Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie[1].

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Einleitung.

Die wichtigsten allgemeinen Sätze über hyperkomplexe Systeme gehen auf Molien (Math. Annalen Bd. 41 und Dorpater Ber. 1897) zurück. Im wesentlichen unabhängig davon hat Frobenius kurz darauf die Theorie der hyperkomplexen Systeme und ihrer Darstellungen — insbesondere die Darstellungstheorie endlicher Gruppen — einheitlich entwickelt. Die Grundlage bildet der auf Dedekind zurückgehende Begriff der Gruppendeterminante, allgemeiner der Determinante eines beliebigen hyperkomplexen Systems. Frobenius zeigt, daß den verschiedenen irreduziblen Faktoren dieser Determinante (als Koeffizientenbereich gilt immer der Körper aller komplexen Zahlen) die verschiedenen irreduziblen Darstellungsklassen entsprechen, und daß auf diese Art alle irreduziblen Darstellungsklassen erschöpft werden. Eine solche Darstellungsklasse ist vollständig charakterisiert durch ihr „Charakterensystem"; im Fall der endlichen Gruppen entsteht dies Charakterensystem durch Zerfällung der Determinante desjenigen kommutativen hyperkomplexen Systems, das aus den Klassen konjugierter Elemente der Gruppe abgeleitet ist. Diese Determinante zerfällt in Linearfaktoren, mit den Charakteren als Koeffizienten — eine direkte Verallgemeinerung des zuerst von Dedekind erhaltenen Resultates, daß die Gruppendeterminante einer endlichen Abelschen Gruppe in Linearfaktoren zerfällt, deren Koeffizienten die verschiedenen Charaktere der Abelschen Gruppe sind (Briefwechsel mit Frobenius).

---

[1]) Das Folgende ist eine von B. L. van der Waerden angefertigte freie Ausarbeitung meiner Vorlesung vom Wintersemester 1927/28. Die Bearbeitung für den Druck haben wir gemeinsam vorgenommen. Ich bin B. L. van der Waerden auch noch für eine Reihe von kritischen Bemerkungen zu Dank verpflichtet.

Diese begrifflich einfachen und durchsichtigen Resultate werden aber bei Frobenius durch mühevolle Rechnung gewonnen. Die spätere Entwicklung galt einer vereinfachten Herleitung dieser Resultate, und zugleich ihrer Ausdehnung bei Zugrundelegung eines beliebigen Körpers als Koeffizientenbereich. Diese spätere Entwicklung hat sich für hyperkomplexe Systeme und Darstellungstheorie völlig getrennt vollzogen. Die hyperkomplexen Systeme fanden eine arithmetische Behandlung durch Wedderburn: Jedes hyperkomplexe System wird eindeutig direkte Summe zweiseitig direkt unzerlegbarer Ringe; bei Systemen ohne Radikal werden diese unzerlegbaren Ringe isomorph dem System aller n-reihigen Matrizen mit Elementen aus einem — im wesentlichen eindeutig bestimmten — zugeordneten nicht notwendig kommutativen Körper [2]). Die Darstellungstheorie fand eine elementare Begründung durch Burnside und I. Schur, die unabhängig vom hyperkomplexen System direkt von einer gegebenen Darstellung ausgingen und mit Matrizensätzen operierten. Insbesondere behandelte Schur die Frage nach den Zahlkörpern kleinsten Grades, in denen eine in einem gegebenen Körper irreduzible Darstellung absolut zerfällt. Diese absolut irreduziblen Bestandteile gehören zu endlich vielen konjugierten Darstellungsklassen. Der Grad der gesuchten Zahlkörper wird gleich dem Produkt aus der Anzahl dieser Klassen mit dem Index (Anzahl der Bestandteile in jeder der konjugierten Klassen). Das Haupthilfsmittel der Schurschen Theorie bildet das System aller mit einer irreduziblen Darstellung vertauschbaren Matrizen [3]).

In der folgenden rein arithmetischen Begründung erscheinen hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie wieder als ein einheitliches Ganzes — als Spezialfall einer allgemeinen Theorie der nichtkommutativen Ringe, die nur gewissen Endlichkeitsbedingungen genügen. Und zwar handelt es sich um eine Theorie der Modul- und Idealklassen in bezug auf diese Ringe mit dem Hauptresultat, daß die irreduziblen Modulklassen schon durch die entsprechenden Idealklassen erschöpft werden; daß insbesondere für Ringe ohne Radikal alle Modulklassen in irreduzible zerfallen (vollständig reduzibel werden). Das ist das arithmetische Äquivalent des Frobeniusschen Resultates, daß die irreduziblen Faktoren der regulären Gruppen- (bzw. System-) Determinante schon die Gesamtheit der irreduziblen Darstellungsklassen erschöpfen und daß bei Systemen ohne Radikal volle Reduzibilität der Darstellungen gilt. Die Betrachtung der Systemdeterminante und ihrer Zerfällung läßt sich nämlich auffassen als ein Übergang zur Norm, während hier die direkte Summenzerlegung der Ideale und ihre Kompositionsreihen

---

[2]) Vgl. die Literaturangaben bei Dickson, Algebras and their Arithmetics (deutsche Ausgabe: Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927).

[3]) Vgl. die Literaturangaben im 10. Kapitel der Speiserschen Gruppentheorie.

direkt behandelt werden. Die Darstellungstheorie aber wird vermöge des Begriffs des Darstellungsmoduls eine Theorie der Modulklassen.

Die Einführung der Modul- und Idealklassen ist rein gruppentheoretisch begründet. Moduln und Ideale werden aufgefaßt als Abelsche Gruppen gegenüber der Addition, dadurch eingeschränkt, daß sie gewisse Multiplikationen mit Ringelementen gestatten: sie bilden „Gruppen mit Operatoren" (§ 1). Für solche Gruppen tritt an Stelle des gewöhnlichen Isomorphismus der „Operatorisomorphismus" (§ 2); unter sich operator-isomorphe Gruppen (eines festen Bereichs) werden in eine Klasse zusammengefaßt — ein Klassenbegriff, der etwa im Falle der Ideale eines Zahlkörpers mit dem üblichen zusammenfällt. Die Theorie der Gruppen mit Operatoren geht auf W. Krull und O. Schmidt zurück (vgl. Anm. [6])), sie wird im I. Kapitel systematisch entwickelt. Die auch hier gültig bleibenden Sätze über Kompositionsreihen, direktes Produkt (bzw. Summe) und vollständig reduzible Gruppen — Eindeutigkeitssätze im Sinn der oben erwähnten Klasseneinteilung — bilden die Grundlage alles Folgenden.

Sie ergeben vorerst die allgemeinen *Eindeutigkeitssätze* der irreduziblen Diagonalbestandteile bei *beliebigen Darstellungen* (III. Kapitel § 16), auf Grund der Tatsache des eineindeutigen Entsprechens der Darstellungsklassen mit den Klassen der Darstellungsmoduln, also Klassen von Gruppen mit Operatoren. Die weitergehende Frage nach der *Gesamtheit* der Darstellungen erfordert ein genaueres Eingehen auf die Struktur der darzustellenden Ringe, also im Spezialfall der hyperkomplexen Systeme. Im II. Kapitel werden die Wedderburnschen Resultate neu gewonnen und weitergeführt, auf Grund der gruppentheoretischen Auffassung, wonach die Betrachtung der einseitigen Ideale im Vordergrund steht. Und zwar zeigt es sich, daß der „Vielfachenkettensatz" für Rechtsideale oder die damit identische „Minimalbedingung" (in jeder Menge von Rechtsidealen gibt es mindestens ein — in der Menge — minimales) als Endlichkeitsbedingung ausreicht[4]). Es ergibt sich die Identität der Ringe ohne Radikal mit Minimalbedingung mit den (rechts) vollständig reduziblen Ringen mit Einheitselement. Bei solchen Ringen gehören alle einfachen Rechtsideale eines zweiseitig unzerlegbaren Ringes derselben Klasse an, besitzen daher

[4]) Die Wedderburnschen Schlußweisen lassen sich übertragen, wenn „Doppelkettensatz" vorausgesetzt wird. Vgl. E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Hamb. Abh. 1927. Vgl. auch A. Suschkewitsch, Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, Math. Annalen **99** (1928), S. 30—50, wo für (endliche) Bereiche mit nur *einer* assoziativen, nicht umkehrbaren Verknüpfung parallellaufende Struktursätze entwickelt werden. Die Aufspaltung des „Kerns" bei Suschkewitsch in Rechts- und Linksgruppen entspricht der Summendarstellung eines zweiseitig einfachen Ringes mit Einheitselement durch Rechts- und Linksideale.

— als Gruppe mit Operatoren — denselben Automorphismenring, der wegen der Einfachheit der Ideale zum Körper wird. Dieser Automorphismenkörper der Klasse ist es, der die von Wedderburn gefundene Matrizendarstellung vermittelt.

Diese Matrizendarstellung im Automorphismenkörper löst zugleich im vollständig reduziblen Fall das Darstellungsproblem, sobald Darstellung in bezug auf den Automorphismenkörper oder seine Unterkörper verlangt wird — also insbesondere in bezug auf den Koeffizientenbereich eines hyperkomplexen Systems. Es gibt — das ist direkte Folge des Satzes von der Zurückführung der Modul- auf Idealklassen — keine weiteren irreduziblen Darstellungen als die Wedderburnsche und diejenigen, die daraus entstehen, wenn die Elemente des Automorphismenkörpers in naheliegender Weise durch Matrizen aus einem Unterkörper ersetzt werden.

Es gibt also im vollständig reduziblen Fall soviel verschiedene irreduzible Darstellungsklassen wie Idealklassen; deren Anzahl stimmt überein mit der Anzahl der verschiedenen zweiseitig unzerlegbaren, also einfachen Ringe. Deren Anzahl ist schließlich wieder identisch mit der Anzahl der unzerlegbaren Komponenten des Zentrums, die kommutative Körper werden. Diese letzteren sind im Fall der hyperkomplexen Systeme mit algebraisch-abgeschlossenem Koeffizientenbereich vollständig bestimmt durch die verschiedenen Ringhomomorphismen (irreduzible Darstellungen) des Zentrums; das sind aber bis auf einen Zahlenfaktor die Charaktere.

Die erhaltenen Resultate ergeben zugleich Übersicht über die irreduziblen Darstellungen von Systemen mit Radikal, insofern sich diese auf die Darstellungen des Restklassenringes nach dem Radikal zurückführen lassen, der ein System ohne Radikal wird.

Wie später gezeigt werden wird, folgt für hyperkomplexe Systeme ohne Radikal aus dem Automorphismenkörper auch die Theorie der „Zerfällungskörper“, d. h. der kommutativen Erweiterungen des Koeffizientenbereichs, in dem die Darstellungen in absolut irreduzible zerfallen — anders ausgedrückt, in dem eine direkte Summenzerlegung in absolut einfache Rechtsideale statthat. Die Zerfällungskörper sind identisch mit denen des Automorphismenkörpers, und alle Zerfällungskörper kleinsten Grades sind den maximalen kommutativen Unterkörpern des Automorphismenkörpers isomorph. Der Zusammenhang mit den oben erwähnten Schurschen Untersuchungen ist dadurch hergestellt, daß die Transponierten der mit der Darstellung vertauschbaren Matrizen gerade eine Darstellung des Automorphismenkörpers liefern[5]) Diese Sätze sollen systematisch im

[5]) Vgl. dazu R. Brauer - E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1927, S. 221.

Rahmen einer Galoisschen Theorie nichtkommutativer Körper entwickelt werden.

Die zugrunde gelegten Begriffe — Operatorhomomorphismus und Automorphismenring — ergeben auch die Struktur allgemeiner Ringe mit Radikal, die nur der Minimalbedingung genügen; das wird von anderer Seite ausgeführt werden.

I. Kapitel.

Gruppentheoretische Grundlagen.

§ 1.

Gruppen mit Operatoren[6]).

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe (endlich oder unendlich); Elemente $a, b, \ldots$.

Unter einem Operatorenbereich Ω für die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei eine Menge von neuen Symbolen $\mathsf{H}, \Theta, \ldots$ verstanden, so daß zu jedem a aus $\mathfrak{G}$ und jedem Θ aus Ω ein Θa aus $\mathfrak{G}$ eindeutig definiert ist, und daß das distributive Gesetz erfüllt ist:

$$\Theta(a b) = \Theta a \cdot \Theta b.$$

Demnach definiert jeder Operator einen Homomorphismus der Gruppe in sich, wobei die Gruppe auf sich selbst oder auf eine Untergruppe abgebildet wird. Das Einheitselement geht dabei ins Einheitselement, Inverses in Inverses über.

Ein Operatorenbereich heißt ein *absoluter*, wenn verschiedene Operatoren auch verschiedene Homomorphismen definieren. Aus einem beliebigen Operatorenbereich geht ein absoluter hervor, indem man alle die Elemente gleichsetzt, die denselben Homomorphismus erzeugen. Ein absoluter Operatorenbereich ist eineindeutiges Bild einer Untermenge der Menge aller Homomorphismen der Gruppe in sich.

Eine *zulässige Untergruppe* $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ — in bezug auf einen festen Operatorenbereich Ω — ist eine solche Untergruppe, die den Operatorenbereich gestattet, wo also Θa in $\mathfrak{H}$ für jedes a aus $\mathfrak{H}$ und Θ aus Ω.

Beispiele. 1. Die Operatoren seien die inneren Automorphismen: $\Theta a = c^{-1} a c$. Zulässige Untergruppen sind die Normalteiler.

2. Die Operatoren seien alle Automorphismen. Zulässige Untergruppen sind die „charakteristischen Untergruppen", welche bei allen Automorphismen in sich übergehen.

---

[6]) Die hier erklärten Begriffe stammen von W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 161—196, und O. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 34—41.

3. $\mathfrak{S}$ sei ein Ring, d. h. eine Abelsche Gruppe gegenüber Addition, wo auch eine Multiplikation definiert ist, mit den Eigenschaften

$$r(a+b)=ra+rb,$$
$$(a+b)r=ar+br,$$
$$ab\cdot c=a\cdot bc.$$

Jedes Element r definiert zugleich zwei Operatoren: die Operatoren rx und xr. Zugelassene Untergruppen sind die „Ideale" $\mathfrak{a}$, und zwar:

linksseitige, die die Operationen rx gestatten: $r\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}$;

rechtsseitige, die die Operationen xr gestatten: $\mathfrak{a}r \leqq \mathfrak{a}$;

zweiseitige, die beide Operationen gestatten.

Alle Ideale werden trivial ($=\{0\}$ oder $=\mathfrak{S}$), wenn der Ring $\mathfrak{S}$ ein *Körper* ist, d. h. wenn $\mathfrak{S}-\{0\}$ eine Gruppe gegenüber der Multiplikation ist[7]).

4. *Moduln in bezug auf einen Ring* $\mathfrak{o}$.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, und $\mathfrak{M}$ eine Abelsche Gruppe, additiv geschrieben. Es sei eine Multiplikation $r\cdot a$ der Elemente von $\mathfrak{o}$ mit denen von $\mathfrak{M}$ gegeben; das Produkt soll wieder in $\mathfrak{M}$ enthalten sein. Man fordert:

$$\left.\begin{aligned} r(a+b)&=ra+rb\\ rs\cdot a&=r\cdot sa\\ (r+s)a&=ra+sa\end{aligned}\right\}\begin{array}{l} r,s \text{ in } \mathfrak{o},\\ a,b \text{ in } \mathfrak{M}.\end{array}$$

Dann heißt $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-*Modul*; genauer, da die Multiplikatoren aus $\mathfrak{o}$ links geschrieben werden, ein $\mathfrak{o}$-*links-Modul*. Der Ring $\mathfrak{o}$ ist zugleich Operatorenbereich. Ist es ein absoluter, d. h. ergeben verschiedene Ringelemente auch verschiedene Operationen, so redet man von einem *absoluten Multiplikatorenbereich* fur den Modul $\mathfrak{M}$.

Wie oben kann man von einem beliebigen Multiplikatorenbereich zum absoluten übergehen durch Gleichsetzen der Elemente, welche dieselbe Operation erzeugen. Der absolute Multiplikatorenbereich ist wieder ein Ring. Die zulässigen Untergruppen eines Moduls $\mathfrak{M}$ heißen *Untermoduln*. Ist speziell jetzt $\mathfrak{o}=\mathfrak{M}$, so kommt man auf die Linksideale zurück[8]).

---

[7]) Es wird also weder für Ringe noch für Körper das kommutative Gesetz der Multiplikation vorausgesetzt.

[8]) In gleicher Weise fordert man für Rechtsmoduln:

$$(a+b)r=ar+br,$$
$$a\cdot rs=ar\cdot s,$$
$$a(r+s)=ar+as.$$

5. *Doppelmoduln.* Ist $\mathfrak{M}$ zugleich $\mathfrak{o}$-links-Modul und $\mathfrak{o}'$-rechts-Modul, und ist außerdem für a in $\mathfrak{o}$, α in $\mathfrak{M}$, a' in $\mathfrak{o}'$ stets:

$$a \cdot \alpha a' = a \alpha \cdot a',$$

so heißt $\mathfrak{M}$ ein *Doppelmodul.*

6. *Automorphismenring einer Abelschen Gruppe*[9]. Für die Homomorphismen in sich einer (additiv geschriebenen) Abelschen Gruppe kann man eine Addition und eine Multiplikation definieren durch die Formeln:

$$(\mathsf{H} + \Theta) a = \mathsf{H} a + \Theta a, \qquad (\mathsf{H} \Theta) a = \mathsf{H} (\Theta a).$$

Die so definierten Operationen stellen ersichtlich wieder Homomorphismen dar, gehören also wieder dem System an. Das System bildet einen Ring, und die Abelsche Gruppe läßt sich nach 4. auffassen als Modul in bezug auf diesen Ring.

Mit „Untergruppen" sind fortan immer zulässige Untergruppen gemeint. Der Durchschnitt $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B}$ zweier zulässiger Untergruppen ist wieder eine zulässige Untergruppe. Ebenso das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, falls mindestens eine der beiden Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Normalteiler ist.

§ 2.

Die Isomorphiesätze.

Eine Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ — wobei $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ denselben Operatorenbereich besitzen sollen — heißt *Operatorhomomorphismus,* wenn sie erstens ein Homomorphismus im gewöhnlichen Sinne ist ($ab \to \bar{a}\bar{b}$), und wenn zweitens, sobald a auf $\bar{a}$ abgebildet ist, Θa auf $\Theta \bar{a}$ abgebildet wird[10]. Zeichen: $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$. Ist die Zuordnung eineindeutig, so heißt sie *Operatorisomorphie.* Zeichen: $\mathfrak{G} \simeq \overline{\mathfrak{G}}$. Man beweist entsprechend wie bei gewöhnlichen Gruppen den Homomorphiesatz:

Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ ein operatorhomomorphes Bild von $\mathfrak{G}$, so wird $\overline{\mathfrak{G}}$ operatorisomorph einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N}$ ein zulässiger Normalteiler ist, bestehend aus allen Elementen von $\mathfrak{G}$, denen die Einheit in $\overline{\mathfrak{G}}$ entspricht. Umgekehrt definiert jeder zulässige Normalteiler $\mathfrak{N}$ eine Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, die den Operatorenbereich von $\mathfrak{G}$ gestattet und ein operatorhomomorphes Abbild von $\mathfrak{G}$ ist.

