$ *ist, und aus* $P \varepsilon M$, $P \varepsilon \Omega^{**}$ $P \dotplus 1 \varepsilon M$ *folgt, so ist* $\omega \lesssim M$.

Beweis. (Für 85a.) Es ist $0\,\mathbf{OZ}$, $0\,\mathbf{E}$, also $0\,\mathbf{NZ}$, $0 \varepsilon \omega$. Wenn $P \varepsilon \omega$, d. h. $P\,\mathbf{NZ}$, d. h. $P\,\mathbf{OZ}$, $P\,\mathbf{E}$ ist, so ist auch $P \dotplus 1\,\mathbf{OZ}$, $P \dotplus 1\,\mathbf{E}$ (wegen $P \dotplus 1 = P + \{P\}$), also $P \dotplus 1\,\mathbf{NZ}$, $P \dotplus 1 \varepsilon \omega$.

(Für 85b.) Wenn nicht $\omega \lesssim M$ wäre, so gäbe es ein $P \varepsilon \omega$, für welches nicht $P \varepsilon M$ ist. Wegen $P \varepsilon \omega$ ist $P\,\mathbf{NZ}$, d. h. $P\,\mathbf{OZ}$ und $P\,\mathbf{E}$.

Wir bilden nun den Bereich $\mathfrak{M} = P \cdot M$. Aus $x \varepsilon \mathfrak{M}$ folgt $x \varepsilon P$, also $x < P$, also $x \varepsilon \mathfrak{P}(P)$; folglich ist $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}(P)$. Ferner ist $0 \varepsilon M$, und da nicht $P \varepsilon M$ ist, $0 \neq P$, d. h. $0 < P$. Hieraus folgt aber $0 \varepsilon P$, also $0 \varepsilon P \cdot M$, $0 \varepsilon \mathfrak{M}$. Also ist $\mathfrak{M} \neq 0$.

Schließlich gilt für jedes $x \varepsilon \mathfrak{M}$ offenbar: $x \varepsilon P$, $x \varepsilon M$. Also ist $x\,\mathbf{OZ}$, $x < P$, $x \varepsilon M$; und da $x \varepsilon P$, $P \lesssim \Omega^{**}$, ist auch $x \varepsilon \Omega^{**}$. Wegen $x \varepsilon M$,

$x \varepsilon \Omega^{**}$ ist nun $x \dotplus 1 \varepsilon M$. Aus $x < P$ folgt andererseits $x \dotplus 1 \lesssim P$, da aber $x \dotplus 1 \varepsilon M$, aber nicht $P \varepsilon M$ ist, so ist $x \dotplus 1 \neq P$. Also ist $x \dotplus 1 < P$, $x \dotplus 1 \varepsilon P$. Aus alledem folgt $x \dotplus 1 \varepsilon P \cdot M$, $x \dotplus 1 \varepsilon \mathfrak{M}$. Und da $x < x \dotplus 1$ ist, so können wir sagen: es gibt zu jedem $x \varepsilon \mathfrak{M}$ ein $y \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $x < y$.

Nach der Definition der Endlichkeit muß also $P\boldsymbol{U}$ sein, was mit $P\boldsymbol{E}$ im Widerspruch steht.

Der Satz 85 b ist die zweite und eigentliche Fassung des Prinzips vom Beweisen durch finite (vollständige) Induktion. Das *Definieren* durch finite (vollständige) Induktion ist damit natürlich noch nicht erledigt, es soll uns erst im Kap. IX, § 2 beschäftigen.

Wir beweisen noch einige Sätze vom Verhältnis der Ordnungszahl ω zur Äquivalenz.

Satz 86. *Es ist* $\omega \boldsymbol{LZ}$ *und* $\omega \boldsymbol{KZ}$. *Es ist* $\omega \boldsymbol{U}$.

Beweis. Es kann nicht $\omega = P \dotplus 1$, $P\boldsymbol{OZ}$, sein. Denn dann wäre $P < P \dotplus 1 = \omega$, $P \varepsilon \omega$. Also wäre auch $P \dotplus 1 \varepsilon \omega$, $\omega \varepsilon \omega$. D. h. $\omega < \omega$, was unmöglich ist.

Es ist $\omega \boldsymbol{U}$, denn aus $\omega \boldsymbol{E}$ folgte $\omega \boldsymbol{NZ}$, $\omega \varepsilon \omega$, $\omega < \omega$.

Aus $P\boldsymbol{OZ}$, $P < \omega$ folgt $P \varepsilon \omega$, $P\boldsymbol{NZ}$, $P\boldsymbol{E}$, wegen $\omega \boldsymbol{U}$ kann also nicht $P \approx \omega$ sein. Also ist $\omega \boldsymbol{KZ}$.

Satz 87. *H sei ein Bereich. $H\boldsymbol{E}$ ist mit $H \lll \omega$ gleichbedeutend (oder was dasselbe ist: mit $\boldsymbol{KZ}(H) \varepsilon \omega$, oder mit $\boldsymbol{KZ}(H)\boldsymbol{NZ}$, oder mit $\boldsymbol{KZ}(H) < \omega$).*

Beweis. Wegen $H \approx \boldsymbol{KZ}(H)$ ist $H\boldsymbol{E}$ mit $\boldsymbol{KZ}(H)\boldsymbol{E}$ gleichbedeutend. Es ist aber $\boldsymbol{KZ}(H)\boldsymbol{OZ}$, also bedeutet $\boldsymbol{KZ}(H)\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{KZ}(H)\boldsymbol{NZ}$. Dies ist seinerseits mit $\boldsymbol{KZ}(H) \varepsilon \omega$ oder auch, da ω als Kardinalzahl seine eigene Kardinalzahl ist, mit $\boldsymbol{KZ}(H) < \boldsymbol{KZ}(\omega)$, d. h. $H \lll \omega$ gleichbedeutend.

Satz 88. *H sei ein Bereich. $H\boldsymbol{E}$ ist damit gleichbedeutend, daß für kein $H' < H$ $H \approx H'$ ist.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, es sei $H' < H$, $H \approx H'$, es ist dann zu beweisen, daß $H\boldsymbol{U}$ ist. Wir können H als Menge voraussetzen, sonst ist sowieso $H\boldsymbol{U}$. Wegen $H \approx H'$ ist $H \approx H' \ldots (f)$. Wir bringen die Bedingung „$x \varepsilon \mathfrak{P}(H)$ und $H - x > |[f, H - x]|$" auf die Form $[g, x] \neq A$ und setzen $K = \mathfrak{B}(g)$. K ist ein Bereich und seine Elemente sind alle x mit der obigen Eigenschaft.

Es ist offenbar $K \lesssim \mathfrak{P}(H)$. Für die Menge 0 gilt: $0 \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $H - 0 = H > H' = |[f, H]| = |[f, H - 0]|$, also $0 \varepsilon K$; folglich ist $K \neq 0$.

Es sei $x \varepsilon K$. Wir setzen $y = H - |[f, H - x]|$. Wegen $y \lesssim H$ ist $y \varepsilon \mathfrak{P}(H)$. Aus $x \varepsilon K$ folgt $H - y = |[f, H - x]| < H - x$, $x < y$. Ferner folgt aus $H - x > H - y$ $|[f, H-x]| > |[f, H-y]|$ (weil für $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ stets $[f, u] \neq [f, v]$ ist), d. h. $H - y > |[f, H-y]|$.

Also ist $y \varepsilon K$. D. h.: zu jedem $x \varepsilon K$ gibt es ein $y \varepsilon K$ mit $x < y$. Damit ist HU bewiesen.

Nun sei umgekehrt HU. Dann ist $\boldsymbol{KZ}(H) \gtrsim \omega$. Wir setzen $\boldsymbol{KZ}(H) - \omega = \pi$, $\boldsymbol{KZ}(H) = \omega \dotplus \pi$. Es ist $\boldsymbol{KZ}(H) \approx H \ldots (h)$, also $H = |[h, \boldsymbol{KZ}(H)]| = |[h, \omega]| + |[h, \pi]|$. Dabei haben $|[h, \omega]|$ und $|[h, \pi]|$ kein gemeinsames Element, weil ω und π keines haben, und aus $u \varepsilon \boldsymbol{KZ}(H)$, $v \varepsilon \boldsymbol{KZ}(H)$, $u \neq v$ $[h, u] \neq [h, v]$ folgt. Wir können auch schreiben: $H = |[h, \omega]| + H^*$, $|[h, \omega]|$ und H^* haben kein gemeinsames Element.