---

[9] Vgl. A. Chatelet, Les Groupes Abéliens finis, Paris, Gauthier-Villars, 1925, p. 99.

[10] Man kann den Begriff des Operatorhomomorphismus dahin erweitern, daß die Gruppen $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ getrennte Operatorenbereiche besitzen, wobei der Homomorphismus nicht nur $\mathfrak{G}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$, sondern auch die Operatorenbereiche aufeinander abbildet, derart, daß, wenn a auf $\bar{a}$ und Θ auf $\bar{\Theta}$ abgebildet wird, $\bar{\Theta}\bar{a}$ das Bild von Θa ist. In dieser allgemeinen Fassung umfaßt der Begriff des Operatorhomomorphismus auch den des Ringhomomorphismus; vgl. § 8.

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine Normalteiler außer sich selbst und der Einheitsgruppe besitzt. Jeder Homomorphismus einer einfachen Gruppe ist entweder ein Isomorphismus, oder jedem Element wird das Einheitselement zugeordnet.

Erster Isomorphiesatz. *Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ homomorphes Abbild von $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, und $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{G}$, denen Elemente von $\overline{\mathfrak{A}}$ zugeordnet sind, so ist $\mathfrak{A}$ wieder Normalteiler, und*

$$\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Beweis. $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}} \sim \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$, also $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$. Also $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$ isomorph einer Faktorgruppe in $\mathfrak{G}$; der zugehörige Normalteiler ist die Gesamtheit der Elemente, denen die Einheit in $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$ entspricht; das ist aber $\mathfrak{A}$.

Zusatz. Setzt man nach dem Homomorphiesatz $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so wird $\mathfrak{A}$ sicher $\mathfrak{N}$ umfassen. Aus $\mathfrak{A}$ läßt sich $\overline{\mathfrak{A}}$ zurückgewinnen: $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$. Die Zuordnung $\mathfrak{A} \rightleftarrows \overline{\mathfrak{A}}$ ist eineindeutig. Die Formel (1) läßt sich auch schreiben:

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\big/(\mathfrak{A}/\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}.$$

Zweiter Isomorphiesatz. *Sei $\mathfrak{A}$ Untergruppe, $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B}$ Normalteiler in $\mathfrak{A}$, und*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B}.$$

Beweis. Bei der Homomorphie $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ werden insbesondere den Elementen a von $\mathfrak{A}$ gewisse Restklassen $a\,\mathfrak{B}$ zugeordnet, die zusammen die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ ausmachen. Also $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$, woraus nach dem Homomorphiesatz die Behauptung folgt.

Eine operatorhomomorphe Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich selbst oder auf eine Untergruppe heißt ein *Homomorphismus-in-sich* von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ speziell eine (additiv geschriebene) Abelsche Gruppe (mit Operatoren) und definiert man wie oben (§ 1, Beispiel 6) Summe und Produkt von Homomorphismen, so bilden die Operatorhomomorphismen der Gruppe in sich einen Ring, den *Automorphismenring.*

Der Automorphismenring einer einfachen Abelschen Gruppe (mit Operatoren) ist ein Körper.

Beweis. Jeder Homomorphismus bildet die Gruppe entweder auf sich oder auf die Nullgruppe ab (da es keine anderen zulässigen Untergruppen gibt). Die Homomorphismen, welche nicht alles auf die Null abbilden, sind nach dem oben über einfache Gruppen bemerkten Isomorphismen, und die isomorphen Abbildungen einer Gruppe auf sich bilden eine Gruppe. Somit wird der Ring nach Weglassung des Nulloperators eine Gruppe, also ist der Ring selbst ein Körper.

Ist speziell $\mathfrak{G}$ ein $\mathfrak{o}$-links-Modul, und schreibt man die Operatorhomomorphismen als Rechtsoperatoren, so wird $\mathfrak{G}$ ein *Doppelmodul in bezug auf* $\mathfrak{o}$ *links und den Automorphismenring rechts.* Denn die Tatsache, daß die neuen Operatoren Γ als Homomorphismen gewählt waren, wird ausgedrückt durch die Formeln

$$(a+b)\Gamma = a\Gamma + b\Gamma, \qquad ra\cdot\Gamma = r\cdot a\Gamma,$$

die (zusammen mit den übrigen, schon früher gedeuteten) den Doppelmodul charakterisieren.

Ist umgekehrt ein Doppelmodul gegeben, so drücken ebendieselben Formeln aus, daß jedes Element des Rechtsmultiplikatorenbereichs einen Operatorhomomorphismus in bezug auf die Linksoperatoren induziert, und umgekehrt.

§ 3.

Kompositionsreihen.

Wenn es in $\mathfrak{G}$ eine endliche Reihe von zulässigen Untergruppen

$$(2) \qquad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_r = \mathfrak{E}$$

($\mathfrak{E}$ ist die aus der Einheit e allein bestehende Gruppe) gibt, so daß jedes $\mathfrak{A}_i$ Normalteiler im vorangehenden ist, und es unmöglich ist, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe noch eines von gleicher Eigenschaft einzuschieben, so heißt die Reihe eine *Kompositionsreihe.*

Die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{r-1}/\mathfrak{E}$ heißen *Kompositionsfaktoren.* Sie sind *einfache Gruppen*, d. h. besitzen keine zulässigen Normalteiler außer sich selbst und der Einheitsgruppe.

Nimmt man unter die Operatoren insbesondere alle inneren Automorphismen auf, so besteht die Reihe (2) aus lauter Normalteilern, und man nennt sie *Hauptreihe.* Nimmt man alle Automorphismen auf, so heißt sie *charakteristische Reihe.* Bei den weiteren Beispielen des § 1 würde es sich um Kompositionsreihen von Idealen in $\mathfrak{o}$, bzw. Kompositionsreihen von Moduln oder Doppelmoduln handeln.

Satz von Jordan-Hölder. *Wenn für eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *zwei verschiedene Kompositionsreihen existieren:*

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_r = \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_s = \mathfrak{E},$$

so haben sie dieselbe Länge: $r = s$, *und die Kompositionsfaktoren*

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_{r-1}/\mathfrak{E}$$

sind in irgendeiner Reihenfolge isomorph zu

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}/\mathfrak{B}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_{s-1}/\mathfrak{E}.$$

Für den Beweis siehe etwa E. Noether, Abstrakter Aufbau usw., Math. Annalen **96** (1926), § 10, S. 57. Gleichzeitig wird dort bewiesen:

Wenn es in $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe gibt, so läßt sich durch jeden Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe ziehen.

Die Existenz einer Kompositionsreihe ist klar für endliche Gruppen, allgemeiner für diejenigen Gruppen, in denen eine Maximal- und eine Minimalbedingung gilt:

Die *Maximalbedingung* besagt, daß es in jeder Menge von Untergruppen eine maximale Untergruppe gibt, d. h. eine solche, die nicht mehr von einer anderen Untergruppe der Menge umfaßt wird. Äquivalent damit ist, daß jede aufsteigende Kette von Untergruppen $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2 < \mathfrak{A}_3 \ldots$ nach endlich vielen Gliedern abbricht.

Die *Minimalbedingung* besagt, daß es in jeder Menge von Untergruppen eine minimale gibt, die keine andere der Menge mehr umfaßt, oder auch daß jede absteigende Kette $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \mathfrak{A}_3 \ldots$ nach endlichvielen Gliedern abbricht.

Sind nur Normalteiler als Untergruppen zugelassen (z. B. bei Abelschen Gruppen), *so folgen aus der Existenz der Kompositionsreihe umgekehrt die Maximal- und Minimalbedingung.*

Beweis. Jeder Normalteiler besitzt eine Kompositionsreihe, deren Länge als *Länge des Normalteilers* bezeichnet wird. Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, so ist die Länge von $\mathfrak{A}$ kleiner als die von $\mathfrak{B}$, da durch $\mathfrak{A}$ eine Kompositionsreihe für $\mathfrak{B}$ gezogen werden kann. Also ist jede Untergruppe kürzester Länge zugleich minimal, und jede von größter Länge zugleich maximal.

§ 4.

Direkte Produkte und Durchschnitte.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *direktes Produkt* von zwei Faktoren, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, wenn

1. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sind,
2. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$,
3. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$.

Die Definition ist offenbar äquivalent mit:

Jedes Element g von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig darstellbar als $g = a\,b$, a in $\mathfrak{A}$, b in $\mathfrak{B}$, und die Elemente von $\mathfrak{A}$ sind mit denen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar: $a\,b = b\,a$.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *direktes Produkt* von n Faktoren, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$, wenn $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1} \mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$ gesetzt, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i$ direkt für jedes i ist.

Die Definition ist wieder äquivalent mit:

Jedes g von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig darstellbar als

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n, \quad a_i \text{ in } \mathfrak{A}_i,$$

und die Elemente von $\mathfrak{A}_i$ sind mit denen von $\mathfrak{A}_k$ vertauschbar.

Die folgenden Tatsachen werden oft benutzt:

1. Ist $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \doteq \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \times \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$.

2. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_n$, und $\mathfrak{C}_i \leqq \mathfrak{A}_i$, so $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$. (Folgt aus der Darstellung der Elemente von $\mathfrak{A}_i$ durch die $\mathfrak{C}_j$.)

3. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{K} \frown \mathfrak{B})$. (Folgt aus der Darstellung der Elemente von $\mathfrak{K}$ in der Form $a\,b$, wobei der zweite Faktor sowohl zu $\mathfrak{K}$ wie zu $\mathfrak{B}$ gehört.)

4. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ (zweiter Isomorphiesatz). Daraus folgt weiter:

5. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, und besitzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Kompositionsreihen der Längen m und n, so besitzt $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe der Länge $m + n$.

6. Ist $\mathfrak{A} \simeq \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \simeq \overline{\mathfrak{B}}$, so $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \simeq \overline{\mathfrak{A}} \times \overline{\mathfrak{B}}$.

Eine Gruppe heißt *direkt unzerlegbar,* wenn sie sich nicht als direktes Produkt von Faktoren $\neq \mathfrak{E}$ darstellen läßt.

Klar ist:

Jede Gruppe mit Minimalbedingung ist direktes Produkt von endlichvielen direkt unzerlegbaren Gruppen[11]).

Schreibt man die betreffenden Gruppen additiv, so gehen die Begriffe: Produkt, direktes Produkt, über in Summe, direkte Summe. Zeichen: für eine Summe von Gruppen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots)$, für direkte Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots$.

Der Begriff des „direkten Durchschnittes“ wird zwar im weiteren nicht benutzt, aber die folgenden Sätze über den Zusammenhang zwischen direktem Durchschnitt und direktem Produkt zeigen, wie die Idealtheorie der nächsten Kapitel sich auch mit Durchschnitten statt Summen formulieren läßt, wodurch der Zusammenhang mit den bekannten kommutativen Theorien hergestellt wird.

---

[11]) Wie W. Krull im kommutativen Fall und O. Schmidt allgemein gezeigt haben (vgl. Anmerk. [6])), ist unter Voraussetzung von Maximal- und Minimalbedingung die Darstellung bis auf Isomorphie eindeutig. Da man, ohne den Begriff der direkt-Unzerlegbarkeit zu ändern, alle inneren Automorphismen zum Operatorenbereich hinzunehmen kann, so genügt es, die Endlichkeitsbedingungen für Normalteiler oder die Existenz einer Hauptreihe zu verlangen.

Eine Gruppe $\mathfrak{D}$ heißt *direkter Durchschnitt* von zwei Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$, wenn

1. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sind,
2. $\mathfrak{R} \frown \mathfrak{S} = \mathfrak{D}$,
3. $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$.

Ebenso heißt $\mathfrak{D}$ *direkter Durchschnitt* von n Gruppen $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$, wenn $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{S}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{S}_{i-1} \frown \mathfrak{S}_{i+1} \frown \ldots \frown \mathfrak{S}_n$ gesetzt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_i \frown \mathfrak{S}_i$ direkt für jedes i ist.

Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{D}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sein muß.

Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{S}_n$ direkt und gehen beim Homomorphismus $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ die Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{E}}$ über, so wird $\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{S}}_1 \frown \ldots \frown \overline{\mathfrak{S}}_n$ direkt. Umgekehrt kommt man von jeder solchen Darstellung $\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{S}}_1 \frown \ldots \frown \overline{\mathfrak{S}}_n$ zu einer direkten Darstellung $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{S}_n$ zurück. Durch diese Zuordnung werden Sätze über direkte Durchschnitte bei beliebigem $\mathfrak{D}$ auf den Spezialfall $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ zurückgeführt.

Im Falle $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ und zwei Faktoren stimmen die Bedingungen für direktes Produkt und direkten Durchschnitt überein. Bei n Faktoren besteht folgende eineindeutige Beziehung zwischen direktem Produkt und Durchschnitt:

I. *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i$, *so* $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_i \frown \mathfrak{C}_i$ *direkt und* $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$.

II. *Ist* $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{S}_n = \mathfrak{R}_i \frown \mathfrak{S}_i$ *direkt, so* $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{T}_i$ *und* $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{S}_i$.

B e w e i s von I. Sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_i \frown \mathfrak{C}_i$, dann $\mathfrak{C}_i \geqq \mathfrak{A}_i$; wir zeigen $\mathfrak{C}_i \leqq \mathfrak{A}_i$. Sei c etwa in $\mathfrak{C}_1$, dann ist c in $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$, also ergibt die Komponentendarstellung vermöge der $\mathfrak{A}$:

$$c = a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 e a_3 \ldots a_n = a_1 a_2 e \ldots a_n = \ldots = a_1 \ldots a_{n-1} e.$$

Da das Produkt aller $\mathfrak{A}_i$ direkt ist, stimmen die Darstellungen überein; an jeder Stelle außer der ersten steht einmal e, somit $c = a_1$ oder $\mathfrak{C}_1 \leqq \mathfrak{A}_1$, d. h. $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_1$ und entsprechend $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$. Es folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i \frown \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_i \frown \mathfrak{A}_i = \mathfrak{E}$; $\mathfrak{B}_i \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{G}$, also direkter Durchschnitt.

B e w e i s von II. Sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_i \mathfrak{T}_i$, dann $\mathfrak{T}_i \leqq \mathfrak{S}_i$; wir zeigen $\mathfrak{S}_i \leqq \mathfrak{T}_i$. Sei etwa s in $\mathfrak{S}_1$; es wird — vermöge $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_i \times \mathfrak{R}_i$ — $s = s_1 e = s_2 r_2 = \ldots = s_n r_n$. Bilden wir $t_1 = e r_2 \ldots r_n = t_i r_i$, dann kommt unter Berücksichtigung der elementweisen Vertauschbarkeit von $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{S}_i$: $s t_1^{-1} = s_i t_i^{-1}$, also Element aller $\mathfrak{S}_i$ und damit gleich e.

Also $\mathfrak{S}_1 \leqq \mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}_1$ und entsprechend $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{S}_i$. Es folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_i \mathfrak{T}_i = \mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_i = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}_i \frown \mathfrak{T}_i = \mathfrak{R}_i \frown \mathfrak{S}_i = \mathfrak{E}$; somit $\mathfrak{G}$ direktes Produkt der $\mathfrak{R}_i$.

§ 5.

Vollständig reduzible Gruppen.

Eine Gruppe heißt *vollständig reduzibel,* wenn sie direktes Produkt von endlichvielen einfachen Gruppen ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n.$$

In diesem Fall bilden die Gruppen

$$\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{E}$$

eine Kompositionsreihe. Die Länge ist n, die Kompositionsfaktoren sind $\simeq \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{A}_1$.

Ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, so ist jeder Normalteiler direkter Faktor, und der andere Faktor kann als Produkt von solchen einfachen Gruppen gewählt werden, die in einer vorgelegten Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$ auftreten. Der Normalteiler $\mathfrak{H}$ ist ebenfalls vollständig reduzibel.

Beweis. Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n. \tag{3}$$

Setzt man nun $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}\,\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_i$, so ist $\mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}_i \mathfrak{A}_{i+1}$. Entweder ist nun $\mathfrak{A}_{i+1} \leqq \mathfrak{H}_i$, also $\mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}_i$; dann lassen wir in (3) den Faktor $\mathfrak{A}_{i+1}$ weg. Oder es ist $\mathfrak{H}_i \frown \mathfrak{A}_{i+1}$ ein echter Normalteiler von $\mathfrak{A}_{i+1}$, also $= \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{A}_{i+1}$ direkt. Nach Weglassung der überflüssigen Faktoren wird (3):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{A}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{i_r},$$

also $\mathfrak{H}$ direkter Faktor. Weiter folgt

$$\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G} / \mathfrak{A}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{i_r} \simeq \mathfrak{A}_{j_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{j_\mu},$$

wo $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_\mu}$ die übrigen $\mathfrak{A}_i$ sind; also ist $\mathfrak{H}$ vollständig reduzibel.

Folgerung. *Jede Zerlegung einer vollständig reduziblen Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren ist eine Zerlegung in einfache Faktoren, und gibt demnach zu einer Kompositionsreihe Anlaß, woraus die eindeutige Bestimmtheit der Faktoren, bis auf Isomorphie, folgt.*

§ 6.

Moduln in bezug auf einen Körper. Hyperkomplexe Systeme.

Ein fast triviales Beispiel für vollständig reduzible Gruppen mit Operatoren bilden die Moduln mit endlicher Basis in bezug auf einen (nicht notwendig kommutativen) Körper.

Es sei $\mathfrak{G}$ ein K-Rechtsmodul, und das Einheitselement e von K sei zugleich Einheitsoperator: $a e = a$ für a in $\mathfrak{G}$. Jeder aus einem a abgeleitete Untermodul $a\mathsf{K}$ ist einfach, nämlich gleich dem aus irgendeinem seiner Elemente $\neq 0$ abgeleiteten Modul. Ist also $\mathfrak{H}$ der aus irgendwelchen Elementen abgeleitete Untermodul, und a ein Element, das nicht zu $\mathfrak{H}$ gehört, so ist $\mathfrak{H} \frown a\mathsf{K} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{H} + a\mathsf{K}$ direkt. So kann man von irgendeinem Basiselement a_1 ausgehend, immer neue Basiselemente $a_2, a_3, \ldots$ hinzunehmen und erhält $\mathfrak{G}$ als direkte Summe: $\mathfrak{G} = a_1\mathsf{K} + a_2\mathsf{K} + \ldots + a_n\mathsf{K}$. *Also ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel.*

Die Zahl n, die Länge der Kompositionsreihe, heißt der *Rang* von $\mathfrak{G}$ in bezug auf K. Die Basis $a_1, \ldots, a_n$ ist wegen der eindeutigen Darstellung der Elemente von $\mathfrak{G}$ (und weil e als Einheitsoperator vorausgesetzt wurde) linear-unabhängig.