Die Bedingung: „Entweder ist $x \varepsilon |[h, \omega]|$, und dabei $x = [h, z]$, $z \varepsilon \omega$ und $y = [h, z \dotplus 1]$; oder es ist $x \varepsilon H^*$ und $y = x$“ können wir auf die Form $[j, \langle x, y\rangle] \neq A$ bringen. Da für $x \varepsilon |[h, \omega]|$ oder $x \varepsilon H^*$, d. h. für $x \varepsilon H$, ein einziges y dieser Bedingung genügt, so wenden wir III. 3. an: Dieses y ist $= [k, x]$.

Für $x \varepsilon |[h, \omega]|$ ist also $x = [h, z]$, $z \varepsilon \omega$, $[k, x] = [h, z \dotplus 1]$. Für $x \varepsilon H^*$ ist $[k, x] = x$. Aus dieser Eigenschaft des k schließen wir leicht zweierlei. Erstens, daß aus $u \varepsilon H$, $v \varepsilon H$, $u \neq v$ $[k, u] \neq [k, v]$ folgt. Zweitens, daß $|[k, |[h, \omega]|]| \lesssim |[h, \omega - \{0\}]| < |[h, \omega]|$ und $|[k, H^*]| = H^*$ ist. Hieraus folgt aber $H \approx |[k, H]|$ und $|[k, H]| = |[k, |[h, \omega]|]| + |[k, H^*]|$ $< |[h, \omega]| + H^* = H$.

Wir haben also ein $H' < H$ mit $H \approx H'$ gefunden: nämlich $|[k, H]|$. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 89. *Aus* $\boldsymbol{PNZ}$ *folgt* $\boldsymbol{PKZ}$. *Hingegen ist außer* 0 *kein* $\boldsymbol{PNZ}$ *auch* $\boldsymbol{PLZ}$.

Beweis. Wäre nicht $\boldsymbol{PKZ}$, so gäbe es eine Ordnungszahl Q mit $Q < P$, $Q \approx P$, was mit $\boldsymbol{PE}$, d. h. mit $\boldsymbol{PNZ}$, nach Satz 88 unvereinbar ist.

Wenn $P \neq 0$, $\boldsymbol{PLZ}$ ist, so ist erstens $0 < P$, d. h. $0 \varepsilon P$. Zweitens folgt aus $Q \varepsilon P$ $\boldsymbol{QOZ}$, $Q < P$, also $Q \dotplus 1 \lesssim P$. Nun ist P nicht $= Q \dotplus 1$, also $Q \dotplus 1 < P$, $Q \dotplus 1 \varepsilon P$. Nach Satz 85b ist also $\omega \lesssim P$, was mit $\boldsymbol{PNZ}$, $P < \omega$ im Widerspruche steht.

IX. Induktionssätze.

1. Die transfinite Induktion.

In diesem Kapitel werden wir die Zulässigkeit (d. h. die Möglichkeit und Eindeutigkeit) der Definition durch transfinite bzw. finite (gewöhnliche vollständige) Induktion beweisen. Diese Art des Definierens wurde in der „naiven“ Mengenlehre allgemein als etwas Selbstverständliches, unmittelbar Anschauliches angesehen. Innerhalb eines axiomatischen Systems kann von einer Selbstverständlichkeit dieser Definitionsprozesse keine Rede sein: es muß vielmehr streng aus den Axiomen deduziert werden, daß die durch sie herzustellenden Funktionen existieren. Außerdem ist der unmittelbar anschauliche Charakter wenigstens der Definition durch transfinite Induktion gar nicht so unanfechtbar, als man zunächst anzunehmen geneigt sein könnte[35]).

Das Prinzip der Definition durch transfinite Induktion formulieren wir zunächst möglichst allgemein.

Satz 90. *φ sei ein II-Ding. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x \varepsilon \Omega^{**}$ ist, so ist $[\psi, x] = A$ (d. h. $\psi \lesssim \Omega^{**}$).*
2. *Wenn $x \varepsilon \Omega^{**}$ ist, so ist*

$$[\psi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

$\left(\text{wegen } \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) \lesssim x \text{ ist } \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) \text{ ein I II-Ding}\right)$. Dieses ψ bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(\varphi)$.

Bemerkung. Die Formulierung des eigentlichen induktiven Definitionsprinzips ist die Bedingung 2. Da es der Form nach etwas ungewohnt sein mag, ist es vielleicht gut, einige erläuternde Worte hinzuzufügen.

$\left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)$ charakterisiert den Wertverlauf des II-Dinges (d. h. der Funktion) ψ im Bereiche x. Man sieht dies sofort, wenn man beachtet, daß dann und nur dann $\left(\frac{\psi' \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\psi'' \mid 0}{x}\right)$ ist, wenn für alle $u \varepsilon x$ $[\psi', u] = [\psi'', u]$ ist. Also drückt die Bedingung 2 das Folgende aus: $[\psi, x]$ berechnet sich auf eindeutige Weise aus x und dem Wertverlauf von ψ in x, d. h. für alle Ordnungszahlen $< x$.

Beweis[36]). Der besseren Übersicht halber werden wir den Beweis in fünf Absätze A bis E zergliedert führen. Ehe wir aber zu diesen Überlegungen übergehen, stellen wir noch das Bestehen von zwei Identitäten fest, nämlich:

Wenn $\psi \lesssim x$ ist, so ist $\left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right) = \psi$. Wenn für alle $u \varepsilon x$ $[\psi', u] = [\psi'', u]$ ist (und nur dann), so ist $\left(\frac{\psi' \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\psi'' \mid 0}{x}\right)$. Man verifiziert beide ohne jede Schwierigkeit durch Anwenden von I. 4., denn diese II-Dinge haben für jedes u denselben Wert.

---

[35]) Vgl. den Schluß im Kap. I 3., sowie die Fußnote [15]) daselbst.

[36]) Man beachte die Analogie dieses Beweisganges mit der Theorie der Zählbarkeit in Kap. V, §§ 1–3.

A. Wir betrachten die folgende Eigenschaft von P: „Es ist $P\,O\,Z$. Es gibt ein II-Ding χ, so daß

1. wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\chi, x] = A$ (d. h. es ist $\chi \lesssim P$),
2. wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\chi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\chi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$.“

Wenn P diese Eigenschaft hat, so nennen wir es normal. χ bezeichnen wir dann als ein $\mathfrak{J}$-Element von P. Wenn $P \neq \Omega^{**}$ ist, d. h. $P \varepsilon \Omega^{**}$, P eine Menge, so ist wegen $\chi \lesssim P$ auch χ ein I II-Ding. Wir nennen dann

$$u = \left[\varphi, \left\langle P, \left(\frac{\chi \mid 0}{P}\right)\right\rangle\right] = [\varphi, \langle P, \chi\rangle]$$

einen $\mathfrak{J}$-Wert von P.

Es ist nicht schwer, für Mengen P die Bedingung „P ist normal“ auf die Form $[f, P] \neq A$ zu bringen; und weiter die Relationen „χ ist ein $\mathfrak{J}$-Element von P“ und „u ist ein $\mathfrak{J}$-Wert von P“ auf die Formen $[g, \langle P, \chi\rangle] \neq A$ bzw. $[h, \langle P, u\rangle] \neq A$ zu bringen.

Wenn wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}(f)$ setzen, so ist $\mathfrak{N}$ ein Bereich, dessen Elemente alle normalen Mengen P sind; und nach I. 4. ist $\mathfrak{N}$ der einzige derartige Bereich.

B. Wir behaupten: Wenn P normal ist, so gibt es ein und nur ein $\mathfrak{J}$-Element von P. Hieraus folgt für normale Mengen P sofort, daß es auch einen und nur einen $\mathfrak{J}$-Wert von P gibt.

Es genügt offenbar zu zeigen, daß wenn χ' und χ'' zwei $\mathfrak{J}$-Elemente von P sind, $\chi' = \chi''$ sein muß. Nach I. 4. trifft dies zu, wenn für alle x $[\chi', x] = [\chi'', x]$ ist. Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist nach 1. $[\chi', x] = [\chi'', x] = A$, wir brauchen uns also bloß mit den $x \varepsilon P$ zu beschäftigen. Nehmen wir also an, es wäre für ein $x \varepsilon P$ $[\chi', x] \neq [\chi'', x]$.

Wir können die Eigenschaft „$x \varepsilon P$ und $[\chi', x] \neq [\chi'', x]$“ auf die Form $[j, x] \neq A$ bringen und $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(j)$ setzen. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein Bereich und seine Elemente sind die x mit der genannten Eigenschaft. Es ist offenbar $\mathfrak{H} \lesssim P$ und nach Annahme ist $\mathfrak{H} \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma\, W\,O\, P$ hat also das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$ ein erstes Element, etwa z. Es ist also $z \varepsilon \mathfrak{H}$, und aus $y \varepsilon \mathfrak{H}$ folgt $z \lesssim y$. Wegen $z \varepsilon \mathfrak{H}$ ist $z \varepsilon P$ also $z\,O\,Z$ und $[\chi', z] \neq [\chi'', z]$.