Jeder Untermodul $\mathfrak{H}$ ist direkter Summand.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{R} = (h_1\mathsf{K} + \ldots + h_s\mathsf{K}) + (r_1\mathsf{K} + \ldots + r_{n-s}\mathsf{K}),$$

oder: *Man kann jede linear-unabhängige Basis von $\mathfrak{H}$ zu einer linear-unabhängigen Basis für $\mathfrak{G}$ ergänzen.* Die r_i kann man sogar aus den ursprünglichen Basiselementen a_i wählen.

Seien $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ linear-unabhängige Basen. Dann ist

$$c_k = \sum a_i \pi_{ik}$$

oder in Matrizen geschrieben:

$$(c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n) P; \qquad P = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \ldots & \pi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n1} & \ldots & \pi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist

$$(a_1, \ldots, a_n) = (c_1, \ldots, c_n) Q.$$

Daraus folgt

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n) P Q,$$
$$(c_1, \ldots, c_n) = (c_1, \ldots, c_n) Q P,$$

also, da die a_i und die c_i linear-unabhängig sind,

$$PQ = QP = E.$$

Spezielle K-Moduln, die zugleich Ringe sind, sind die „Hyperkomplexen Systeme“.

Ein Ring $\mathfrak{o}$, der zugleich Rechtsmodul in bezug auf einen kommutativen Körper K ist, heißt *hyperkomplexes System in bezug auf* K (in der Literatur auch als „Algebra über K“ bezeichnet), wenn:

1. der Rang endlich ist (eine linear-unabhängige Basis sei $u_1, \ldots, u_n$).

2. $ab \cdot \varkappa = a \cdot b\varkappa = a\varkappa \cdot b$. Man drückt das so aus: K ist kommutativ mit $\mathfrak{o}$ verbunden.

3. das Einheitselement ε von K zugleich Einheitsoperator ist: $a\varepsilon = a$ für a in $\mathfrak{o}$.[12])

Wegen $(\sum u_i \alpha_i)(\sum u_k \beta_k) = \sum_{i,k} (u_i u_k)(\alpha_i \beta_k)$ ist das System eindeutig bestimmt, wenn (außer K) die *Multiplikationstafel* gegeben ist, die angibt, wie jedes Produkt $u_i u_k$ sich durch die u_j ausdrückt: $u_i u_k = \sum_j u_j \gamma_{ik}^j$. (Die γ_{ik}^j müssen den bekannten Relationen genügen, die aus dem Assoziativgesetz folgen.)

Wenn $\mathfrak{o}$, was wir oft annehmen werden, ein Einheitselement e ($ea = ae = a$ für alle a) besitzt, so kann man die Elemente $\varkappa$ von K mit $e\varkappa$ identifizieren, also K als Unterkörper von $\mathfrak{o}$ annehmen. Das hyperkomplexe System läßt sich dann auch beschreiben als *Ring von endlichem Rang in bezug auf einen im Zentrum gelegenen Körper.*

Ein Beispiel eines hyperkomplexen Systems ist der *Gruppenring* einer endlichen Gruppe, der entsteht, wenn man für die Basiselemente u_i die Elemente einer endlichen Gruppe nimmt, und als Multiplikation die Gruppenmultiplikation. Der Körper K ist dabei beliebig.

§ 7.

Matrizes.

Die quadratischen Matrizes (π_{ik}) mit π_{ik} aus einem Ring $\mathfrak{o}$ bilden bei der gewöhnlichen Matrixmultiplikation $\sum \pi_{ij}\varrho_{jk} = \sigma_{ik}$ und Addition $\pi_{ik} + \varrho_{ik} = \sigma_{ik}$ einen Ring.

Eine Matrix mit Elementen aus einem Körper K, zu der es eine Rechts- und eine Linksinverse gibt, heißt *regulär.*

Wir sahen in § 6: *Die überführende Matrix zweier linear-unabhängigen Basen eines* K-*Moduls ist regulär.*

Für Regularität genügt Rechtsinverses; denn bilden wir einen K-Rechtsmodul mit linear-unabhängiger Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ (Modul aus Linearform der Unbestimmten $a_1, \ldots a_n$), und setzen wir

$$(c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n) P,$$

so wird

$$(c_1, \ldots, c_n) P^{-1} = (a_1, \ldots, a_n) P P^{-1} = (a_1, \ldots, a_n);$$

also ist $(c_1, \ldots, c_n)$ wieder Basis, also wieder linear-unabhängig, also die Matrix P regulär. Außerdem ist die Rechtsinverse gleich der Linksinversen.

Ebenso genügt eine Linksinverse.

---

[12]) Die Bedingung 2. sagt aus, daß die Multiplikation mit einem Element aus K einen Homomorphismus für $\mathfrak{o}$ bedeutet, wenn $\mathfrak{o}$ sowohl als $\mathfrak{o}$-Links-, wie $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul aufgefaßt wird. Vermöge 3. sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.

Besitzt P eine Linksinverse, so ist P kein linker Nullteiler.

Beweis. Aus $PA = 0$ folgt $A = P^{-1} PA = 0$.

Also besitzt P auch *nur* eine Rechtsinverse, welche nach § 6 mit der Linksinversen zusammenfällt.

Versteht man, wie üblich, unter $P_\varkappa$ die Matrix $(\pi_{ik}\varkappa)$, und unter C_{ik} die Matrix, die an der Stelle $i\,k$ das Einheitselement und sonst überall Nullen hat, so ist

$$(\pi_{ik}) = \sum C_{ik}\pi_{ik};$$

also bilden die Matrizes in K einen K-Modul vom Rang n^2. Die C_{ik} genügen den Relationen.

$$C_{ij}\,C_{jk} = C_{ik},$$
$$C_{ij}\,C_{\bar{j}k} = 0, \quad j \neq \bar{j}.$$

Die Matrizes in K bilden somit einen endlichen K-Modul, und, wenn K kommutativ ist, ein hyperkomplexes System.

II. Kapitel.

Nichtkommutative Idealtheorie.

§ 8.

Homomorphiesatz für Ringe.

Ist $\mathfrak{a}$ zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{o}$, so ist der Restklassenbereich $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ nicht nur $\mathfrak{o}$-Modul, sondern auch Ring, wie man mühelos sieht. Jedes homomorphe Abbild von $\mathfrak{o}$ ist wieder ein Ring, und isomorph einem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist. Beweis wie bei Gruppen.

Ist insbesondere $\mathfrak{o}$ ein Körper, so gibt es keine anderen Ideale als (0) und $\mathfrak{o}$; also ist hier der Homomorphismus entweder ein Isomorphismus, oder er ordnet jedem Element die Null zu.

Ist insbesondere der Ring $\mathfrak{o}$ ein K-Rechtsmodul, wo K ein elementweis mit $\mathfrak{o}$ vertauschbarer Ring sein soll: — $ab\cdot\varkappa = a\cdot b\varkappa = a\varkappa\cdot b$ — (z. B. wenn es sich um ein hyperkomplexes System in bezug auf einen kommutativen Körper K handelt), so werden als zulässige (rechts-, links- oder zweiseitige) Ideale nur solche betrachtet, die zugleich K-Moduln sind, und man verlangt außer Ringhomomorphismus auch noch Operatorhomomorphismus in bezug auf Multiplikation mit K. Die zulässigen Ideale werden Doppelmoduln in bezug auf $\mathfrak{o}$ und K. (Bei hyperkomplexen Systemen versteht man unter „Idealen“ schlechthin immer nur solche, die zulässig in bezug auf den zugrunde gelegten Koeffizientenkörper K sind.) Auch bei dieser Erweiterung gilt der obige Homomorphiesatz.

Ein Beispiel von Ringhomomorphie bildet der Übergang von einem Multiplikatorenbereich $\mathfrak{o}$ zum absoluten Multiplikatorenbereich (§ 1, Beispiel 4). Also ist der absolute Multiplikatorenbereich isomorph dem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$, wo $\mathfrak{d}$ das zweiseitige Ideal der Elemente von $\mathfrak{o}$ ist, die $\mathfrak{M}$ annullieren.

Aus der Gültigkeit des Homomorphiesatzes folgen wie in § 2 der erste und zweite Isomorphiesatz für Ring- und Operatorisomorphie.

Alle Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von Untermengen von $\mathfrak{o}$ sind als Modulprodukte zu verstehen: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist die Gesamtheit aller Summen $\sum ab$, wo a in $\mathfrak{A}$, b in $\mathfrak{B}$, und $a\mathfrak{B}$ ist die Gesamtheit aller Summen $\sum ab$, b in $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{B}$ Rechtsmodul in bezug auf irgendeinen Ring als Operatorenbereich, so ist auch das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bzw. $a\mathfrak{B}$ Rechtsmodul. (Insbesondere: Rechtsideal, zulässiges Ideal in bezug auf einen Koeffizientenbereich K, usw.) Es gelten, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Summe der Moduln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bezeichnet, die Rechnungsregeln

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}),$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Die *direkte* Summe wird mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bezeichnet (§ 4).

Wir betrachten im folgenden oft Ringe, die eine Maximal- oder Minimalbedingung (§ 3) für Rechtsideale erfüllen. Zu diesen gehören insbesondere die hyperkomplexen Systeme, da infolge der obigen Verabredung nur K-Moduln als Ideale zugelassen werden, deren Rang also beschränkt bleibt (§ 6).

§ 9.

Idempotente Elemente. Direkte Summenzerlegung in Rechtsideale.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Einheitselement.

Ist $\mathfrak{r}$ Rechtsideal, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{r}$, und wegen des Einheitselementes sogar $\mathfrak{r}\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$. Entsprechend für Linksideale: $\mathfrak{o}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$.

Ein Element c heißt idempotent, wenn $c^2 = c$.

Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_n$ *eine Zerlegung in Rechtsideale,* und dabei

$$e = e_1 + \dots + e_n \quad (e_i \text{ in } \mathfrak{r}_i)$$ eine linkseinheit v

so ist

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \quad (i \neq k) \quad (\text{„}\textit{Orthogonalitätsrelationen}\text{“})$$
$$\mathfrak{r}_i = e_i \mathfrak{o}.$$

Beweis. Sei r ein Element von $\mathfrak{r}_1$. Es wird

$$r = er = e_1 r + \dots + e_n r, \quad e_i r \text{ in } \mathfrak{r}_i,$$

aber auch

$$r = r + 0 + \ldots + 0,$$

also

$$e_1 r = r, \quad e_i r = 0 \qquad (i \neq 1).$$

Aus der ersten Formel folgt $\mathfrak{r}_1 \leqq e_1 \mathfrak{o}$; andererseits ist $e_1 \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{r}_1$, also $e_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1$. Spezialisiert man $r = e_1$, so folgt:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_i e_1 = 0 \qquad (i \neq 1).$$

Dasselbe gilt, wenn man den Index 1 durch k ersetzt.

Ist umgekehrt $e = \sum e_i$, $e_i e_k = 0$ $(i \neq k)$, $e_i^2 = e_i$, *und setzt man* $\mathfrak{r}_i = e_i \mathfrak{o}$, *so wird* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n$.

Beweis. Jedes Element r von $\mathfrak{o}$ ist

$$r = er = e_1 r + \ldots + e_n r,$$

also

$$\mathfrak{o} = (e_1 \mathfrak{o}, \ldots, e_n \mathfrak{o}).$$

Aber die Darstellung ist eindeutig; denn aus

$$0 = e_1 a_1 + \ldots + e_n a_n$$

folgt durch Multiplikation mit e_i:

$$e_i^2 a_i = e_i a_i = 0.$$ [13])

Aus einer Rechtsdarstellung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n = e_1 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o}$$

folgt demnach eine Linksdarstellung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n = \mathfrak{o} e_1 + \ldots + \mathfrak{o} e_n.$$

Sind die $\mathfrak{r}_i$ direkt-unzerlegbar, so sind es auch die $\mathfrak{l}_i$; denn eine Zerlegung etwa von $\mathfrak{l}_1$ würde heißen

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{o} e_1 = \mathfrak{o} e_1' + \mathfrak{o} e_1'', \qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{o} e_1' + \mathfrak{o} e_1'' + \mathfrak{o} e_2 + \ldots + \mathfrak{o} e_n,$$

Daraus ergibt sich die Rechtszerlegung

$$\mathfrak{o} = e_1' \mathfrak{o} + e_1'' \mathfrak{o} + e_2 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_1'' + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n,$$

$$\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{o} / (\mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n) = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2';$$

also wäre $\mathfrak{r}_1$ zerlegbar.

---

[13]) Es gilt noch eine andere Umkehrung: Ist $e_i e_k = 0$, $e_i^2 = e_i$, $c = \sum e_i$, so ist c Linkseinheit für den Ring $e_1 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o}$. Daß die Summe direkt ist, sieht man ganz entsprechend wie oben.

§ 10.

Zerlegung in zweiseitige Ideale.

Ist $\mathfrak{o}$ *wieder ein Ring mit Einheitselement,*

(1) $$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{o}$ *in zweiseitige Ideale, so gelten die Orthogonalitätsrelationen auch für die Ideale:*

(2) $$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = 0 \qquad (i \neq k),$$
$$\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + \dots + \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1$; dann wird $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 = 0$, also $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 = 0$, um so mehr also

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_i = 0 \qquad (i \neq 1);$$
$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}_1^2, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{a}_1^2.$$

Umgekehrt: *Aus* (1) *und* (2) *folgt, daß die Moduln* $\mathfrak{a}_i$ *zweiseitige Ideale sind.*

Beweis. $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_i = (\mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n)\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i$, ebenso $\mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = \mathfrak{a}_i$.

Rechtsideale im Ringe $\mathfrak{a}_i$ *sind Rechtsideale in* $\mathfrak{o}$.

Beweis. $\mathfrak{r}\mathfrak{o} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{r}\mathfrak{a}_i, \mathfrak{r}\mathfrak{b}_i) \leqq (\mathfrak{r}, \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{r}, 0) = \mathfrak{r}$.

Ist $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal in* $\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{r}$ *direkte Summe von Rechtsidealen* $\mathfrak{r}\mathfrak{a}_i \leqq \mathfrak{a}_i$.

Beweis. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{r}\mathfrak{a}_n)$, $\mathfrak{r}\mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = \mathfrak{r}\mathfrak{a}_i$, also $\mathfrak{r}\mathfrak{a}_i$ Rechtsideale $\leqq \mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}\mathfrak{a}_i \leqq \mathfrak{a}_i$, also ist die Summe $(\mathfrak{r}\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{r}\mathfrak{a}_n)$ direkt:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{r}\mathfrak{a}_n.$$

Ist insbesondere $\mathfrak{r}$ *direkt-unzerlegbar, so kann* $\mathfrak{r}$ *nur eine Komponente haben, also muß* $\mathfrak{r} \leqq$ *einem* $\mathfrak{a}_i$ *sein.*

Auf Grund dieser Sätze beherrscht man die Idealtheorie in $\mathfrak{o}$, wenn man die der einzelnen $\mathfrak{a}_i$ kennt. Wir beschränken uns darum meist auf zweiseitig unzerlegbare Ringe.

Zwei Rechtsideale, die in verschiedenen $\mathfrak{a}_i$ *enthalten sind, können niemals operatorisomorph sein.*

Beweis. Ein in $\mathfrak{a}_1$ liegendes Ideal wird von allen anderen $\mathfrak{a}_k$ annulliert, nicht aber von $\mathfrak{a}_1$. Dagegen wird ein in $\mathfrak{a}_2$ liegendes Ideal von $\mathfrak{a}_1$ annulliert.

Wenn es also möglich ist, den Ring $\mathfrak{o}$ in zweiseitig unzerlegbare Ideale $\mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$ zu zerlegen, und jedes $\mathfrak{a}_i$ wiederum in einseitig unzerlegbare Rechtsideale $\mathfrak{r}_i' + \mathfrak{r}_i'' + \dots$, so hat man die operatorisomorphen $\mathfrak{r}$ unter denen zu suchen, die zum selben $\mathfrak{a}_i$ gehören. Es kommt aber vor, daß es noch verschiedene Klassen von $\mathfrak{r}$ — d. h. nicht operatorisomorphe — im selben $\mathfrak{a}_i$ gibt, wie das folgende **Beispiel** zeigt:

K sei der Körper der rationalen Zahlen,

$$\mathfrak{o} = e_1 \mathsf{K} + e_2 \mathsf{K} + u \mathsf{K}$$

ein hyperkomplexes System, die e_i und u vertauschbar mit den Zahlen aus K, und die Multiplikationstafel

	e_1	e_2	u
e_1	e_1	0	u
e_2	0	e_2	0
u	0	u	0

Einheitselement ist $e = e_1 + e_2$. Die e_i erfüllen die Orthogonalitätsrelationen. Also ist die Rechtszerlegung: $\mathfrak{o} = e_1 \mathfrak{o} + e_2 \mathfrak{o} = (e_1, u) + (e_2)$, und die Linkszerlegung: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o} e_1 + \mathfrak{o} e_2 = (e_1) + (e_2, u)$.

Da $e_2 \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o} e_1$ offenbar unzerlegbar sind, müssen $\mathfrak{o} e_2$ und $e_1 \mathfrak{o}$ es auch sein.

Eine zweiseitige Zerlegung ist unmöglich; denn dann würde eine Komponente $e_1 \mathfrak{o}$ und die andere $e_2 \mathfrak{o}$ enthalten müssen; die erste enthielte dann u, aber die zweite auch $u e_2 = u$.

Aber $e_1 \mathfrak{o}$ und $e_2 \mathfrak{o}$ sind nicht operatorisomorph, da sie verschiedenen Rang in bezug auf K haben.

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$, *und die* $\mathfrak{a}_i$ *zweiseitig unzerlegbar. Dann sind sie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei außerdem $\mathfrak{o} = \mathfrak{c}_1 + \dots + \mathfrak{c}_n$, also $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = (\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_n)$. Die letztere Summe ist direkt wegen $\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_k \leqq \mathfrak{c}_k$ und $\leqq \mathfrak{a}_i$; da aber die $\mathfrak{a}_i$ unzerlegbar sind, so müssen alle $\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_k$ Null sein bis auf eins: $\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_{j_i}$. Also ist

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_{j_i}.$$

Ebenso: $\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{o} \mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_{j_i} + \dots + \mathfrak{a}_n \mathfrak{c}_{j_i}$ und $\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_{j_i} \neq 0$, also alle übrigen $= 0$,

$$\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_i \mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_i,$$

q. e. d.

§ 11.

Das Zentrum.

Das *Zentrum* $\mathfrak{Z}$ eines Ringes $\mathfrak{o}$ ist die Gesamtheit der z, die mit allen Ringelementen vertauschbar sind ($za = az$ für alle a). $\mathfrak{Z}$ ist ein kommutativer Ring.

Jedes einseitige Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}$ hat ein „*Verengungsideal*“ $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Z}$. Denn da sowohl $\mathfrak{a}$ wie $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Z}$-Moduln sind, ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Z}$ es auch.