Aus $y \varepsilon z$ folgt $y\,O\,Z$, $y < z$; also kann nicht $y \varepsilon \mathfrak{H}$ sein, da dann $z \lesssim y$, $y \gtrsim z$ wäre. Wegen $z \varepsilon P$, $z < P$ ist aber $y \varepsilon P$, also muß $[\chi', y] = [\chi'', y]$ sein. Da das für alle $y \varepsilon z$ gilt, so ist $\left(\frac{\chi' \mid 0}{z}\right) = \left(\frac{\chi'' \mid 0}{z}\right)$, was

$$\left[\varphi, \left\langle z, \left(\frac{\chi' \mid 0}{z}\right)\right\rangle\right] = \left[\varphi, \left\langle z, \left(\frac{\chi'' \mid 0}{z}\right)\right\rangle\right]$$

und wegen 2. $[\chi', z] = [\chi'', z]$ zur Folge hat. Da wir vorhin das Gegenteil bewiesen hatten, ist das ein Widerspruch. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Für ein normales P gibt es also ein einziges $\mathcal{J}$-Element, das wir mit $\mathcal{JE}(P)$ bezeichnen, und wenn P dabei eine Menge ist, auch einen einzigen $\mathcal{J}$-Wert, den wir mit $\mathcal{JW}(P)$ bezeichnen. Wenn folglich P normal und dabei eine Menge ist, so gibt es ein einziges χ bzw. u mit $[g, \langle P, \chi\rangle] \neq A$ bzw. $[h, \langle P, u\rangle] \neq A$, nämlich $\mathcal{JE}(P)$ bzw. $\mathcal{JW}(P)$. Wir wenden III. 3. an: dann wird $\mathcal{JE}(P) = [k, P]$ und $\mathcal{JW}(P) = [l, P]$ (k, l von P unabhängig!).

C. Wir wollen nun die Ordnungszahlen in bezug auf ihre Normalität untersuchen. Wenn wir nachweisen können, daß Ω^{**} normal ist, so sind wir am Ziele: denn dann gibt es ein und nur ein $\mathcal{J}$-Element von Ω^{**}; und das ψ unseres Satzes ist offenbar ganz genau dasselbe, wie ein $\mathcal{J}$-Element von Ω^{**}.

Die Normalität des Ω^{**} werden wir in der Tat im Absatz E beweisen; die Absätze C und D enthalten die notwendigen Vorbereitungen.

Wir behaupten: Wenn P normal ist, so ist auch jedes $Q \varepsilon P$ normal und es ist stets $\mathcal{JW}(Q) = [\mathcal{JE}(P), Q]$.

Wir setzen $m = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{Q}\right)$ und zeigen, daß m ein $\mathcal{J}$-Element von Q ist. Aus $Q \varepsilon P$ folgt nämlich (da $P\,O\,Z$ ist) $Q\,O\,Z$, $Q < P$. Wenn nicht $x \varepsilon Q$ ist, so ist

$$[m, x] = [0, x] = A.$$

Also ist 1. erfüllt. Ist hingegen $x \varepsilon Q$, so ist

$$[m, x] = [\mathcal{JE}(P), x].$$

Nun folgt aus $x \varepsilon Q$ (wegen $Q\,O\,Z$) $x\,O\,Z$, $x < Q$; also aus $y \varepsilon x$, $x \varepsilon Q$ $y \varepsilon Q$, d. h.

$$[m, y] = [\mathcal{JE}(P), y].$$

Folglich ist

$$\left(\frac{m \mid 0}{x}\right) = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{x}\right).$$

Da $\mathcal{JE}(P)$ 2. erfüllt, so ist für alle $x \varepsilon Q$, da wegen $Q < P$ auch $x \varepsilon P$ ist,

$$[\mathcal{JE}(P), x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

und nach dem Vorigen

$$[m, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{m \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right].$$

Also ist auch 2. erfüllt.

Wir sehen also: Q ist normal und es ist $\mathcal{JE}(Q) = m = \left(\frac{\mathcal{JE}(P) \mid 0}{Q}\right)$.

Also ist weiter (wegen $Q \varepsilon P$ ist ja Q sicher eine Menge)

$$\mathcal{JW}(Q) = [\varphi, \langle Q, \mathcal{JE}(Q)\rangle] = \left[\varphi, \left\langle Q, \left(\frac{\mathcal{JE}(P)\,|\,0}{Q}\right)\right\rangle\right] = [\mathcal{JE}(P), Q].$$

D. Unsere nächste Behauptung ist diese: Wenn $P\,O\,Z$ ist und alle $Q \varepsilon P$ normal sind, so ist auch P normal.

Um dies zu beweisen, nehmen wir das II-Ding l, für welches stets $\mathcal{JW}(Q) = [l, Q]$ ist (Q normal und eine Menge), und setzen $n = \left(\frac{l\,|\,0}{P}\right)$. Wir behaupten: n ist ein $\mathcal{J}$-Element von P; dann ist die Normalität von P bewiesen.

Es ist $P\,O\,Z$. Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist

$$[n, x] = [0, x] = A.$$

Also ist 1. erfüllt. Wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist x normal und eine Menge, folglich ist

$$[n, x] = [l, x] = \mathcal{JW}(x).$$

Da aus $x \varepsilon P$ (wegen $P\,O\,Z$) $x\,O\,Z$, $x < P$ folgt, so folgt aus $y \varepsilon x$, $x \varepsilon P$ auch $y \varepsilon P$, also

$$[n, y] = \mathcal{JW}(y), \qquad [\mathcal{JE}(x), y] = \mathcal{JW}(y),$$

d. h.

$$[n, y] = [\mathcal{JE}(x), y].$$

Also ist

$$\left(\frac{n\,|\,0}{x}\right) = \left(\frac{\mathcal{JE}(x)\,|\,0}{x}\right) = \mathcal{JE}(x),$$

woraus weiter

$$[n, x] = \mathcal{JW}(x) = [\varphi, \langle x, \mathcal{JE}(x)\rangle] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{n\,|\,0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

folgt. Also ist auch 2. erfüllt.

Wir sehen also: P ist normal, wie behauptet wurde.

E. Mit Hilfe des Resultates in D könnten wir nun die Normalität des Ω^{**} analog beweisen, wie wir es bei der Zählbarkeit von wohlgeordneten Bereichen bei Satz 36 (Kap. V, § 3) getan haben. Die Kenntnis der Theorie der Ordnungszahlen ermöglicht uns aber einen etwas kürzeren Beweis.

Wenn $P \varepsilon \mathcal{N}$ ist, so ist $P \varepsilon \Omega^{**}$, also ist $\mathcal{N} \lesssim \Omega^{**}$. Ferner ist P normal, also ist jedes $Q \varepsilon P$ nach C eine normale Menge, d. h. $Q \varepsilon \mathcal{N}$. Also ist $P \lesssim \mathcal{N}$. Nach Satz 46 ist also $\mathcal{N}\,O\,Z$. Und weil jedes $P \varepsilon \mathcal{N}$ normal ist, so ist nach D auch $\mathcal{N}$ normal. Wäre $\mathcal{N}$ eine Menge, so müßte demnach $\mathcal{N} \varepsilon \mathcal{N}$ sein, was wegen $\mathcal{N}\,O\,Z$ die Unmöglichkeit $\mathcal{N} < \mathcal{N}$ zur Folge hätte.

Also ist $\mathcal{N}$ keine Menge, wegen $\mathcal{N}\,O\,Z$ muß $\mathcal{N} = \Omega^{**}$ sein; also ist Ω^{**} normal. Dann ist aber, wie wir am Anfange von C bereits feststellten, unsere Behauptung vollständig bewiesen.

2. Ein Spezialfall. Die finite (gewöhnliche vollständige) Induktion.

Mit Satz 90 haben wir das Prinzip der Definition durch transfinite Induktion in seiner allgemeinsten Form bewiesen. Wir wollen nun noch gewisse Beschränkungen hinzufügen. So werden wir uns jetzt dem Falle zuwenden, in dem es nicht auf den Bereich aller Ordnungszahlen, sondern auf Teilbereiche desselben bezogen wird.

Satz 91a. *φ sei ein II-Ding, POZ. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x \varepsilon P$ ist, so ist $[\psi, x] = A$ (d. h.: $\psi \lesssim P$).*
2. *Wenn $x \varepsilon P$ ist, so ist*

$$[\psi, x] = \left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right].$$

Dieses ψ bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(\varphi, P)$. (Es ist offenbar $\mathcal{J}(\varphi, \Omega^{**}) = \mathcal{J}(\varphi)$.)