Jedes Ideal $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{Z}$ hat ein *Erweiterungsideal*: das von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{o}$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{o}\mathfrak{A})$. Dieses ist zweiseitig wegen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{o} = (\mathfrak{o}\mathfrak{A}, \mathfrak{A})\,\mathfrak{o} = (\mathfrak{o}\mathfrak{A}\mathfrak{o}, \mathfrak{A}\mathfrak{o}) = (\mathfrak{o}^2\mathfrak{A}, \mathfrak{o}\mathfrak{A}) \leqq \mathfrak{o}\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{a}.$$

Wird in $\mathfrak{o}$ ein Einheitselement vorausgesetzt, so kann man schreiben: $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mathfrak{A}$. In diesem Fall gilt der folgende Satz:

Jede zweiseitige Zerlegung von $\mathfrak{o}$ entspricht eineindeutig einer Zerlegung des Zentrums: Aus

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{o} &= \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n, \\ \mathfrak{A}_i &= \mathfrak{a}_i \frown \mathfrak{Z} \end{aligned}$$

folgt

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n, \\ \mathfrak{o}\mathfrak{A}_i &= \mathfrak{a}_i \end{aligned}$$

und umgekehrt.

Beweis. Sei z Zentrumselement, und

$$(3)\qquad z = z_1 + \dots + z_n$$

seine Zerlegung in (1). Dann sind die z_i Zentrumselemente; denn

$$z a = z_1 a + \dots + z_n a = a z = a z_1 + \dots + a z_n;$$

wegen der direkten Summe also, und da $\mathfrak{a}_i$ zweiseitig,

$$z_i a = a z_i.$$

Also z_i in $\mathfrak{a}_i \frown \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_i$; also besagt (3) die behauptete Summenzerlegung. Insbesondere wird $e = \Sigma e_i$; also sind die e_i Zentrumselemente. Schließlich wird

$$z = z e_1 + \dots + z e_n,$$

also

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{Z} e_i, \qquad \mathfrak{o}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{o}\mathfrak{Z} e_i = \mathfrak{o} e_i = \mathfrak{a}_i.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n$ eine Zerlegung des Zentrums, so wird nach § 9:

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{Z} e_i; \qquad e_i^2 = e_i; \qquad e_i e_k = 0 \qquad (i \neq k).$$

Also kommt wegen der Orthogonalitätsrelationen (§ 9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} = \mathfrak{o} e = \mathfrak{o} e_1 + \dots + \mathfrak{o} e_n = \mathfrak{o}\mathfrak{Z} e_1 + \dots + \mathfrak{o}\mathfrak{Z} e_n &= \mathfrak{o}\mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{o}\mathfrak{A}_n \\ &= \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\mathfrak{a}_i \frown \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}'_i$, so weiß man aus dem ersten Teil der Behauptung:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}'_1 + \dots + \mathfrak{A}'_n \text{ direkt.}$$

Aber $\mathfrak{A}'_i \geqq \mathfrak{A}_i$; also $\mathfrak{A}'_i = \mathfrak{A}_i$ (§ 4, 2).

Folgerung. $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{A}_i$ sind gleichzeitig zweiseitig direkt zerlegbar oder nicht.

§ 12.

Nilpotente Ideale.

Ein Ideal $\mathfrak{c}$ heißt *nilpotent*, wenn $\mathfrak{c}^\varrho = 0$.

Beispiel. Das Ideal (u) in § 10.

Wenn es in $\mathfrak{o}$ ein nilpotentes Rechtsideal $\mathfrak{r}$ gibt, so gibt es auch ein nilpotentes Linksideal (sogar zweiseitiges Ideal).

Beweis. Sei $\mathfrak{r}^\varrho = 0$. Dann ist $\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}$; bzw., wenn $\mathfrak{o}$ kein Einheitselement enthält und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}$ Null sein könnte, $(\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ ein Linksideal, und

$$(\mathfrak{o}\,\mathfrak{r})^\varrho = \mathfrak{o}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{o}\,\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{o}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{r} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{r}^\varrho = 0.$$

Die Summe zweier nilpotenter Rechtsideale ist wieder ein nilpotentes Rechtsideal.

Beweis. Sei $\mathfrak{c}^\varrho = 0$, $\mathfrak{d}^\sigma = 0$. In

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})^{\varrho+\sigma-1} = (\ldots, \mathfrak{d}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{c} \ldots, \ldots)$$

kommen in jedem Glied entweder mindestens ϱ Faktoren $\mathfrak{c}$ oder mindestens σ Faktoren $\mathfrak{d}$ vor. Im ersten Fall haben wir

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{c} \ldots \leqq \mathfrak{d}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{c} = \mathfrak{d}\,\mathfrak{c}^\varrho = 0;$$

im letzteren Fall entsprechend für die Faktoren $\mathfrak{d}$. Also ist

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})^{\varrho+\sigma-1} = 0.$$

Ist nun die Maximalbedingung für die Rechtsideale in $\mathfrak{o}$ erfüllt, so gibt es ein maximales nilpotentes Rechtsideal. Dieses umfaßt alle anderen nilpotenten Rechtsideale, da man sonst mit einem solchen die Summe bilden könnte. Es sei $\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{o}\,\mathfrak{c}$ auch nilpotentes Rechtsideal ist, ist $\mathfrak{o}\,\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{c}$ Linksideal. Jedes nilpotente Linksideal $\mathfrak{d}$ ist auch in $\mathfrak{c}$ enthalten. Denn $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}\,\mathfrak{o})$ ist nilpotentes Rechtsideal, also $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{c}$. *Es gibt also ein maximales (zweiseitiges) nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ oder „Radikal“, das alle anderen (rechts- und linksseitige) umfaßt.*

Im Beispiel des § 10 ist (u) das maximale nilpotente Ideal.

Ist das Radikal das Nullideal, so spricht man von einem „Ring ohne Radikal“ („Halbeinfacher Ring“, „Dedekindsches System“). Der Restklassenring nach dem Radikal ist immer ein Ring ohne Radikal.

Ist $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{c}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{c} \frown \mathfrak{Z}$ das Radikal von $\mathfrak{Z}$.

Beweis. Klar ist, daß $\mathfrak{C}$ nilpotent ist. Gäbe es noch ein umfassenderes nilpotentes Ideal $\overline{\mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{Z}$, so würde dieses zu einem nicht ganz in $\mathfrak{c}$ enthaltenen nilpotenten Ideal $\bar{\mathfrak{c}}$ erweitert werden können $((\overline{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{o})^\varrho = \overline{\mathfrak{C}}^\varrho\,\mathfrak{o}^\varrho = 0)$.

Folge. *Ist* $\mathfrak{o}$ *Ring ohne Radikal, so auch* $\mathfrak{Z}$. Die Umkehrung gilt aber nicht, wie unser Beispiel in § 10 zeigt. Das Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ umfaßt einen zu $\mathfrak{Z}/\mathfrak{C}$ isomorphen Ring; dieser kann aber echter Unterring sein (Beispiel in § 10).

§ 13.

Vollständig reduzible Ringe.

Nach § 5 heißt ein Ring rechts vollständig reduzibel, wenn er direkte Summe von endlich vielen einfachen Rechtsidealen ist.

Ein rechts vollständig reduzibler Ring mit Einheitselement besitzt kein nilpotentes Ideal $\neq (0)$, *also kein Radikal.*

Beweis. Jedes Rechtsideal $\mathfrak{r}$ ist direkter Summand (§ 5):

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{t} + \mathfrak{r} = e_1\,\mathfrak{o} + e_2\,\mathfrak{o}.$$

Wegen $e_2^2 = e_2$ ist auch $e_2^\varrho = e_2$. Wäre $\mathfrak{r}$ nilpotent, so wäre $e_2^\varrho = 0$, also $e_2 = 0$, also $\mathfrak{r} = 0$, q. e. d.

Wir zeigen nun die beiden Umkehrungen. Erstens: *Ein Ring ohne Radikal mit Minimalbedingung für Rechtsideale ist vollständig reduzibel in bezug auf Rechtsideale.*

Beweis. Sei $\mathfrak{t}$ ein minimales Rechtsideal $\neq 0$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{t}$ *ein idempotentes Element enthält.*

Da $\mathfrak{t}^2 \subseteq \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^2 \neq 0$, folgt $\mathfrak{t}^2 = \mathfrak{t}$; denn $\mathfrak{t}^2$ ist Rechtsideal. Also gibt es ein a in $\mathfrak{t}$, so daß $a\mathfrak{t} \neq 0$. Dann muß aber $a\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ sein; denn $a\mathfrak{t}$ ist Rechtsideal.

Die Gesamtheit aller b in $\mathfrak{t}$, die von a annulliert werden $(a\,b = 0)$, ist ein Rechtsideal, und nicht $= \mathfrak{t}$, also $= 0$. Also: aus $a\,b = 0$ folgt $b = 0$.

Wegen $\mathfrak{t} = a\,\mathfrak{t}$ muß a sich in der Gestalt $a\,c$ darstellen lassen: $a = a\,c$, $c \neq 0$. Es folgt

$$a\,c = a\,c^2, \quad a(c - c^2) = 0, \quad c - c^2 = 0, \quad c^2 = c.$$

Nun zeigen wir weiter, daß $\mathfrak{t}$ *direkter Summand ist.*

$c\,\mathfrak{o}$ ist ein Rechtsideal $\subseteq \mathfrak{t}$, $\neq 0$, da $c^2 = c$ in $c\,\mathfrak{o}$; also $= \mathfrak{t}$.

Jedes Element r aus $\mathfrak{o}$ läßt eine Darstellung zu:

$$r = c\,r + (r - c\,r) \quad \text{(Einseitige Peircesche Zerlegung).}$$

Die Elemente $c\,r$ bilden das Ideal $\mathfrak{t}$; die Elemente $r - c\,r$ bilden ein anderes Rechtsideal $\mathfrak{r}$, das von c annulliert wird: $c\,\mathfrak{r} = 0$. Also

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{t}, \mathfrak{r}).$$

Da die Elemente von $\mathfrak{t}$ von c nicht annulliert werden, ist die Summe direkt:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{t} + \mathfrak{r}. \tag{1}$$

Stellt man nun $\mathfrak{o}$ auf Grund der Minimalbedingung als direkte Summe von direkt-unzerlegbaren Idealen dar:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_n,$$

so müssen die $\mathfrak{r}_i$ einfach ($=$ minimal) sein, denn wäre etwa $\mathfrak{r}_1$ nicht einfach und $\mathfrak{t}$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{r}_1$, so hätte man aus (1):

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{t} + \mathfrak{r} \frown \mathfrak{r}_1 \quad (\S\, 4, 3);$$

also wäre $\mathfrak{r}_1$ zerlegbar, was nicht geht.

Also ist $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel.*

Zweitens: *Ein Ring ohne Radikal mit Minimalbedingung besitzt ein Einheitselement.*

Um zunächst die Existenz einer Linkseinheit zu zeigen, genügt es, folgendes zu zeigen: *Besitzt ein Rechtsideal $\mathfrak{a} = c_1\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}$ eine Linkseinheit c_1, so gibt es ein Rechtsideal $c\,\mathfrak{o}$ größerer Länge, welches ebenfalls eine Linkseinheit c besitzt.* Da wir nämlich die volle Reduzibilität, also die Beschränktheit aller Längen, schon gezeigt haben, kommt man damit in endlichvielen Schritten zu einer Linkseinheit für $\mathfrak{o}$ selbst.

Sei also $\mathfrak{a} = c_1\mathfrak{o}$ und $c_1^2 = c_1$. Durch die Formel

$$r = c_1 r + (r - c_1 r)$$

ist wie oben eine Peircesche Zerlegung $\mathfrak{o} = c_1\mathfrak{o} + \mathfrak{r}$ gegeben. Sei wie oben c_2 ein idempotentes Element aus $\mathfrak{r}$, also $c_2^2 = c_2$, $c_1 c_2 = 0$ (da c_1 alle Elemente von $\mathfrak{r}$ annulliert). Setzt man nun $e_1 = c_1$, $e_2 = c_2 - c_2 c_1$, so wird $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_2 = 0$, $e_2 c_1 = 0$, $e_2 c_2 = c_2$, also $e_2 \neq 0$, und schließlich $e_2^2 = e_2$. Nach der in Anmerkung [13]) gemachten Bemerkung wird demnach $c = e_1 + e_2$ Linkseinheit für den Ring $c\,\mathfrak{o} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o}$, der wegen $e_2^2 = e_2 \neq 0$ als Rechtsideal eine größere Länge als $\mathfrak{a}$ hat.

Um zu zeigen, daß die konstruierte Linkseinheit e auch Rechtseinheit ist, machen wir die Peircesche Zerlegung in Linksideale:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\, e + \mathfrak{l}.$$

Wir haben $\mathfrak{l}\, e = 0$, $\mathfrak{l} = e\,\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}\, e\, \mathfrak{l} = 0$, also, da nach Voraussetzung kein nilpotentes Linksideal existieren kann, $\mathfrak{l} = 0$, also ist e auch Rechtseinheit und damit Einheit überhaupt.

Satz. *Aus der rechtsseitigen vollständigen Reduzibilität und Existenz der Einheit folgt die zweiseitige: $\mathfrak{o} = \mathfrak{d}_1 + \dots + \mathfrak{d}_s$, $\mathfrak{d}_i$ zweiseitig einfach.*

Wie im vorigen Beweis genügt es, zu zeigen, daß jedes minimale (zweiseitige) Ideal $\mathfrak{a}$ direkter Summand ist. $\mathfrak{a}$ ist als Rechtsideal direkter Summand:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o}.$$

Die entsprechende Linkszerlegung lautet:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{c} + \mathfrak{l} = \mathfrak{o} e_1 + \mathfrak{o} e_2 .$$

Es folgt:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{r}\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r} \frown \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{o} e_2 e_1 \mathfrak{o} = 0,$$
$$(\mathfrak{a}\mathfrak{l})^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{l}\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0, \quad \text{also } \mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0;$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}\mathfrak{c}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{o}\mathfrak{l} = (\mathfrak{a}\mathfrak{l}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l};$$

also ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{l}$, also $\mathfrak{r}$ zweiseitig; also ist $\mathfrak{a}$ zweiseitig direkter Summand. Von da an wie der Beweis der einseitigen vollständigen Reduzibilität.

Die $\mathfrak{d}_i$ sind auch als Ring zweiseitig einfach, da alle Ideale in $\mathfrak{d}_i$ Ideale in $\mathfrak{o}$ sind. Wir untersuchen ihre Struktur.

§ 14.

Zweiseitig-einfache, vollständig-reduzible Ringe mit Einheitselement.

Sei $\mathfrak{o}$ ein solcher Ring,

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_n = e_1\mathfrak{o} + \dots + e_n\mathfrak{o}, \quad \mathfrak{r}_i \text{ einfach},$$

dann folgt

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \dots + \mathfrak{l}_n = \mathfrak{o} e_1 + \dots + \mathfrak{o} e_n, \quad \mathfrak{l}_i \text{ direkt unzerlegbar (§ 9).}$$

$\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i$ ist zweiseitiges Ideal $\neq 0$ (da e_i^2 in $\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i$), also $= \mathfrak{o}$.

Setzt man $\mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_k$, so wird

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_n) \cdot (\mathfrak{l}_1, \dots, \mathfrak{l}_n) = (\dots, \mathfrak{A}_{ij}, \dots)$$

direkt; denn aus $0 = \sum\limits_{i,j} a_{ij}$ folgt, da a_{ij} in $\mathfrak{r}_i$ und $\sum \mathfrak{r}_i$ direkt ist,

$$0 = \sum_j a_{ij},$$

also weiter wegen a_{ij} in $\mathfrak{l}_j$

$$0 = a_{ij}.$$

Weiter: $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_j\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_i$, also $\mathfrak{A}_{ij} \neq 0$. Sei $a_{ij} \neq 0$ aus $\mathfrak{A}_{ij}$. Dann ist

$$a_{ij}\mathfrak{r}_j \leqq \mathfrak{r}_i, \quad a_{ij}\mathfrak{r}_j \neq 0 \text{ wegen } a_{ij} e_j = a_{ij},$$

also

$$a_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i .$$

Setzt man für jedes r_j aus $\mathfrak{r}_j$

$$a_{ij} r_j = r_i ,$$

so ist die Abbildung $r_j \to r_i$ ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{r}_j$ zu $\mathfrak{r}_i$. Die Elemente, denen die Null zugeordnet wird, bilden ein Ideal $\subset \mathfrak{r}_j$, also das Nullideal; also *Isomorphismus*. Mithin:

Je zwei in einer Darstellung von $\mathfrak{o}$ auftretende einfache Rechtsideale $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_j$ sind operatorisomorph; Isomorphismen werden durch die Elemente von $\mathfrak{A}_{ij}$ vermittelt. Da je zwei verschiedene einfache Rechtsideale $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$

immer in mindestens einer Darstellung von $\mathfrak{o}$ zusammen auftreten, so sind auch je zwei solche Ideale isomorph.

Alle Homomorphismen von $\mathfrak{r}_j$ in $\mathfrak{r}_i$ werden durch Elemente von $\mathfrak{A}_{ij}$ vermittelt.

Beweis. Wenn $e_j \to a_{ij}$, so folgt $e_j^2 \to a_{ij} e_j$, also liegt $a_{ij} = a_{ij} e_j$ in $\mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_j = \mathfrak{A}_{ij}$; weiter wird

$$\mathfrak{r}_j = e_j \mathfrak{r}_j \to a_{ij} \mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i .$$

Insbesondere werden die Homomorphismen in sich von $\mathfrak{r}_i$ durch $\mathfrak{A}_{ii}$ vermittelt.

Dem Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{A}_{ii}$ entspricht das Produkt der Homomorphismen, der Summe die Summe. (Def. siehe § 1, 6.) Verschiedene a_{ii} geben verschiedene Automorphismen, denn e_i geht über in $a_{ii} e_i = a_{ii}$. Also ist der Ring $\mathfrak{A}_{ii}$ isomorph dem Automorphismenring von $\mathfrak{r}_i$.

Der Automorphismenring eines einfachen Ideals ist aber ein Körper (§ 2), *also ist $\mathfrak{A}_{ii}$ ein Körper.* Da weiter alle $\mathfrak{r}_i$ operatorisomorph sind, so sind auch ihre Automorphismenringe ringisomorph: *$\mathfrak{A}_{ii}$ ist bis auf Ringisomorphismus durch $\mathfrak{o}$ eindeutig bestimmt.* Die verschiedenen möglichen $\mathfrak{A}_{ii}$ sind nur verschiedene konkrete Realisationen des abstrakt definierten Automorphismenringes der einfachen Rechtsideale.

Hauptsatz. *Jeder vollständig reduzible zweiseitig einfache Ring $\mathfrak{o}$ mit Einheitselement ist isomorph dem Ring der Matrizes n-ten Grades in einem Körper* K. (Der Körper K ist isomorph dem Automorphismenkörper der Rechtsideale von $\mathfrak{o}$.)