Satz 91b. *Wenn φ ein III-Ding ist, und P eine Menge ist, so ist auch $\mathcal{J}(\varphi, P)$ ein III-Ding. Es gibt ein II-Ding χ, so daß in diesem Falle stets*

$$\mathcal{J}(\varphi, P) = [\chi, \langle \varphi, P \rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 91a.) Wir bringen die Bedingung: „Es gibt ein $x \varepsilon P$ und ein beliebiges y, so daß $u = \langle x, y \rangle$ ist“ auf die Form $[f, u] \neq A$ und setzen dann $g = \left(\frac{\varphi \mid 0}{f}\right)$. Da sieht man sofort, daß die Bedingungen 1, 2 in Satz 91a mit φ für ψ genau das gleiche besagen wie die Bedingungen 1, 2 im Satz 90 mit g für ψ. Also genügt ihnen in der Tat ein und nur ein ψ.

(Für 91b.) Es ist $\psi \lesssim P$, also ist auch ψ ein III-Ding. Die Bedingung „ψ ist ein III-Ding, und es genügt den Bedingungen 1, 2 in Satz 91a“ ist unschwer auf die Form $[h, \langle\langle \varphi, P \rangle, \psi \rangle] \neq A$ zu bringen (h von φ, P, ψ unabhängig). Da für jedes φ, P diese Bedingung für ein und nur ein ψ, nämlich $\mathcal{J}(\varphi, P)$, erfüllt wird, so können wir III. 3. anwenden; es ist dann

$$[\chi, \langle \varphi, P \rangle] = \mathcal{J}(\varphi, P),$$

wie behauptet wurde.

Schließlich wenden wir uns der finiten (gewöhnlichen, vollständigen) Induktion zu. In ihrer allgemeinsten Form wird sie durch Satz 91 für $P = \omega$ dargestellt. 1. bezieht sich dann auf alle x, die nicht natürliche Zahlen sind, 2. auf alle $x NZ$. Es ist aber wohl motiviert noch eine etwas engere Fassung derselben näher zu betrachten, weil diese die meistangewandte Form der Definition durch vollständige Induktion ist.

Satz 92a. *u sei ein I-Ding und φ sei ein II-Ding. Es gibt ein und nur ein II-Ding ψ, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Wenn nicht $x\,\boldsymbol{NZ}$ ist, so ist* $[\psi, x] = A$ (d. h.: $\psi \lesssim \omega$).

2′. *Es ist* $[\psi, 0] = u$.

2″. *Wenn $x\,\boldsymbol{NZ}$ ist, so ist* $[\psi, x+1] = [\varphi, \langle x, [\psi, x]\rangle]$.

Dieses ψ ist wegen 1. ($\psi \lesssim \omega$) ein III-Ding, wir bezeichnen es mit $\mathcal{J}(\varphi, u)$.

Satz 92b. *Wegen $\mathcal{J}(\varphi, u) \lesssim \omega$ ist $\mathcal{J}(\varphi, u)$ stets ein III-Ding. Es gibt ein II-Ding χ, so daß für alle III-Dinge φ*

$$\mathcal{J}(\varphi, u) = [\chi, \langle \varphi, u\rangle]$$

ist.

Beweis. (Für 92a.) Wir setzen in 91a $P = \omega$ und versuchen 92a auf diesen Fall zurückzuführen.

Es sei nun ψ ein III-Ding. Wir bringen diese Bedingungen: „Entweder ist $x = 0$ und $y = u$; oder es gibt ein $t\,\boldsymbol{NZ}$ mit $x = t+1$, $y = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$" auf die Form $[f, \langle\langle x, \psi\rangle, y\rangle] \mp A$ (f abhängig von u und φ, aber unabhängig von ψ, x und y). Für $x = 0$ genügt denselben ein einziges y: $y = u$; und für $x = t+1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ auch ein einziges: $y = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$. Wir können also III. 3. anwenden, dieses y ist gleich $[g, \langle x, \psi\rangle]$. Dann wird für $x = 0$ $[g, \langle 0, \psi\rangle] = u$, und für $x = t+1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ $[g, \langle t+1, \psi\rangle] = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle]$.

Dies können wir auch so schreiben:

$$\left[g, \left\langle 0, \left(\frac{\psi \mid 0}{0}\right)\right\rangle\right] = u,$$

$$\left[g, \left\langle t+1, \left(\frac{\psi \mid 0}{t+1}\right)\right\rangle\right] = \left[\varphi, \left\langle t, \left[\left(\frac{\psi \mid 0}{t+1}\right), t\right]\right\rangle\right] = [\varphi, \langle t, [\psi, t]\rangle].$$

Nun ist jedes $x\,\boldsymbol{NZ}$ $= 0$ oder $= t+1$, $t\,\boldsymbol{NZ}$ (dann ist $t < x$, also $t\,\boldsymbol{NZ}$), da 0 die einzige $\boldsymbol{LZ}$ unter den $\boldsymbol{NZ}$ ist (Satz 89). Also sind 2′. und 2″. des Satzes 92a mit den folgenden Bedingungen gleichbedeutend:

$$[\psi, 0] = \left[g, \left\langle 0, \left(\frac{\psi \mid 0}{0}\right)\right\rangle\right],$$

$$[\psi, t+1] = \left[g, \left\langle t+1, \left(\frac{\psi \mid 0}{t+1}\right)\right\rangle\right], \quad t\,\boldsymbol{NZ},$$

d. h.

$$[\psi, x] = \left[g, \left\langle x, \left(\frac{\psi \mid 0}{x}\right)\right\rangle\right]$$

für alle $x\,\boldsymbol{NZ}$. Damit haben wir aber bereits die Bedingung 2 des Satzes 91a gewonnen.

Wir sehen: Ein ψ befriedigt die Bedingungen des Satzes 92a mit φ dann und nur dann, wenn es den Bedingungen des Satzes 91a mit dem soeben hergestellten g genügt. Also gibt es ein und nur ein solches ψ.

(Für 92b.) Dieser Satz ist mit genau denselben Überlegungen zu beweisen wie Satz 91b. Man bringt die Eigenschaft: „ψ ist ein III-Ding und genügt den Bedingungen 1 sowie $2'$ und $2''$ in Satz 92a" auf die Form $[h, \langle\langle\varphi, u\rangle, \psi\rangle] \neq A$; dieser Bedingung genügt dann ein einziges ψ, nämlich $\mathcal{J}(\varphi, u)$. Nach Anwendung von III. 3. wird also:

$$\mathcal{J}(\varphi, u) = [\chi, \langle\varphi, u\rangle].$$

Schluß.

Nach den Entwicklungen der Kapitel I bis IX bereitet es keine besonderen Schwierigkeiten, die verschiedenen Disziplinen der allgemeinen Mengenlehre in unsere Axiomatik zu übertragen.

In erster Linie wäre das Addieren, Multiplizieren und Potenzieren von Ordnungszahlen zu definieren, was mit Hilfe des Prinzips der transfiniten Induktion (Satz 90) ohne weiteres geht. Sodann ist die Theorie der „normalen Ordnungszahlen-Funktionen" und die der „kritischen Stellen" zu entwickeln[37]). Ferner könnte (in teilweiser Anlehnung an die entsprechenden Operationen mit Ordnungszahlen) der Kalkül mit Kardinalzahlen (Mächtigkeiten) entwickelt werden, wobei natürlich vom Auswahlprinzip Gebrauch gemacht werden muß.

Eine andere Richtung der Fortsetzung ist die nähere Untersuchung der Mengen ω (in erster Linie mit Hilfe des in Satz 92a aufgestellten Prinzips der Definition durch vollständige Induktion) und $\mathcal{P}(\omega)$. Die letztere entspricht offenbar dem Linearkontinuum zwischen 0 und 1, oder auch (bei geeigneter Deutung) der Menge der reellen oder komplexen Zahlen, hier ergibt sich also die mengentheoretische Begründung der Mathematik.

Auf diese Fragen einzugehen liegt aber bereits außerhalb des Rahmens unserer Darstellung; denn von dieser Stelle an bietet die Übertragung der klassischen Gedankengänge der allgemeinen Mengenlehre und der Mathematik in unsere Axiomatik keine neuen Gesichtspunkte mehr.

---

[37]) Über die „normalen Ordnungszahlen-Funktionen" und ihre „kritischen Stellen", sowie andere verwandte Probleme, vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 114ff.

(Eingegangen am 13. Juli 1927.)