Beweis[13a]. *Konstruktion der Matrizeneinheiten c_{ik}:*

Sei Γ_{11} der identische Automorphismus von $\mathfrak{r}_1$, Γ_{i1} ein beliebiger Isomorphismus $\Gamma_{i1} \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_i$, schließlich

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{i1} \Gamma_{k1}^{-1} .$$

Dann folgt allgemein

$$\Gamma_{ik} \Gamma_{kl} = \Gamma_{il} .$$

Wird Γ_{ik} vermittelt durch das Element c_{ik} von $\mathfrak{A}_{ik}$, so folgt weiter:

$$c_{ik} = e_i c_{ik} = c_{ik} e_k ,$$

$$c_{ik} c_{kl} e_l = c_{il} e_l ,$$

also

$$c_{ik} c_{kl} = c_{il} , \qquad c_{ij} c_{kl} = c_{ij} e_j e_k c_{kl} = 0 \qquad (j \neq k).$$

Die c_{ik} sind also Matrizeneinheiten (§ 7).

[13a]) Neuerdings hat B. L. v. d. Waerden einen einfacheren, direkt mit dem abstrakten Automorphismenkörper operierenden Beweis gefunden, der in seinem Buch über Algebra (Grundlehren d. Math. Wiss., Berlin: Julius Springer) gebracht werden soll. [11. 6. 29.]

Konstruktion von K:

Die Zuordnung $a_{ii} = c_{i1} a_{11} c_{1i}$ ordnet jedem a_{11} aus $\mathfrak{A}_{11}$ ein „konjugiertes Element“ a_{ii} von $\mathfrak{A}_{ii}$ zu.

Die Zuordnung ist ringisomorph, da die Isomorphismen Δ, Γ, die den a und c entsprechen, durch

$$\Delta_{ii} = \Gamma_{i1} \Delta_{11} \Gamma_{i1}^{-1}$$

verknüpft sind; eine Relation, die bekanntlich einen Ringisomorphismus darstellt. Man bilde nun die Elemente

$$\alpha = a_{11} + \dots + a_{nn} = a_{11} + c_{21} a_{11} c_{12} + \dots + c_{n1} a_{11} c_{1n}.$$

Jedem a_{11} ist ein α zugeordnet (eineindeutig wegen der direkten Summe). Die Gesamtheit der α ist ein Körper $\mathsf{K} \simeq \mathfrak{A}$; denn aus

$$\alpha = a_{11} + \dots + a_{nn},$$
$$\beta = b_{11} + \dots + b_{nn}$$

folgt

$$\alpha + \beta = (a_{11} + b_{11}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn}),$$
$$\alpha \cdot \beta = a_{11} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{nn};$$

also ist die Zuordnung $a_{11} \to \alpha$ ein Isomorphismus.

Weiter ist

$$c_{ik}\alpha = c_{ik} a_{kk} = c_{ik} c_{k1} a_{11} c_{1k} = c_{i1} a_{11} c_{1k},$$
$$\alpha c_{ik} = a_{ii} c_{ik} = c_{i1} a_{11} c_{1i} c_{ik} = c_{i1} a_{11} c_{1k},$$

also jedes α mit allen c_{ik} vertauschbar.

Schließlich folgt aus denselben Formeln

$$c_{ik} \mathsf{K} = c_{ik} \mathfrak{A}_{kk} = c_{ik} \mathfrak{r}_k \mathfrak{l}_k = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_k = \mathfrak{A}_{ik},$$

also

$$\mathfrak{o} = \sum c_{ik} \mathsf{K}.$$

Die Zuordnung. Stellt man jedes Element von $\mathfrak{o}$ in der Gestalt $\sum c_{ik} \alpha_{ik}$ dar, und ordnet man dem Element die Matrix (α_{ik}) zu, so wird die Zuordnung ein Isomorphismus, wie aus der Definition der Matrixmultiplikation sofort folgt. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Umkehrung. *Der Ring der Matrizes n-ten Grades in einem Körper Λ ist zweiseitig einfach und vollreduzibel; Λ ist isomorph dem Automorphismenring der Rechtsideale, und Λe ist das im vorigen Satz konstruierte* K.

Beweis. Die Matrizeneinheiten (§ 7) seien c_{ik}. Es sei $\mathfrak{r}_i = \sum_k c_{ik} \Lambda$. Dann ist offenbar $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \dots + \mathfrak{r}_n$. Die $\mathfrak{r}_i$ sind einfache Rechtsideale; denn jedes Element $\sum c_{ik} \alpha_k \neq 0$ erzeugt das volle $\mathfrak{r}_i$. Ist nämlich $\alpha_j \neq 0$, so ist $(\sum c_{ik} \alpha_k) \cdot (c_{jl} \alpha_j^{-1}) = c_{il}$, und $\sum c_{il} \beta_l$ durchläuft alle Elemente von $\mathfrak{r}_i$.

Die $\mathfrak{r}_i$ sind operatorisomorph: $\mathfrak{r}_i = c_{ik}\mathfrak{r}_k$.

Daraus folgt: $\mathfrak{o}$ ist zweiseitig unzerlegbar, also nach dem Satz von § 13 auf Grund der schon bewiesenen vollständigen Reduzibilität — und da ein Einheitselement existiert — zweiseitig einfach (wie man auch daran sieht, daß ein $\sum\sum c_{ik}\alpha_{ik} \neq 0$ das ganze zweiseitige Ideal $\mathfrak{o}$ erzeugt).

Weiter ist

$$\mathfrak{r}_i = c_{ii}\mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{l}_i = \mathfrak{o}c_{ii},$$

$$e = \sum c_{ii}, \quad c_{ii} = e_i;$$

$$\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{r}_i \frown \mathfrak{l}_i = c_{ii}\Lambda \simeq \Lambda.$$

Setzt man schließlich $a_{11} = c_{11}\lambda$, so folgt

$$\alpha = a_{11} + c_{21}a_{11}c_{12} + \ldots = c_{11}\lambda + c_{22}\lambda + \ldots = e\lambda,$$

womit alles bewiesen ist.

Das Zentrum von $\mathfrak{o}$ *ist das Zentrum von* K, *also ein Körper.*

Beweis. $\mathfrak{Z}(\mathsf{K})$ besteht aus allen ζ, die mit allen $\varkappa$ vertauschbar sind. Diese sind aber auch mit allen c_{ik} vertauschbar, also auch mit den Summen $\sum c_{ik}a_{ik}$. Also:

$$\mathfrak{Z}(\mathsf{K}) \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{o}).$$

Umgekehrt: Sei z in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{o})$, $z = \sum\sum c_{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$;

$$z c_{ik} = c_{ik} z, \qquad \sum_\mu c_{\mu k}\gamma_{\mu i} = \sum_\nu c_{i\nu}\gamma_{k\nu};$$

also

$$\gamma_{\mu i} = 0 \ (\mu \neq i); \qquad c_{ik}\gamma_{ii} = c_{ik}\gamma_{kk}; \qquad \gamma_{ii} = \gamma_{kk} = \gamma;$$

$$z = \sum c_{ii}\gamma = e\gamma = \gamma,$$

also z in K, und vertauschbar mit allen $\varkappa$, also z in $\mathfrak{Z}(\mathsf{K})$.

Da ein Matrizenring natürlich auch linksseitig vollreduzibel ist, und jeder rechtsseitig vollreduzible Ring mit Einheitselement direkte Summe von Matrizenringen, so folgt:

Jeder rechtsseitig vollreduzible Ring mit Einheitselement ist es auch linksseitig, und umgekehrt.

Und: *Das Zentrum eines vollreduziblen Ringes mit Einheitselement ist direkte Summe von kommutativen Körpern, die den zweiseitig einfachen Matrizenringen entsprechen.*

Es gilt noch der folgende Satz[14]):

Je zwei verschiedene Zerlegungen $\mathfrak{o} = \sum c_{ik}\mathsf{K}$, $\mathfrak{o} = \sum c'_{ik}\mathsf{K}'$ *gehen durch innere Automorphismen* $\alpha' \to x^{-1}\alpha x$, $c_{ik} = x^{-1}c_{ik}x$ *ineinander über.*

---

[14]) Vgl. E. Artin, a. a. O. S. 258.

Beweis. Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}_1' + \ldots \mathfrak{r}_n'$, und seien a, b Elemente, welche zwei zueinander reziproke Isomorphismen der Ideale $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_1'$ vermitteln: $\mathfrak{r}_1 = a\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_1' = b\mathfrak{r}_1$, $ab = c_{11}$, $ba = c_{11}'$. Setzt man $x = \sum c_{i1} a c_{1i}'$, $y = \sum c_{i1}' b c_{1i}$, so wird $xy = e$, $y = x^{-1}$ und $x^{-1} c_{ik} x = c_{ik}'$, $x^{-1} \alpha x = \alpha'$.

III. Kapitel.

Modul- und Darstellungstheorie.

§ 15.

Darstellungen und Darstellungsmoduln [15]).

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, K ein Ring mit Einheitselement. (Bei späteren Anwendungen ist K immer ein Körper.)

Eine Darstellung n-ten Grades von $\mathfrak{o}$ *in* K ist eine Homomorphie

$$\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D},$$

wo $\mathfrak{D}$ ein Ring aus Matrizes n-ten Grades in K ist.

Unter einem *Darstellungsmodul* von $\mathfrak{o}$ in bezug auf K versteht man einen Doppelmodul $\mathfrak{M}$ (§ 1, 5), der Links-$\mathfrak{o}$-Modul und Rechts-K-Modul ist:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}\mathsf{K} \leqq \mathfrak{M},$$

der weiter direkte Summe von endlichvielen eingliedrigen K-Moduln ist:

$$\mathfrak{M} = x_1\mathsf{K} + \ldots + x_n\mathsf{K};$$

und wo das Einheitselement von K Einheitsoperator ist.

Jeder Darstellungsmodul führt zu einer Darstellung. Sei c in $\mathfrak{o}$ und

$$c x_k = \sum x_i \gamma_{ik}$$

oder

$$c(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) C, \qquad C = (\gamma_{ik}).$$

Dann bilden die Matrizes C eine Darstellung für c, denn

$$(b + c) x_k = \sum x_i (\beta_{ik} + \gamma_{ik})$$

$$b c x_k = b \sum x_j \gamma_{jk} = \sum b x_j \gamma_{jk} = \sum \sum x_i \beta_{ij} \gamma_{jk} = \sum x_i (\sum \beta_{ij} \gamma_{jk})$$

oder

$$bc(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) BC.$$

Umgekehrt: *Jede Darstellung* $\mathfrak{D}$ *von* $\mathfrak{o}$ *gehört zu einem Darstellungsmodul, und zwar zu einer bestimmten Basis desselben.*

Man verstehe unter $\mathfrak{M}$ nämlich die Gesamtheit der formalen Linearformen in $x_1, \ldots, x_n$

$$y = \sum x_i \alpha_i.$$

---

[15]) Darstellungsmoduln in bezug auf kommutative Körper finden sich zuerst bei W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsber. Heidelberger Ak. 1926, 1. Abhandl.

Dann ist $\mathfrak{M}$ ein rechts-K-Modul. Man definiere weiter, wenn dem Element c die Matrix $C = (\gamma_{ik})$ zugeordnet ist,

$$(1) \qquad c x_k = \sum x_i \gamma_{ik},$$
$$c(\sum x_k \alpha_k) = \sum\sum x_i \gamma_{ik} \alpha_k.$$

Aus den Homomorphierelationen

$$c + d \to C + D,$$
$$cd \to CD$$

folgt

$$(c+d)x_i = cx_i + dx_i,$$
$$cdx_i = c \cdot dx_i$$

und dasselbe für Summen $\sum x_i \alpha_i$. Die übrigen Doppelmoduleigenschaften

$$c(y+z) = cy + cz,$$
$$c(y\alpha) = (cy)\alpha$$

sind trivial. Also ist $\mathfrak{M}$ Darstellungsmodul, der wegen (1) genau zur Darstellung $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D}$ gehört.

Sei nun $(y_1, \ldots, y_n)$ eine andere Basis für denselben Darstellungsmodul

$$(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot P,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \cdot P^{-1},$$
$$b(y_1, \ldots, y_n) = b(x_1, \ldots, x_n) P = (x_1, \ldots, x_n) BP = (y_1, \ldots, y_n) P^{-1} BP.$$

Man nennt die Darstellungen $b \sim B$ und $b \sim P^{-1} BP$ *äquivalent*, und rechnet sie zur selben *Darstellungsklasse*. Da jede reguläre Matrix P eine Basis von $\mathfrak{M}$ wieder in eine Basis überführt, ist also bewiesen:

Jeder Darstellungsmodul führt eindeutig zu einer bestimmten Darstellungsklasse[15a]).

[15a]) Zusatz bei der Korrektur (14. April 1929). Wie B. L. v. d. Waerden mir mitteilt, kann man einen von der speziellen Basiswahl unabhängigen, also invarianten Zusammenhang direkt gewinnen durch Trennung der Begriffe: *lineare Transformation* und *Matrix*. Eine lineare Transformation ist ein Homomorphismus zweier Linearformenmoduln; eine Matrix ist der Ausdruck (die Darstellung) dieses Homomorphismus bei einer bestimmten Basiswahl.

I. *Jeder Darstellungsmodul ordnet dem Multiplikatorenbereich* $\mathfrak{o}$ *eindeutig ein homomorphes System linearer Transformationen des Moduls in sich zu.*

Denn nach § 2 Schluß erzeugen die Linksmultiplikatoren eines Doppelmoduls $\mathfrak{M}$ Operatorhomomorphismen von $\mathfrak{M}$ in sich in bezug auf die Rechtsoperatoren (hier Multiplikation mit K); und zwar ist die Zuordnung eine homomorphe.

II. *Jedes zu* $\mathfrak{o}$ *homomorphe System linearer Transformationen eines Linearformenmoduls in sich führt zu einem Darstellungsmodul.*

(Fortsetzung der Fußnote 15a) auf nächster Seite.)

Klar ist:

Zwei operatorisomorphen Darstellungsmoduln entspricht dieselbe Darstellungsklasse.

Aber auch umgekehrt:

Wenn zwei Darstellungsmoduln $(x_1, \ldots, x_n)$ *und* $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *dieselbe Darstellung erzeugen, so gibt die Zuordnung* $x_i \to \bar{x}_i$, $\sum x_i \alpha_i \to \sum \bar{x}_i \alpha_i$ *einen Isomorphismus ab.*

Denn die Multiplikationsvorschrift ist durch die Matrizes C vollständig bestimmt.

Spezialfall: Erzeugen zwei Basen von $\mathfrak{M}$ dieselbe Darstellung, so gehen sie durch einen Operatorisomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf sich auseinander hervor.

Oder: Ist $C = PCP^{-1}$ für alle C und festes P, so ist die Zuordnung $y_i \to x_i$ $(y_i = \sum x_i \pi_{ik})$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf sich. Umgekehrt: Jeder Isomorphismus $y_i \to x_i$ des Doppelmoduls $\mathfrak{M}$ auf sich wird vermittelt durch eine Matrix P, die mit allen C vertauschbar ist.

Man kann den Darstellungsbegriff auch ausdehnen auf solche Ringe, die noch mit einem kommutativen Multiplikatorenbereich P kommutativ verknüpft sind (§ 8). Man nimmt in diesem Fall nur solche Darstellungsringe K, die P in ihrem Zentrum enthalten, und verlangt von der Darstellung nicht nur, daß sie ein Ringhomomorphismus $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{O}$, sondern sogar, daß sie ein Operatorhomomorphismus sein soll: aus $a \to A$ soll folgen $a\varrho \to A\varrho$ für ϱ aus P.

Für die Darstellungsmoduln bedeutet diese Forderung die hinzukommende Rechnungsregel:

$$am \cdot \varrho\,[= a \cdot m\varrho] = a\varrho \cdot m.$$

Der Modul und der Ring sind dann, wie man sagt, „kommutativ mit P verbunden“.

Denn wieder nach § 2 Schluß ergeben diese Homomorphismen als Linksmultiplikatoren einen Doppelmodul; also gilt das gleiche in bezug auf den Multiplikatorenbereich $\mathfrak{o}$, wenn man $cm = \Gamma m$ setzt für jedes m aus $\mathfrak{M}$ und c aus $\mathfrak{o}$, wobei $c \to \Gamma$ die ursprünglich gegebene ringhomomorphe Zuordnung war.

Operatorisomorphen Darstellungsmoduln — in bezug auf Rechts- und Linksmultiplikation — entsprechen dieselben Transformationen, nicht-operatorisomorphen verschiedene.

Drückt man bei bestimmter Basiswahl von $\mathfrak{M}$ jede Transformation durch eine Basis aus, so ergibt I. die Darstellung $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{O}$, während II. aussagt, daß jede solche Darstellung zu einem Darstellungsmodul, und zwar zu einer bestimmten Basis desselben führt. Daraus folgt dann wieder die Zuordnung von Darstellungsmodul und Darstellungsklassen, alles ohne jede Rechnung.

§ 16.

Reduzible Darstellungen.

Wenn $\mathfrak{A}$ ein Untermodul des Darstellungsmoduls $\mathfrak{M}$ ist und wenn es möglich ist, eine Basis für $\mathfrak{M}$ zu wählen, bestehend aus einer Basis $z_1, \ldots, z_t$ von $\mathfrak{A}$, ergänzt durch $y_1, \ldots, y_r$, also:

$$\mathfrak{M} = y_1 \mathsf{K} + \ldots + y_r \mathsf{K} + z_1 \mathsf{K} + \ldots + z_t \mathsf{K}\ ^{16)},$$

so sehen die Darstellungen so aus:

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & T \end{pmatrix},$$

wo die Matrizes T für sich allein eine Darstellung t-ten Grades bilden, die durch $\mathfrak{A}$ erzeugt wird, und die Matrizes R eine Darstellung r-ten Grades, die durch $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ erzeugt wird.

Beweis. Es ist

$$(cy_1, \ldots, cy_r, cz_1, \ldots, cz_t) = (y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_t) \cdot C.$$

Da die cz_i, als Elemente von $\mathfrak{A}$, sich durch die z_i allein ausdrücken, so steht in C rechts oben Null. Nennt man die übrigen Abteilungen von C in der obigen Anordnung R, S, T, so wird insbesondere

$$(cz_1, \ldots, cz_t) = (z_1, \ldots, z_t) \cdot T;$$

also bilden die T eine Darstellung, vermittelt durch $\mathfrak{A}$. Weiter wird

$$(cy_1, \ldots, cy_r) \equiv (y_1, \ldots, y_r) \cdot R \pmod{\mathfrak{A}},$$

während die y_i eine mod $\mathfrak{A}$ linear-unabhängige Basis bilden. Also bilden die R eine Darstellung, erzeugt durch $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$.

Ist umgekehrt eine „*reduzible*“ Darstellung

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & T \end{pmatrix}$$

gegeben, wo R und T quadratische Matrizes sind, so drücken sich im zugehörigen Darstellungsmodul die Produkte eines jedeen c mit den letzten t Basiselementen $z_1, \ldots, z_t$ allein aus, d. h. $\mathfrak{A} = (z_1, \ldots, z_t)$ *ist ein Untermodul.*

Folgerung. Sei

$$\mathfrak{M} \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_e = 0$$

eine Kompositionsreihe für $\mathfrak{M}$, und sei jedes $\mathfrak{A}_i$ im vorangehenden direkter Summand als K-Modul, so daß man eine Basis

$$z_{11}, \ldots, z_{1r_1}, z_{21}, \ldots, z_{2r_2}, \ldots, z_{e1}, \ldots, z_{er_e},$$

---

[16]) Anders ausgedrückt: Wenn $\mathfrak{A}$ als K-Modul direkter Summand ist. Ist K ein Körper, so ist diese Voraussetzung immer erfüllt.

wählen kann, so daß die z_{ik} mit $i > \nu$ eine Basis für $\mathfrak{A}_\nu$ bilden. *Dann sehen die durch $\mathfrak{M}$ vermittelten Darstellungen so aus:*

$$(2) \qquad C = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ R_{12} & R_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ R_{1e} & R_{2e} & \dots & R_{ee} \end{pmatrix}$$

und die $R_{\nu\nu}$ bilden Darstellungen, vermittelt durch die Kompositionsfaktoren $\mathfrak{A}_{\nu-1}/\mathfrak{A}_\nu$.

Die einzelnen Darstellungen $R_{\nu\nu}$ sind irreduzibel, da die Kompositionsfaktoren $\mathfrak{A}_{\nu-1}/\mathfrak{A}_\nu$ einfach sind.

Setzt man voraus, daß K ein Körper ist, daß also jeder Untermodul direkter Summand ist, so führt auch umgekehrt jede in der Gestalt (2) möglichst weit reduzierte Darstellung zu einer Kompositionsreihe. Nach dem Satz von Jordan-Hölder sind die Kompositionsfaktoren bis auf Operatorisomorphie eindeutig, also: *Die $R_{\nu\nu}$ sind bis auf äquivalente Darstellungen und bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ direkte Summe zweier Darstellungsmoduln $\mathfrak{A} = (y_1, \dots, y_r)$, $\mathfrak{B} = (z_1, \dots, z_s)$, so sieht die durch die Basis $(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)$ vermittelte Darstellung offenbar so aus

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

wo R die durch $\mathfrak{A}$, S die durch $\mathfrak{B}$ vermittelte Darstellung des Elements c bedeutet, und umgekehrt. Stellt man den Modul $\mathfrak{M}$ zunächst als direkte Summe von direkt unzerlegbaren Bestandteilen dar, und sucht man zu diesen die Kompositionsreihen wie oben, so sieht bei passender Basiswahl die Darstellung so aus:

$$(3) \qquad C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ R_{ik} & & R_{rr} \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} S_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ S_{ik} & & S_{ss} \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} T_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ T_{ik} & & T_{tt} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ist wieder K ein Körper, so führt auch umgekehrt jede möglichst weit reduzierte Darstellung (3) zu einer Darstellung des Moduls durch direkt-unzerlegbare Summanden und Kompositionsfaktoren in diesen. Nach dem Satz von Krull und Otto Schmidt (Fußnote [11]) sind die Klassen der direkt-unzerlegbaren Darstellungsbestandteile bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Ist der Modul $\mathfrak{M}$ vollständig reduzibel, so bestehen alle Kästen in (3) aus einer einzigen irreduziblen Darstellung und man nennt die Darstellung (3) *vollständig reduzibel.*

§ 17.

Direkte Summenzerlegung von Darstellungsmoduln bei Ringen mit Einheitselement.

Sei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, $\mathfrak{o}$ Ring mit Einheit. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_0$, wo für $\mathfrak{M}_e$ die Einheit Einheitsoperator, für $\mathfrak{M}_0$ Nulloperator ist. ($\mathfrak{M}_e$ und $\mathfrak{M}_0$ sind auch Rechts-K-Moduln, wenn $\mathfrak{M}$ es ist.)

Beweis. Jedes m von $\mathfrak{M}$ ist darstellbar als

$$m = em + (m - em).$$

Die Gesamtheit der em sei $\mathfrak{M}_e$, die Gesamtheit der $m - em$ sei $\mathfrak{M}_0$. Dann sind $\mathfrak{M}_e$ und $\mathfrak{M}_0$ selbstverständlich additive Gruppen (und Rechts-K-Moduln, falls $\mathfrak{M}$ es ist). Weiter ist

$$rem = erm,$$

also $\mathfrak{M}_e$ auch $\mathfrak{o}$-Modul; ebenso

$$r(m - em) = rm - rem = rm - rm,$$

also $\mathfrak{M}_0$ $\mathfrak{o}$-Modul. Für die em ist e Einheitsoperater, für die $(m - em)$ Nulloperator. Also gehört nur die Null sowohl zu $\mathfrak{M}_e$ wie zu $\mathfrak{M}_0$: die Summe $\mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_0$ ist direkt.

Handelt es sich um Darstellungsmoduln, so erzeugt $\mathfrak{M}_0$ die triviale Darstellung, wobei jedem Element die Null zugeordnet wird. Spaltet man den Summanden $\mathfrak{M}_0$ ab, so bleibt die durch $\mathfrak{M}_e$ vermittelte Darstellung, *wobei dem Einheitselement die Einheitsmatrix zugeordnet ist.* Auf solche Darstellungen können und wollen wir uns daher von jetzt an beschränken.

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_s$ direkte Summe von zweiseitigen Idealen, $e = e_1 + \dots + e_s$ die Zerlegung von e, und $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, wo e Einheitsoperator ist. Dann ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{M} + \dots + \mathfrak{a}_s \mathfrak{M}$$

direkt.

Beweis. Offenbar ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}\mathfrak{M} = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{M}, \ldots, \mathfrak{a}_s\mathfrak{M})$. Setzt man $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ und entsprechend $\mathfrak{b}_i$, so ist

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{a}_i\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_i\mathfrak{M}),$$

und diese Summe ist direkt, da e_i für $\mathfrak{a}_i\mathfrak{M}$ Einheitsoperator, für $\mathfrak{b}_i\mathfrak{M}$ Nulloperator ist.

Wir beschränken uns auf Grund dieses Satzes meist auf Darstellungen von zweiseitig unzerlegbaren Ringen.

§ 18.

Modul- und Darstellungstheorie vollständig reduzibler Ringe.

Sei $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und zweiseitig einfach, und $\mathfrak{M}$ endlicher $\mathfrak{o}$-Modul, für den das Einheitselement von $\mathfrak{o}$ Einheitsoperator ist. Dann ist $\mathfrak{M}$ vollständig reduzibel, und die einfachen Bestandteile sind den einfachen Linksidealen $\mathfrak{l}_i$ operatorisomorph.

Beweis. Sei

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n,$$

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{o}m_1, \ldots, \mathfrak{o}m_k),$$

$$\mathfrak{M} = (\ldots, \mathfrak{l}_i m_k, \ldots). \tag{4}$$

Die $\mathfrak{l}_i m_k$, die $\neq 0$ sind, sind $\simeq \mathfrak{l}_i$, denn die Zuordnung $a \to a m_k$ ist ein Operatorisomorphismus. Also sind die $\mathfrak{l}_i m_k$ einfach. Läßt man aus der Darstellung (4) diejenigen $\mathfrak{l}_i m_k$, die in der Summe der vorangehenden schon enthalten sind, weg, so wird die Summe direkt.

Folge. *Ist außerdem $\mathfrak{M}$ direkt-unzerlegbar, so ist $\mathfrak{M}$ einfach und $\simeq \mathfrak{l}_i$.*

Sei nun Δ der Automorphismenkörper dieses einfachen $\mathfrak{M}$, Λ der von $\mathfrak{l}_i$, dann gilt auf Grund des Operatorisomorphismus von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{l}_i$ die Ringisomorphie $\Delta \simeq \Lambda$. Nach § 1 kann man $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{l}$ als Doppelmoduln mit Δ bzw. Λ als Rechtsbereich auffassen, und zwar sind diese Doppelmoduln auch Darstellungsmoduln; denn $\mathfrak{l}$ und folglich $\mathfrak{M}$ ist von endlichem Rang in bezug auf den Automorphismenkörper (§ 14), und dessen Einheitselement ist Einheitsoperator. Die durch sie vermittelten Darstellungen gehen durch den Ringisomorphismus $\Delta \simeq \Lambda$ auseinander hervor. *Wir können uns also für das Studium dieser Darstellungsklasse auf die durch $\mathfrak{l}_1$ in dessen Automorphismenkörper vermittelte Darstellung beschränken.*

Sei speziell für $\mathfrak{l}_1$ eine Basis aus Matrizeneinheiten $\mathfrak{l}_1 = (c_{11}, \ldots, c_{n1})$ zugrunde gelegt, und als Realisation für den Automorphismenkörper Λ der früher (§ 14) mit K bezeichnete Unterkörper von $\mathfrak{o}$ (man hat dabei in unseren früheren Überlegungen Rechtsideale durch Linksideale zu ersetzen und dementsprechend die Automorphismen rechts zu schreiben). *Stellt* *man dann jedes Element a von $\mathfrak{o}$ in der Gestalt $a = \sum c_{ik}\alpha_{ik}$ dar, so ist $a \to (\alpha_{ik})$ die durch $\mathfrak{l}_1$ vermittelte Darstellung in* K.

Denn es ist

$$a \cdot c_{k1} = \left(\sum\sum c_{ij}\alpha_{ij}\right)\cdot c_{k1} = \sum c_{ik}\alpha_{ik}c_{k1} = \sum c_{i1}\alpha_{ik}$$

oder

$$a(c_{11}, \ldots, c_{n1}) = (c_{11}, \ldots, c_{n1})(\alpha_{ik}).$$

Sei Γ ein Unterkörper von K, derart, daß K von endlichem Rang t in bezug auf Γ: $\mathsf{K} = \varkappa_1\Gamma + \ldots + \varkappa_t\Gamma$. Dann wird K sein eigener Darstellungsmodul in bezug auf Γ. Die Elemente β von K werden dargestellt durch Matrizes B in Γ, die man so erhält:

$$\beta\varkappa_j = \sum \varkappa_i \beta_{ij}; \qquad B = (\beta_{ij}).$$

Betrachtet man nun $\mathfrak{l}_1$ als Darstellungsmodul in bezug auf den Unterkörper Γ, so findet man:

Die durch $\mathfrak{l}_1$ vermittelte Darstellung von $\mathfrak{o}$ in Γ erhält man, indem man in der oben angegebenen Darstellung von $\mathfrak{o}$ in K:

$$a \to (\alpha_{ik})$$

die Elemente α_{ik} ersetzt durch die Matrizes A_{ik}, die ihnen in der Darstellung von K in Γ entsprechen.

Beweis. $$\mathfrak{l}_1 = \sum c_{i1}\mathsf{K} = \sum\sum c_{i1}\varkappa_j\Gamma.$$

Vermöge der Basis $(\ldots, c_{i1}\varkappa_j, \ldots)$ wird:

$$c_{ik} \to \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \boxed{i} \\ \\ \boxed{n} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{k} & \boxed{n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & E_t & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

wo E_t die Einheitsmatrix, 0 die Nullmatrix t-ten Grades ist,

$$\alpha \to \begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix},$$

also:

$$a = \sum c_{ik}\alpha_{ik} \to \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zu beliebigem $\mathfrak{M}$ bedeutet wieder einen Ringisomorphismus für die Darstellung.

Bemerkung. Die hier studierten Darstellungen im Automorphismenkörper der Linksideale und dessen endlichen Unterkörpern sind bis auf Isomorphie die einzigen, die durch einfache $\mathfrak{o}$-Moduln (oder Linksideale) vermittelt werden können. Denn nach einer früher (§ 2) gemachten Bemerkung erzeugen, wenn man den $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{M}$ als Doppelmodul in bezug auf irgendeinen Körper K auffaßt, die Elemente von K Modulhomomorphismen, also muß der Körper K notwendigerweise auf einen Unterkörper des Automorphismenkörpers dieses $\mathfrak{o}$-Moduls homomorph bezogen sein. Dieser Homomorphismus ist, da das Einheitselement Einheitsoperator ist, ein Isomorphismus, und der ganze Automorphismenkörper muß in bezug auf den betreffenden Unterkörper einen endlichen Grad haben, da sonst auch der Darstellungsmodul einen unendlichen Rang haben würde, was nicht geht.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die hier untersuchten irreduziblen Darstellungen noch nicht alle sind, sondern nur die durch einfache $\mathfrak{o}$-Moduln vermittelten. Es gibt im allgemeinen noch Darstellungsmoduln (z. B. ein Körper Ω, aufgefaßt als Doppelmodul in bezug auf einen Unterkörper Σ als Linksbereich und sich selbst als Rechtsbereich), die als $\mathfrak{o}$-Moduln reduzibel, als Doppelmoduln aber irreduzibel sind, und die deswegen doch zu irreduziblen Darstellungen führen.

§ 19.

Die einfachen Kompositionsfaktoren bei Moduln und Darstellungsmoduln.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Maximal- und Minimalbedingung für Linksideale, $\mathfrak{c}$ das maximale nilpotente Ideal. Dann gilt:

Jeder einfache $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{M}$ wird entweder von $\mathfrak{o}$ annulliert, oder er ist einem einfachen Linksideal $\mathfrak{l}$ aus dem Ring ohne Radikal $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ isomorph. Im letzteren Fall wird der Modul annulliert von allen denjenigen zweiseitigen Idealen aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, welche $\mathfrak{l}$ nicht enthalten, und der absolute Multiplikatorenbereich (§ 1) *ist isomorph dem zweiseitig einfachen Ring, der $\mathfrak{l}$ enthält.*

Beweis. Sei $\mathfrak{c}^{\varrho} = 0$. Es muß $\mathfrak{c}\mathfrak{M} = 0$ sein, da sonst $\mathfrak{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{c}^2\mathfrak{M} = \ldots = 0$ folgen würde. Daher kann man $\mathfrak{M}$ auch als $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$-Modul auffassen (alle Elemente einer Restklasse nach $\mathfrak{c}$ ergeben dasselbe bei Multiplikation mit einem Element von $\mathfrak{M}$). Als Ring ohne Radikal besitzt $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ein Einheitselement, also wird $\mathfrak{M}$ direkte Summe aus einem Modul, der von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ annulliert wird, und einem, für den das Einheitselement Einheitsoperator wird (§ 17). Da $\mathfrak{M}$ einfach ist, kann nur einer von den beiden Summanden auftreten. Wenn das Einheitselement Einheitsoperator ist, folgt entsprechend wie in § 18 die Isomorphie zu einem einfachen Linksideal. Ist nämlich $m \neq 0$ ein Element aus $\mathfrak{M}$, so wird auch

$\mathfrak{o}/\mathfrak{c}\cdot m \neq 0$, also wird $\mathfrak{l}\cdot m \neq 0$ für mindestens ein einfaches Linksideal $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, und muß daher $\mathfrak{M}$ erschöpfen. Die weiteren Behauptungen sind für solche Linksideale klar und übertragen sich sofort auf alle dazu isomorphen Moduln.

Folgerung. *Ist $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, der eine Kompositionsreihe besitzt, so werden die einfachen Kompositionsfaktoren entweder von $\mathfrak{o}$ annulliert, oder sie sind einfachen Linksidealen aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ isomorph.*

Ist P ein kommutativ mit $\mathfrak{o}$ verbundener Ring, so bleiben alle Ergebnisse erhalten. Man muß dann nur statt Moduln betrachten Doppelmoduln in bezug auf P rechts und $\mathfrak{o}$ links, welche der Bedingung genügen:

$$am\cdot\varrho = a\cdot m\varrho = a\varrho\cdot m \qquad (\S\ 15).$$

Außerdem soll das Einheitselement von P auch Einheitsoperator sein. Als Untermoduln werden immer nur solche betrachtet, die die Multiplikation mit P gestatten (wie bei Idealen). Die bei unseren Beweisen konstruierten Untermoduln $\mathfrak{c}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{c}^2\mathfrak{M}$, ... genügen dieser Bedingung.

Ist insbesondere P ein Körper und $\mathfrak{M}$ ein P-Modul endlichen Ranges, so ist $\mathfrak{M}$ zugleich Darstellungsmodul. Die durch $\mathfrak{M}$ vermittelte Darstellung ist nicht nur ringhomomorph, sondern auch operatorhomomorph in bezug auf P (§ 15). Alle Darstellungen in P mit dieser Eigenschaft werden durch solche Moduln geliefert. Irreduzible Darstellungen gehören zu einfachen Moduln, und umgekehrt. Also lassen sich die Sätze dieses Paragraphen sofort als Sätze über Darstellungen von $\mathfrak{o}$ in P deuten: *Alle irreduziblen Darstellungen (abgesehen von den Nulldarstellungen) werden durch die einfachen Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vermittelt.* Wenn man also eine beliebige Darstellung nach § 16 vermöge einer Kompositionsreihe reduziert, so treten in der Hauptdiagonale (außer Nullen) nur solche Darstellungen auf, die äquivalent den durch einfache Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vermittelten Darstellungen sind.

Bemerkung. Unter den über $\mathfrak{o}$ und P gemachten Voraussetzungen braucht für $\mathfrak{o}$ keine Endlichkeitsbedingung vorausgesetzt zu werden. Denn alle Darstellungen sind zugleich isomorphe Darstellungen des absoluten Multiplikatorenbereiches, und dieser wird, als isomorphes Urbild eines Ringes aus Matrizen endlichen Grades, selbst ein P-Modul endlichen Ranges, und da nach Definition als zulässige Ideale nur P-Moduln betrachtet werden, sind Maximal- und Minimalbedingung für diesen absoluten Multiplikatorenbereich erfüllt.

Dieser absolute Multiplikatorenbereich wird ein hyperkomplexes System in bezug auf P, wenn P als kommutativer Körper vorausgesetzt wird. Diese Voraussetzung ist immer erfüllt, sobald nicht nur Nullen in der

Hauptdiagonale auftreten. Denn dann wird P nach der Bemerkung in § 18 einem Unterkörper des Automorphismenkörpers von $\mathfrak{l}$ isomorph, der bei der Realisation durch den Unterkörper K von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ (§ 14) — wegen der kommutativen Verbundenheit — im Zentrum von K liegen muß.

IV. Kapitel.

Darstellungen von Gruppen und hyperkomplexen Systemen.

§ 20.

Einordnung der hyperkomplexen Systeme.

Wir betrachten hyperkomplexe Systeme $\mathfrak{o}$ in bezug auf einen kommutativen Körper P. Da nach Verabredung für die Ideale in $\mathfrak{o}$ nur P-Moduln in Betracht kommen, so gelten für Links- und Rechtsideale die Maximal- und Minimalbedingung (vgl. § 8). Also gilt die ganze in Kap. II dargelegte Ringtheorie.

Unter *Darstellungen* des hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ werden immer im folgenden Darstellungen im Körper P verstanden, und zwar solche Darstellungen, bei denen aus $a \to A$ folgt $a\varrho \to A\varrho$ für ϱ in P (Modulhomomorphie in bezug auf P). Für die Darstellungsmoduln heißt das $a\varrho \cdot m = a \cdot m\varrho$ (vgl. § 15, Schluß). Für die Darstellungsmoduln gelten mithin die Sätze von § 19, aus denen folgt, daß *alle irreduziblen Darstellungen durch einfache Linksideale von* $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *vermittelt* werden, und daß es somit *so viele nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen* gibt wie *zweiseitig-einfache Summanden* $\mathfrak{a}$ *in einer Zerlegung* $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}e^{(1)} + \dots + \bar{\mathfrak{o}}e^{(s)}$.

Um die durch ein solches Linksideal $\mathfrak{l}_\nu$ definierte Darstellung von $\mathfrak{o}$ nun wirklich zu bestimmen, gehe man zunächst von den Elementen von $\mathfrak{o}$ auf die zugehörigen Restklassen in $\bar{\mathfrak{o}}$ über. Da die Multiplikation mit einem Element von P einen Isomorphismus für alle Ideale in $\bar{\mathfrak{o}}$ darstellt, so ist der Körper P einem Unterkörper $e^{(\nu)}\mathsf{P}$ des Automorphismenkörpers K_ν eines jeden einfachen Linksideals homomorph und, da das Einheitselement Einheitsoperator ist, sogar isomorph. Man kann die durch ein einfaches Linksideal $\mathfrak{l}_\nu$ vermittelte Darstellung in P erhalten, indem man zuerst die durch $\mathfrak{l}_\nu$ in diesem Unterkörper $e^{(\nu)}\mathsf{P}$ vermittelte Darstellung untersucht und dann vermöge des Isomorphismus $e^{(\nu)}\mathsf{P} \simeq \mathsf{P}$ zu P übergeht. Der Isomorphismenkörper K_ν hat endlichen Rang in bezug auf P; es handelt sich also um Darstellung in einem Unterkörper endlichen Grades des Automorphismenkörpers von $\mathfrak{l}_\nu$.

Um also die gesuchte Darstellung zu erhalten, stelle man zunächst ein jedes c von $\bar{\mathfrak{o}}$ durch seine zweiseitigen Komponenten dar:

$$c = c_1 + \dots + c_s.$$

Man braucht jetzt nur noch die darstellende Matrix von c_ν zu suchen, da die übrigen c_i das Ideal $\mathfrak{l}_\nu$ annullieren, also durch die Nullmatrix dargestellt werden. Diese findet man nach § 18 so: Man stelle c_ν durch die Matrizeneinheiten $c_{ik}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{a}_\nu$ dar:

$$c_\nu = \sum c_{ik}^{(\nu)} \alpha_{ik}^{(\nu)},$$

und ersetze in der Matrix $(\alpha_{ik}^{(\nu)})$ jedes Element $\alpha_{ik}^{(\nu)}$ durch die Matrix $A_{ik}^{(\nu)}$, die ihm in der durch K_ν vermittelten Darstellung von K_ν in P zugeordnet ist.

Bemerkung. Der Körper K_ν ist von endlichem Rang in bezug auf P. Jedes Element $\varkappa$ genügt einer Gleichung $f(\varkappa) = 0$ mit Koeffizienten aus $e^{(\nu)}\mathsf{P}$, da zwischen den Potenzen von $\varkappa$ sicher eine lineare Abhängigkeit besteht. Ist insbesondere P algebraisch abgeschlossen, so zerfällt diese Gleichung in Linearfaktoren; da K Körper ist, so ist $\varkappa$ schon Nullstelle eines Linearfaktors, mithin gehört $\varkappa$ schon zu $e^{(\nu)}\mathsf{P}$, d. h. es ist $\mathsf{K}_\nu = e^{(\nu)}\mathsf{P}$. In diesem Fall bilden also die Matrizes $(\alpha_{ik}^{(\nu)})$ selbst die irreduzible Darstellung.

Aus dieser Bemerkung zusammen mit § 19 Schluß ergibt sich der „Burnsidesche Satz“:

Es sei P algebraisch abgeschlossen und kommutativ mit einem Ring $\mathfrak{o}$ verbunden. Dann enthält jede irreduzible Darstellung n-ten Grades in $\mathsf{P} - \mathfrak{o} \sim \mathfrak{D}$ — genau n^2 linear unabhängige Matrizes[17]).

Aus dieser Fassung folgt sofort die übliche: „Ein System von Matrizes n-ten Grades in P, welches zu je zweien auch das Produkt enthält, ist stets dann und nur dann irreduzibel, wenn sich keine lineare homogene Relation

$$\sum \alpha_{ik}\,\varrho_{ik} = 0$$

mit Koeffizienten aus P angeben läßt, die durch die Elemente α_{ik} einer jeden Matrix des Systems befriedigt wird.“ Man kann nämlich aus jedem solchen System von Matrizes durch Hinzunahme aller linearen Verbindungen einen Ring und P-Modul ableiten und diesen Ring als seine eigene Darstellung auffassen.

Beweis. Nach § 19 wird $\mathfrak{D}$ isomorph einem zweiseitig einfachen und vollständig reduziblen Ring $\bar{\mathfrak{o}}$ mit Einheitselement; ein solcher Ring ist aber voller Matrizenring (etwa Ring aller Matrizes m-ten Grades) in bezug auf den Automorphismenkörper der Linksideale, der wegen der algebraischen Abgeschlossenheit mit P zusammenfällt. Jede irreduzible Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$, also auch die gegebene, wird durch ein einfaches Linksideal erzeugt. Das

[17]) $\mathfrak{o}$ wird also nicht als hyperkomplexes System vorausgesetzt und kann z. B. der aus allen linearen Verbindungen je endlichvieler Elemente einer unendlichen Gruppe bestehende Gruppenring sein.

Linksideal hat den Rang m, die Darstellung den Grad n, also folgt $m = n$, mithin gibt es genau n^2 linear-unabhängige Elemente in $\bar{\mathfrak{o}}$, also auch in $\mathfrak{D}$.

Ebenso folgt leicht der „verallgemeinerte Burnsidesche Satz“ [18]):

Sei unter den gleichen Voraussetzungen $\mathfrak{D}$ eine vollständig reduzible Darstellung von $\mathfrak{o}$, die in lauter inäquivalente Bestandteile zerfällt, der Grade $n_1, n_2, \ldots, n_s$; dann ist $\mathfrak{D}$ vom Rang $n_1^2 + \ldots + n_s^2$ in bezug auf P.

Beweis. Sei wieder $\bar{\mathfrak{o}}$ der absolute Multiplikatorenbereich, der notwendig ein hyperkomplexes System ist. Die verschiedenen inäquivalenten Darstellungen werden durch Linksideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ erzeugt, die zu verschiedenen zweiseitig einfachen Komponenten $\mathfrak{a}_i$ von $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{c}}$ gehören, (wo $\bar{\mathfrak{c}}$ das Radikal ist). Also wird die gegebene Darstellung durch $\mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_s$ erzeugt, besitzt somit $\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ als absoluten Multiplikatorenbereich. Daraus folgt mit Hilfe derselben Rangbetrachtungen wie oben die Behauptung.

Sei jetzt $\mathfrak{o}$ ein hyperkomplexes System ohne Radikal in bezug auf einen beliebigen Körper. Nach § 13 ist $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und besitzt ein Einheitselement. Aus den Sätzen von § 17 und § 18 folgt nun: *Jede Darstellung von $\mathfrak{o}$ ist vollständig reduzibel.*

Umgekehrt gilt: *Jede vollständig reduzible Darstellung eines mit* P *kommutativ verbundenen Ringes $\mathfrak{o}$ besitzt als absoluten Multiplikatorenbereich ein hyperkomplexes System ohne Radikal.*

Beweis. Der absolute Multiplikatorenbereich $\bar{\mathfrak{o}}$ ist isomorph einem Ring und P-Modul aus Matrizes in P, also ein hyperkomplexes System. Die Elemente des Radikals $\bar{\mathfrak{c}}$ werden nach § 19 in jeder irreduziblen Darstellung, also auch in der gesamten Darstellung, durch Null dargestellt, also ist $\bar{\mathfrak{c}} = 0$.

(Treten in der Darstellung nur äquivalente Bestandteile auf, die also alle durch ein Linksideal $\mathfrak{l}$ vermittelt werden, so wird der absolute Multiplikatorenbereich zweiseitig einfach.)

Als *reguläre Darstellung* eines hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ bezeichnet man die durch das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ selbst vermittelte Darstellung. (Beim Gruppenring wählt man dabei speziell die aus den Gruppenelementen $u_1, \ldots, u_h$ bestehende Basis; vgl. § 6.) Da in $\mathfrak{o}$ als Kompositionsfaktoren alle Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vorhanden sind, *so stecken alle irreduziblen Darstellungen schon in der regulären Darstellung als Diagonalmatrizen R_{ii},* wenn man sich die reguläre Darstellung nach Formel (2) § 16 vermöge einer Kompositionsreihe auf eine passende Basis transformiert denkt.

[18]) G. Frobenius und I. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. Berlin 1906.

Eine Darstellung ist bekannt, wenn die darstellenden Matrizes der Basiselemente $u_1, \ldots, u_h$ bekannt sind. Handelt es sich speziell um einen Gruppenring, wo also $u_1, \ldots, u_h$ Elemente einer Gruppe sind, so erzeugt jede homomorphe Darstellung der Gruppe durch Matrizes auch eine Darstellung des Gruppenrings, so daß das Problem der Darstellung einer Gruppe ein Spezialfall der Darstellung hyperkomplexer Systeme ist.

§ 21.

Erweiterung des Grundkörpers. Die Darstellungen des Zentrums.

Ist $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System und Ω ein Erweiterungskörper des Grundkörpers P, so kann man bilden

$$\mathfrak{o}\,\Omega = a_1 \Omega + \ldots + a_h \Omega$$

mit den alten Multiplikationsregeln für die Basiselemente a_i.[18a]) $\mathfrak{o}\,\Omega$ ist wieder hyperkomplex in bezug auf Ω.

Jede Darstellung von $\mathfrak{o}$ führt zu einer Darstellung von $\mathfrak{o}\,\Omega$, da die Darstellung aller Elemente bekannt ist, sobald die Darstellungen der Basiselemente a_i bekannt sind[19]).

Ein Ideal oder Darstellungsmodul, sowie die entsprechende Darstellung, heißen *absolut-irreduzibel,* wenn sie irreduzibel bleiben nach Übergang zum algebraisch abgeschlossenen Körper.

Ist $\mathfrak{o}\,\Omega$ ohne Radikal, so ist $\mathfrak{o}$ es auch; denn ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{o}$ würde zu einem Erweiterungsideal $\mathfrak{c}\,\Omega$ in $\mathfrak{o}\,\Omega$ führen. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir unten sehen werden.

Das Zentrum von $\mathfrak{o}\,\Omega$ wird gleich dem erweiterten Zentrum $\mathfrak{Z}\,\Omega$. Ist $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel, so ist $\mathfrak{Z}$ direkte Summe von Körpern:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_s.$$

Wenn $\mathfrak{o}$ bei Übergang zu $\mathfrak{o}\,\Omega$ vollständig reduzibel bleibt (d. h. wenn kein nilpotentes Ideal hinzukommt), so zerfällt das neue Zentrum:

$$\mathfrak{Z}\,\Omega = \mathfrak{Z}_1\,\Omega + \cdots + \mathfrak{Z}_s\,\Omega$$

in Ω wieder in eine direkte Summe von Körpern, die, wenn Ω algebraisch abgeschlossen, nach einer Bemerkung in § 20 den Rang 1 in bezug auf Ω haben (und $\simeq \Omega$ sind).

[18a]) Genauer gesagt: man führt neue Symbole $\bar{a}_i$ mit den alten Multiplikationsregeln ein; $\bar{a}_1\Omega + \ldots + \bar{a}_p\,\Omega$ enthält dann einen zu $\mathfrak{o}$ isomorphen Unterring, so daß man nachträglich die $\bar{a}$ mit den a identifizieren kann.

[19]) Es werden natürlich wieder nur solche Darstellungen betrachtet, die P-modulhomomorph sind; aus $a \to A$ soll folgen $a\varrho \to A\varrho$ für ϱ in P entsprechend für Ω.

Für die Darstellungen des Zentrums $\mathfrak{Z}$ gelten die folgenden Sätze:

Jede irreduzible Darstellung eines kommutativen hyperkomplexen Systems $\mathfrak{Z}$ im algebraisch abgeschlossenen Körper Ω ist vom ersten Grad (oder: Die irreduziblen Darstellungen sind identisch mit den Homomorphismen von $\mathfrak{Z}$ in Ω).

Beweis. Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{Z}$ ergibt eine solche von $\mathfrak{Z}_\Omega$, also auch eine solche von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ das Radikal von $\mathfrak{Z}_\Omega$ ist. $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$ ist ein kommutatives System ohne Radikal, also nach § 14, Schluß direkte Summe von Körpern. Diese sind vom ersten Grad, da Ω algebraisch-abgeschlossen vorausgesetzt wurde, und erzeugen alle irreduziblen Darstellungen (§ 20).

Zugleich folgt, da äquivalente Darstellungen ersten Grades notwendig gleich werden ($\lambda^{-1}\alpha\lambda = \alpha$): *Die Anzahl der verschiedenen Homomorphismen von $\mathfrak{Z}$ in Ω ist gleich dem Rang von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$.*

Die letzte Bemerkung ergibt für den Spezialfall, daß $\mathfrak{Z}$ Körper über P, den Satz:

Ist $\mathfrak{Z}$ ein kommutativer Körper, so ist $\mathfrak{Z}$ dann und nur dann vollständig reduzibel (ohne Radikal), wenn $\mathfrak{Z}$ Erweiterung erster Art von P ist.

Denn für einen Körper werden die Homomorphismen Isomorphismen; ihre Anzahl ist gleich dem Rang von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$, also dann und nur dann gleich dem Körpergrad ($\mathfrak{Z}$ Erweiterung erster Art), wenn $\mathfrak{C} = 0$ ist.

Ist $\mathfrak{Z}$ vollständig reduzibel:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_t,$$

so werden bei jeder Darstellung auch die einzelnen Körper $\mathfrak{Z}_\nu$ homomorph abgebildet, und zwar wird bei einer irreduziblen Darstellung einer dieser Körper isomorph, die übrigen durch Null dargestellt (§ 19).

Die Anwendung dieser Sätze auf hyperkomplexe Systeme ergibt vorerst für Systeme ohne Radikal:

Ist $\mathfrak{o}_\Omega$, also auch $\mathfrak{o}$ ein System ohne Radikal, so werden bei einer jeden absolut-irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ die Zentrumselemente z durch Diagonalmatrizes $E\zeta^{(\nu)}$ dargestellt, und $z \to \zeta^{(\nu)}$ ist eine Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{Z}$ in Ω. Die so vermittelte Beziehung zwischen den absolut-irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{o}$ und denen von $\mathfrak{Z}$ ist eineindeutig. Die Anzahl dieser Darstellungsklassen ist also gleich dem Rang des Zentrums[20]).

---

[20]) Entsprechende Sätze gelten nicht nur für Darstellungen im algebraisch-abgeschlossenen Körper Ω, sondern auch für Darstellungen in den einzelnen Automorphismenkörpern, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

Beweis. Der Zerfällung in zweiseitig-unzerlegbare Ideale

$$\mathfrak{o}_\Omega = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_t$$

entspricht eineindeutig eine Zerfällung des Zentrums in Körper:

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_t,$$

wo $\mathfrak{Z}_\Omega$ das Zentrum von $\mathfrak{o}_\Omega$ ist. Bei einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ wird ein $\mathfrak{a}_\nu$ isomorph, die übrigen durch Null dargestellt, und die Darstellungsklasse ist durch $\mathfrak{a}_\nu$ eindeutig bestimmt. $\mathfrak{a}_\nu$ wird durch einen vollen Matrizenring dargestellt und das Zentrum eines solchen vollen Matrizenringes besteht aus Diagonalmatrizen $E\zeta^{(\nu)}$. Die Zuordnung $z \to \zeta^{(\nu}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{Z}$, und zwar wird das eine $\mathfrak{Z}_\nu$ isomorph, die übrigen durch Null dargestellt. Damit ist alles bewiesen.

Für die Frage, wann einem $\mathfrak{o}$ ohne Radikal ein ebensolches $\mathfrak{o}_\Omega$ entspricht, folgt noch:

Hat $\mathfrak{Z}$ eine Komponente $\mathfrak{Z}_\nu$, die Erweiterung zweiter Art von P ist, so besitzt $\mathfrak{o}_\Omega$ sicher ein Radikal[21]). Denn $\mathfrak{Z}_\Omega$ besitzt in diesem Falle schon eines.

§ 22.

Anwendung auf Abelsche Gruppen.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r$ eine endliche Abelsche Gruppe, zerlegt in zyklische Gruppen $\mathfrak{C}_i$ der Ordnungen h_i. Elemente:

$$a = c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r}.$$

Es sei P ein Körper, dessen Charakteristik nicht in der Gruppenordnung $h = h_1 h_2 \ldots h_r$ aufgeht.

Der Gruppenring $\mathfrak{Z}$ besteht aus allen Summen

$$\sum a_\lambda \varrho_\lambda = \sum c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r} \varrho_\lambda \qquad (\varrho_\lambda \text{ in } \mathsf{P})$$

und ist homomorphes Abbild des Polynombereichs $\mathsf{P}[z_1, \ldots, z_r]$ vermöge $\sum \varrho_\lambda z_1^{\lambda_1} \ldots z_r^{\lambda_r} \to c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r} \varrho_\lambda$. Also ist $\mathfrak{Z} \simeq \mathsf{P}[z_1, \ldots, z_r]/\mathfrak{m}$, und man findet leicht:

$$\mathfrak{m} = (z_1^{h_1} - e, \ldots, z_r^{h_r} - e).$$

Im Erweiterungskörper Ω zerfallen die $z_i^{h_i} - e$ in lauter verschiedene Faktoren: $z_i - \varepsilon_i$; also wird $\mathfrak{m}$ Produkt (oder Durchschnitt) von lauter

---

21) Hat $\mathfrak{Z}$ nur Komponenten von erster Art, so wird $\mathfrak{o}_\Omega$ ohne Radikal, wie ebenfalls an späterer Stelle bewiesen werden soll. Für Charakteristik Null hat schon I. Schur den äquivalenten Satz bewiesen, daß irreduzible Darstellungen in P bei jeder Erweiterung des Koeffizientenbereichs vollständig reduzibel bleiben (Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen, Transact. Am. Math. Soc. 15 (1909), S. 159).

verschiedenen Primidealen

$$\mathfrak{P}^{(\nu)} = (z_1 - \varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, z_r - \varepsilon_r^{(\nu)})$$

mit je nur einer Nullstelle $(\varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, \varepsilon_r^{(\nu)})$. Der Durchschnittsbildung entspricht eine direkte Summenzerlegung (§ 4):

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_h,$$

wo jeweils $\mathfrak{Z}_\nu \simeq \mathfrak{Z}_\Omega / \mathfrak{P}^{(\nu)}$ wird, also die Darstellung

$$c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r} \to \varepsilon_1^{(\nu)\lambda_1} \ldots \varepsilon_r^{(\nu)\lambda_r} \quad \text{oder} \quad a \to \chi^{(r)}(a)$$

vermittelt. Diese Darstellungen sind die *Charaktere*. Ihre Anzahl ist $h_1 h_2 \ldots h_r = h$, wie es nach der allgemeinen Theorie sein muß.

§ 23.

Determinante eines hyperkomplexen Systems.

Sei $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System. Ich adjungiere zu P h Unbestimmte $x_1, \ldots, x_h$ und bilde

$$\mathfrak{o}^* = a_1 \mathsf{P}(x) + \ldots + a_h \mathsf{P}(x).$$

Die x sollen mit den a_i vertauschbar sein; dadurch sind die Rechnungsregeln in $\mathfrak{o}^*$ schon bestimmt.

In $\mathfrak{o}^*$ liegt „das allgemeine Element von $\mathfrak{o}$“

$$w = a_1 x_1 + \ldots + a_h x_h.$$

Ist in einer Darstellung $a_i \to A_i$, so ist dem w zugeordnet:

$$W = A_1 x_1 + \ldots + A_h x_h.$$

W heißt die zur Darstellung gehörige *Systemmatrix* (oder speziell, wenn die a_i eine Gruppe bilden und $\mathfrak{o}$ daher der Gruppenring ist, die *Gruppenmatrix*). Handelt es sich um die reguläre Darstellung, so hat man die *reguläre Systemmatrix*.

Die Elemente w_{ik} von W sind Linearformen der x. Die „*Systemdeterminante*“ $|W|$ ist also vom Grad n, wenn es sich um Darstellungen n-ten Grades handelt. Insbesondere ist die *reguläre Systemdeterminante* vom Grad h.

Die Systemdeterminante ändert sich nicht bei Übergang zu äquivalenten Darstellungen, da $|\mathsf{P} W \mathsf{P}^{-1}| = |\mathsf{P}|\,|W|\,|\mathsf{P}^{-1}| = |W|$.

Bei Übergang von $(a_1, \ldots, a_h)$ zu einer neuen Basis $(b_1, \ldots, b_h)$ und von $w = \sum a_i x_i$ zu $w = \sum b_i y_i$ findet man die neuen Elemente von W und somit auch die neue Determinante, indem man in den alten eine Substitution

$$x_i = \sum \varrho_{ik} y_k$$

mit regulärer Substitutionsmatrix vornimmt.

Liegt eine Kompositionsreihe des Darstellungsmoduls vor, so sieht bei passender Basiswahl die Matrix W so aus:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & & 0 \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ W_{ik} & & & W_r \end{pmatrix},$$

$$|W| = |W_1| \cdot |W_2| \cdot \ldots \cdot |W_r|.$$

Unter den $|W_i|$ einer beliebigen Darstellung kommen keine anderen vor als in der regulären Darstellung von $\mathfrak{o}$ oder sogar von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ das Radikal ist.

Ist P *algebraisch abgeschlossen, so ist die zu einer irreduziblen Darstellung gehörige Determinante* $|W_i|$ *eine Primfunktion in den* x, *und zu inäquivalenten Darstellungen gehören verschiedene Primfaktoren.*

Beweis. Wir können, da alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{o}$ auch Darstellungen von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ sind, uns auf den Ring ohne Radikal $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ beschränken. In ihm führen wir als Basis die Matrizeneinheiten c_{ik} ein; das allgemeine Element lautet dann:

$$w = \sum c_{ik}^{(\nu)} x_{ik}^{(\nu)}.$$

Die Matrizes der irreduziblen Darstellungen lauten: $W_\nu = (x_{ik}^{(\nu)})$. Die Funktionen $|W_\nu| = |x_{ik}^{(\nu)}|$ sind bekanntlich irreduzibel und offenbar voneinander verschieden.

Um die $|W_\nu|$ zu berechnen, kann man die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ in ihre Primfaktoren zerlegen. Jeder Primfaktor kommt so oft vor, wie der Grad der irreduziblen Darstellung angibt, da das entsprechende Ideal $\mathfrak{l}_\nu$ so oft in der Kompositionsreihe vorkommt.

Man kann auch die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}$ zugrunde legen, erhält dann aber jeden irreduziblen Faktor öfter, nämlich so oft, wie das entsprechende $\mathfrak{l}_\nu$ als Kompositionsfaktor bei den Linksidealen vorkommt. Bei dieser regulären Darstellung war $\mathfrak{o}$ als Linksideal gedacht; faßt man $\mathfrak{o}$ als Rechtsideal auf, so kommt eine zweite reguläre Systemmatrix (die „antistrophe Matrix" bei Frobenius), welche dieselben irreduziblen Faktoren enthält (nämlich die Systemdeterminanten sämtlicher irreduzibler Darstellungen), aber möglicherweise mit anderen Exponenten (siehe das Beispiel in § 10).

Die Systemdeterminante eines kommutativen Systems zerfällt in Linearfaktoren, da alle irreduziblen Darstellungen vom ersten Grad sind. Diese Linearfaktoren sind selbst die irreduziblen Darstellungen, ergeben also bei Abelschen Gruppen die Charaktere. Diese Tatsache war Dedekinds Ausgangspunkt bei der Untersuchung der Gruppendeterminante nichtabelscher Gruppen.

§ 24.

Spuren und Charaktere.

Ist in einer Darstellung $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D}$ eines hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ dem Element a die Matrix A zugeordnet, so setzt man

$$Sp_{\mathfrak{D}}(a) = Sp\,A.$$

Spuren sind lineare Funktionen:

$$Sp\,(c+d) = Sp\,(c) + Sp\,(d); \qquad Sp\,(c\alpha) = \alpha\,Sp\,(c).$$

Äquivalente Darstellungen haben dieselben Spuren.

Die Spur in einer reduziblen Darstellung ist Summe der Spuren in den durch die Kompositionsfaktoren vermittelten Darstellungen.

Beweis.

$$Sp \begin{pmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ A_{ik} & & & A_{rr} \end{pmatrix} = Sp\,(A_{11}) + Sp\,(A_{22}) + \dots + Sp\,(A_{rr}).$$

Hauptspur = Spur bei der regulären Darstellung.

Reduzierte Spur = Summe der Spuren bei den verschiedenen irreduziblen Darstellungen.

Ist c Element des maximalen nilpotenten Ideals $\mathfrak{c}$, so ist $Sp\,(c) = 0$ für jede Darstellung.

Beweis. Ich habe nur die Darstellungen durch die einfachen Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ zu untersuchen; denn bei jeder anderen Darstellung treten nur diese Kompositionsfaktoren auf, und die Spur ist additiv zusammengesetzt.

$\mathfrak{c}$ annulliert aber alle Elemente von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$; also ist jedem c aus $\mathfrak{c}$ die Nullmatrix zugeordnet, also $Sp\,(c) = 0$, q. e. d.

Ist $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach und P algebraisch-abgeschlossen, also $\mathfrak{o}$ Matrizenring: $\mathfrak{o} = \sum c_{ik}\mathsf{P}$, so ist bei der irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ dem Element $a = \sum c_{ik}\alpha_{ik}$ zugeordnet die Matrix (α_{ik}), also

$$\text{reduzierte Spur } Sp_{\mathfrak{l}}(a) = \sum \alpha_{ii},$$

$$\text{Hauptspur } Sp_{\mathfrak{o}}(a) = n \cdot \text{reduzierte Spur} = n \cdot \sum \alpha_{ii}.$$

Insbesondere:

$$Sp\,(c_{ik}) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k,$$

$$Sp_{\mathfrak{l}}(c_{ii}) = e,$$

$$Sp_{\mathfrak{o}}(c_{ii}) = n \cdot e.$$

Geht man von P *zum algebraisch abgeschlossenen Körper Ω über, so ändert sich die Hauptspur nicht,* da sie aus derselben Basis berechnet werden kann. Das gilt nicht für die reduzierte Spur.

Die Spuren der Elemente a des Systems ohne Radikal $\mathfrak{o}$ in den absolut-irreduziblen Darstellungen nennt man *Charaktere* und bezeichnet sie mit $\chi(a)$ oder, wenn angegeben werden soll, welche Darstellung gemeint ist, mit $\chi^{(\nu)}(a)$.

Bei einer irreduziblen Darstellung vom Grad n_ν werden die Zentrumselemente nach § 21 durch Diagonalmatrizes $E\zeta^{(\nu)}$ dargestellt, wo $z \to \zeta^{(\nu)}$ eine Darstellung ersten Grades des Zentrums (oder Homomorphismus des Zentrums in Ω) ist. Daraus folgt für die Spur der Wert $n_\nu \zeta^{(\nu)}$. *Also sind die Homomorphismen Θ des Zentrums mit den Charakteren χ durch die Relation*

$$\chi(z) = n_\nu \cdot \Theta(z) \tag{1}$$

verknüpft.

Im kommutativen Fall ist $n_\nu = 1$, und die Charaktere selbst geben die Homomorphismen (vgl. § 22).

Hat der Körper Ω die Charakteristik Null, was wir im folgenden immer annehmen werden, so kann man (1) durch n durchdividieren:

$$\Theta(z) = \frac{\chi(z)}{n_\nu}.$$

Die Homomorphismuseigenschaft der $\Theta(z)$ drückt sich durch die Formeln aus:

$$\frac{\chi(z)}{n_\nu} + \frac{\chi(z')}{n_\nu} = \frac{\chi(z+z')}{n_\nu},$$

$$\frac{\chi(z)}{n_\nu} \cdot \frac{\chi(z')}{n_\nu} = \frac{\chi(zz')}{n_\nu}.$$

Eine Darstellungsklasse ist durch die Spuren der Matrizes allein schon eindeutig festgelegt. (Um die Spuren aller Matrizes zu kennen, genügt es natürlich, die Spuren der Basiselemente in der gegebenen Darstellung zu kennen.)

Beweis. Der Darstellungsmodul $\mathfrak{N}$ ist bekannt, wenn man weiß, wie oft in ihm ein jeder irreduzible Darstellungsmodul $\mathfrak{M}_\nu$ als direkter Summand vorkommt. Ist diese Anzahl p_ν, so ist die Spur von $e^{(\nu)}$ in der Darstellung gleich $p_\nu n_\nu$, wo n_ν der Grad der irreduziblen Darstellung ist. Also ist

$$p_\nu = \frac{Sp\, e^{(\nu)}}{n_\nu}.$$

§ 25.

Diskriminanten.

Sei $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \dots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System.

Diskriminantenmatrix = Matrix, deren Elemente die Hauptspuren $Sp(a_i a_k)$ sind.

Reduzierte Diskriminantenmatrix = dasselbe bei reduzierten Spuren, gebildet im algebraisch-abgeschlossenen Körper.

Determinante der Matrix = *Diskriminante* (bzw. *reduzierte Diskriminante*).

Die Diskriminante bleibt dieselbe bei Erweiterung des Grundkörpers.

Bei Übergang zu einer anderen Basis multipliziert sich die Diskriminante mit dem Quadrat der Transformationsdeterminante.

Beweis. Sei

$$(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h) P,$$

$$(a_i a_1, \dots, a_i a_h) = (a_i b_1, \dots, a_i b_h) P,$$

$$(Sp(a_i a_1), \dots, Sp(a_i a_h)) = (Sp(a_i b_1), \dots, Sp(a_i b_h)) P,$$

oder in Matrizes

$$(Sp(a_i a_k)) = (Sp(a_i b_k)) P. \tag{1}$$

Ebenso, wenn $\tilde{P}$ die gespiegelte Matrix ist,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix}$$

und daraus wie vorhin

$$(Sp(a_i b_k)) = \tilde{P}(Sp(b_i b_k)). \tag{1a}$$

Aus (1) und (1a)

$$(Sp(a_i a_k)) = \tilde{P} \cdot (Sp(b_i b_k)) \cdot P.$$

Durch Übergang zu Determinanten folgt die Behauptung.

Die Determinante ist also nur bis auf eine Quadratzahl aus P bestimmt: aber ihr Verschwinden oder Nichtverschwinden ist eine invariante Eigenschaft.

Aus (1) folgt noch: *Man kann die Diskriminante bis auf einen Faktor $\neq 0$ auch aus zwei verschiedenen Basen, nämlich als $|(Sp(a_i b_k))|$ bestimmen.*

Die Diskriminante verschwindet, wenn $\mathfrak{o}$ ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ besitzt.

Beweis. Als Basiselemente für $\mathfrak{o}$ wähle ich $(c_1, \dots, c_t, d_{t+1}, \dots, d_h)$, wo $(c_1, \dots, c_t)$ eine Basis für $\mathfrak{c}$ bilden. Die Diskriminante wird:

$$\begin{vmatrix} Sp(c_i c_k) & Sp(c_i d_k) \\ Sp(d_i c_k) & Sp(d_i d_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Sp(d_i d_k) \end{vmatrix} = 0.$$

(Das gilt auch für die reduzierte Diskriminante.)

Folge. *Die Diskriminante verschwindet auch dann, wenn nach Übergang zum algebraisch-abgeschlossenen Körper ein nilpotentes Ideal auftritt.*

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_s$ *direkt zweiseitig, und seien* $M, M_1, \dots, M_s$ *die Diskriminantenmatrizes der Ringe* $\mathfrak{o}, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$. Dann wird

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_s \end{pmatrix},$$

also $|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_s|$.

Beweis. Man wähle eine Basis für $\mathfrak{o}$, die sich aus den Basen für $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_s$ zusammensetzt. Ist a in $\mathfrak{a}_i$, so ist

$$Sp_{\mathfrak{o}}(a) = Sp_{\mathfrak{a}_i}(a),$$

wo beide Male Hauptspuren gemeint sind, aber in den Ringen $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{a}_i$. Weiter ist $a_i a_k = 0$, wenn a_i in $\mathfrak{a}_i$, a_k in $\mathfrak{a}_k$, also auch $Sp(a_i a_k) = 0$. Daraus folgt die Behauptung, die ebenso für die reduzierte Diskriminante folgt.

Um die *Diskriminante eines Matrizenringes* $\sum c_{ik} \mathsf{P}$ zu bilden, wähle man zwei verschiedene Basen, nämlich die c_{ik} einmal nach ersten Indizes, einmal nach zweiten Indizes angeordnet. Die Produkttafel sieht so aus:

	$\overbrace{c_{11} \dots c_{1n}}^{\mathfrak{r}_1}$	$\overbrace{c_{21} \dots c_{2n}}^{\mathfrak{r}_2}$	$\dots$
$\mathfrak{l}_1 \begin{cases} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{cases}$	(c_{ik})	0	0
$\mathfrak{l}_2 \begin{cases} c_{12} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{cases}$	0	(c_{ik})	0
$\vdots$	0	0	(c_{ik})

Die Diskriminante wird

$$D = \begin{vmatrix} Sp(c_{11}) & & & 0 \\ & Sp(c_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Sp(c_{nn}) \end{vmatrix}^n = \begin{cases} e \text{ für reduzierte Spuren,} \\ n^{n^2} \cdot e \text{ für Hauptspuren.} \end{cases}$$

Folge. *Zerfällt* $\mathfrak{o}$ *im algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper in Matrizenringe der Grade* $n_1, \ldots, n_s$, *so wird die Diskriminante*

$$D = n_1^{n_1^2} n_2^{n_2^2} \ldots n_s^{n_s^2} \cdot e$$

und die reduzierte Diskriminante

$$D_{\mathrm{red}} = e.$$

Die reduzierte Diskriminante ist demnach bei Systemen ohne Radikel immer $\neq 0$, die andere nur dann, wenn kein n_i durch die Charakteristik des Körpers teilbar ist. Mithin:

Das Nichtverschwinden der reduzierten Diskriminante ist notwendig und hinreichend für Systeme ohne Radikal (nach algebraischem Abschluß des Körpers P*).*

Das Nichtverschwinden der Diskriminante ist im Fall der Charakteristik Null notwendig und hinreichend für Nichtauftreten eines Radikals (nach algebraischem Abschluß des Körpers P*).*[22]

§ 26.

Einordnung des Gruppenrings.

Sind $a_1, \ldots, a_h$ *die Elemente einer endlichen Gruppe und bildet man den Gruppenring in einem Körper, dessen Charakteristik nicht Teiler von* h *ist, so ist die Diskriminante* $D \neq 0$, *also der Gruppenring ein Ring ohne Radikal.*

Beweis. Wir zeigen zuerst (Sp heißt fortan Hauptspur):

$$Sp(e) = h\,e;$$
$$Sp(a_i) = 0 \quad \text{für} \quad (a_i \neq e).$$

In der regulären Darstellung ist nämlich

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} e & & & 0 \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e \end{pmatrix},$$

$$Sp(e) = h\,e.$$

Für $a_i \neq e$ ist

$$a_i a_k = a_\lambda, \qquad \lambda \neq k;$$

[22]) Vgl. für kommutative Systeme E. Noether, Diskriminantensatz für Ordnungen..., J. f. M. 157 (1927), S. 82–104, §§ 4–6. Die dortige Beweismethode ist die gleiche, aber im einzelnen komplizierter; der Übergang von einer Basis zu einer andern (§ 4, 4.) ist durch den hier (am Anfang des Paragraphen) gegebenen zu ersetzen (denn die Determinante $|(\varrho_i \varrho_k)|$ verschwindet).

also hat die Matrix, vermöge der die Produkte $a_i a_1, \ldots, a_i a_h$ durch $a_1, \ldots, a_h$ ausgedrückt werden, in der Hauptdiagonale lauter Nullen; also ist $Sp(a_i) = 0$.

Wir nehmen nun die Basen $a_1, \ldots, a_h$ und $a_1^{-1}, \ldots, a_h^{-1}$. Die Matrix $(Sp\,(a_i a_k^{-1}))$ lautet

$$\begin{pmatrix} h e & & & 0 \\ & h e & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & h e \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$D = h^h e \neq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Als *Klasse* eines Gruppenelements bezeichnet man die (im Gruppenring gebildete) Summe

$$K_a = \sum s^{-1} a s, \tag{1}$$

wo nur über die verschiedenen $s^{-1} a s$ summiert wird. *Die Klassen K_a sind Zentrumselemente,* da sie mit allen Gruppenelementen vertauschbar sind. *Die Klassen K_a erzeugen das Zentrum*; denn wenn ein Element $\sum a_i \varrho_i$ des Gruppenrings mit allen s vertauschbar ist, so ist

$$\sum_i a_i \varrho_i = s^{-1} (\sum_i a_i \varrho_i) s = \sum_i (s^{-1} a_i s) \varrho_i$$
$$= \frac{1}{h} \sum_i \Big(\sum_s s^{-1} a_i s \Big) \varrho_i = \frac{1}{h} \sum_i \Big(\frac{h}{h_i} K_i \Big) \varrho_i,$$

wo h die Anzahl der Gruppenelemente und h_i die Anzahl der Elemente der Klasse K_i ist.

Also ist der Rang des Zentrums gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Gruppenelemente, mithin auch *die Anzahl der absolut-irreduziblen Darstellungen gleich dieser Klassenzahl.*

Die Matrizes A und $S^{-1} A S$ haben dieselbe Spur; also haben die Gruppenelemente a und $s^{-1} a s$ dieselbe Spur.

Bildet man nun auf beiden Seiten von (1) die Spur, so folgt:

$$\chi(K_i) = h_i \chi(a_i),$$

in Worten:

Der Charakter eines Gruppenelements ist gleich dem Charakter der Klasse, dividiert durch die Anzahl der Elemente der Klasse.

(Eingegangen am 12. August 1928.)